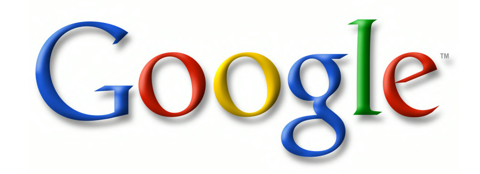
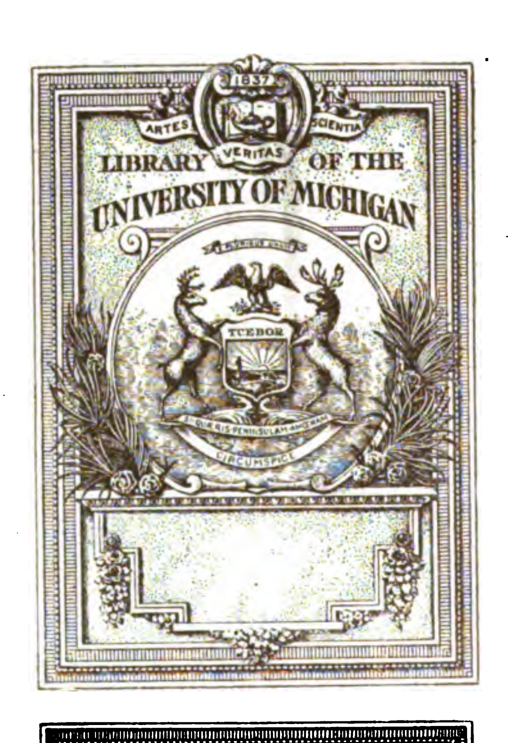



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES.


Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡ

2591 Alexander Ziwet 48

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. Jacques Antoine Charles BRESSE,

Membre de l'Institut,
Inspecteur général des Ponts et Chaussées.

TOME SECOND.

Dynamique des systèmes matériels en général. — Mécanique spéciale des fluides. — Étude des machines à l'état de mouvement.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

Brig. Alex. Ziwet
gt.
1 - 31 - 1923

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS EN GÉNÉRAL
ET PLUS PARTICULIÈREMENT DES CORPS SOLIDES.

CHAPITRE PREMIER.

DYNAMIQUE GÉNÉRALE.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DYNAMIQUE SPÉCIALE DES SOLIDES.

CHAPITRE TROISIÈME.

APPLICATIONS DE LA DYNAMIQUE SPÉCIALE DES SOLIDES.

CINQUIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE SPÉCIALE DES FLUIDES.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE DEUXIÈME.

HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE TROISIÈME.

HYDRAULIQUE.

SIXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES MACHINES A L'ÉTAT DE MOUVEMENT. THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES; APPAREILS DESTINÉS A MESURER LE TRAVAIL DES FORCES.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DES MOTEURS ET DES RÉCEPTEURS DESTINÉS A RECUEILLIR LEUR TRAVAIL.

CHAPITRE TROISIÈME.

THERMODYNAMIQUE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

ERRATA.

Page	Ligne	Au lieu de	Lisez
8	4 H	$\frac{dD_{k-1}}{dz}$	$\frac{dL_{k-1}}{dz}$
24	3 B	trois composantes OI	trois composantes de OI
32	15 H	$\frac{dL}{dt}\ \frac{dL}{dt}$	$\frac{dL}{dt}\ \frac{dL_1}{dt}$
39	15 H	$Y\,dy + dz$	$Y\,dy + Z\,dz$
56	11 H	perte qui reste sans compensation si la seconde partie n'existe pas, soit en raison de l'absence d'élasticité dans les corps, soit parce que le travail, etc.	perte qui reste sans compensation si, en raison de l'absence d'élasticité dans les corps, la seconde partie n'existe pas, ou si le travail, etc.
70	1 B	prenons ces variables auxiliaires	prenons des variables auxiliaires

Page	Ligne	Au lieu de	Lisez
81	9 H	(n° 123)	(n° 223)
96	4 B	autour de Oz	autour de OZ
96	3 B	autour de z	autour de Oz
100	3 B	axe fixe des z	axe fixe des Z
114	11 B	$-2\mathrm{BP}a\sin^2\theta(\cos\theta_0 - \cos\theta)$	$-2\mathrm{BP}a\sin^2\theta(\cos\theta_0 - \cos\theta)$
115	4 H	$-2\mathrm{A}^2p^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin\theta$	$-2\mathrm{A}^2p^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin\theta$
137	4 H	*fig.* 247	*fig.* 266
188	5 B	la position utile de la parabole	la portion utile de la parabole
202	5 H	la position de la normale	la portion de la normale
214	9 H	où la pression p_0	où la pression est p_0.
219	*fig.* 290	C'	G
229	8 H	système liquide	corps solide
237	8 H	*fig.* 278	*fig.* 298
254	2 H	trajectoire qui suivrait	trajectoire que suivrait
272	3 B	section oi	section cd
281	14 H	sur l'écoulement en prenant	sur l'écoulement de l'eau en prenant
285	7 B	$z_2 - \frac{p - p'}{\pi} < \frac{3}{4}\frac{p'}{\pi}$	$z_2 + \frac{p - p'}{\pi} < \frac{4}{3}\frac{p'}{\pi}$
295	1 H	$\frac{\mathrm{DJ}}{4\mathrm{D}}$	$\frac{\mathrm{DJ}}{4\mathrm{U}}$
303	14 H	la perte commune	la pente commune
340	3 B	$\int_0 \mathrm{F}\,d\xi$	$\int_0^{\xi} \mathrm{F}\,d\xi$
371	3 H	supprimez : (n° 310)	
380	7 H	$\frac{v}{8g\cos^2 15^\circ}$	$\frac{v^2}{8g\cos^2 15^\circ}$
384	3 B	coursier IEK	coursier AB
384	2 B	KL	BC
384	1 B	EKL	ABC
385	1 H	vanne M	vanne D
390	4 H	$\mathrm{U} = \frac{4}{3}\mathrm{V}$	$\mathrm{U} = \frac{4}{3}\mathrm{W}$
392	8 H	$0^{m},6$	$0^{m},06$
420	1 B	6×1994	6×1499
435	2 B	le tuyau de pompe	le corps de pompe
440	*fig.* 364	x	x
447	7 B	mp	$m\mu$

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

QUATRIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS EN GÉNÉRAL ET PLUS PARTICULIÈREMENT DES CORPS SOLIDES.

---

192. *Division du Cours de seconde année.* — Le *Cours de Mécanique et Machines* comprend, dans la seconde année, trois grandes divisions : la dynamique des systèmes matériels en général, et plus particulièrement des corps solides; 2° la mécanique spéciale des fluides; 3° l'étude des machines en mouvement, à laquelle se joindra la Thermodynamique ou Théorie mécanique de la chaleur, faite surtout en vue de son application aux machines à vapeur.

CHAPITRE PREMIER.

DYNAMIQUE GÉNÉRALE.

---

§ I. — Principe de d'Alembert; exemples de son application.

193. *Principe de d'Alembert.* — Les équations qui définissent les coordonnées variables des divers points d'un système en fonction du temps peuvent toujours s'obtenir au moyen d'un théorème très général, connu sous le nom de *Principe de d'Alembert,* parce que d'Alembert l'a énoncé le premier et publié en 1743. Pour y arriver, considérons d'abord dans le système un point matériel M qui en fait partie; ce point se meut sous l'action de diverses forces, qui peuvent toujours se diviser en deux catégories (n° 131) :

1° Forces directement appliquées, comme sont, par exemple, les actions de la pesanteur et autres attractions analogues, les forces produites par l'effort qu'exercerait un animal, la pression d'un fluide en contact avec le point considéré, etc.;

2° Forces provenant des liaisons qui unissent le point M avec les autres points du système, ou avec des corps extérieurs non compris dans celui-ci; en tenant compte de cette seconde catégorie de forces, on tient par là même compte des liaisons, car une liaison ne peut avoir d'influence sur le mouvement qu'en raison des forces auxquelles elle donne naissance.

Toutes ces forces étant appliquées en un même point, nous pouvons (n° 100) les réduire à une seule, que nous remplacerons ensuite par ses composantes X, Y, Z suivant trois axes rectangulaires. Puisque nous avons compris dans X, Y, Z les forces qui proviennent de ce que le point M fait partie d'un système, nous sommes en droit de l'isoler des autres points

par la pensée et d'écrire les équations de son mouvement comme s'il était seul. Si donc on appelle

m sa masse;

x, y, z ses coordonnées dans le système d'axes rectangulaires ci-dessus mentionnés,

on aura (n° 104)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

soit, sous une autre forme,

$$(1) \qquad X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Les équations (1) peuvent être considérées comme exprimant l'équilibre entre les forces (X, Y, Z) qui agissent réellement sur le point M et une force fictive égale au produit de la masse m par l'accélération totale j prise en sens contraire; car, les composantes de j suivant les axes coordonnés étant (n° 16)

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

celles de la force $-mj$ auront pour valeurs

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

et annuleront respectivement X, Y, Z, ce qui est la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre (n° 112).

La force $-mj$ a reçu un nom particulier; on l'appelle *force d'inertie* du point M. Si le point M recevait son accélération totale j par le contact d'un certain corps; si, par exemple, on lui donnait son mouvement en le tenant dans la main, la main devrait exercer sur lui une force mj et, par conséquent, elle éprouverait une réaction égale et contraire $-mj$ (n° 95). La force d'inertie d'un point matériel n'est donc pas une force agissant réellement sur lui; pour ce point c'est une force fictive, comme nous l'avons dit. Mais en même temps, dans le cas particulier qu'on vient d'indiquer, c'est une force réelle à l'égard de la main qui met le point en mouvement, car c'est la

résistance qu'elle éprouve pour obtenir le résultat consistant à produire l'accélération j d'un point de masse m.

Moyennant l'introduction de la force d'inertie, les équations (1) s'énoncent ainsi :

Dans tout système en mouvement, il y a équilibre entre les forces qui agissent réellement sur un point quelconque et sa force d'inertie.

D'autre part, quand chaque point d'un système est en équilibre, le système entier y est également; seulement, il ne faut pas l'oublier, cet équilibre n'a lieu qu'en tenant compte, pour chaque point, des forces produites par la dépendance réciproque des divers points entre eux ou entre ces points et des corps extérieurs au système. C'est ce qu'on exprime en disant :

Dans tout système en mouvement, il y a équilibre, PAR L'INTERMÉDIAIRE DES LIAISONS, *entre les forces directement appliquées et les forces d'inertie.*

Ces mots : *par l'intermédiaire des liaisons* sont simplement destinés à rappeler qu'on doit tenir compte des forces auxquelles les liaisons donnent naissance.

L'équilibre d'un ensemble quelconque de forces s'exprime, comme on sait (n° 127), par l'équation générale du travail virtuel, qui deviendra ici

$$(2) \quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0;$$

la somme Σ s'étend à tous les points du système, et quand on fait figurer toutes les forces réellement agissantes dans le calcul de X, Y, Z, ..., les déplacements virtuels δx, δy, δz, ... sont absolument arbitraires. De cette manière, il est clair que l'équation (2) renferme implicitement toutes les équations (1), écrites séparément pour les divers points; on peut donc dire que le principe de d'Alembert permet d'obtenir les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque de points.

Mais, en réalité, cette méthode générale n'est pas pratiquement applicable, parce que tout corps perceptible à nos sens, quelque petitesse qu'on lui suppose, renferme encore un

nombre immense de particules matérielles, sur chacune desquelles s'exercent des forces directement appliquées, ou des forces provenant des autres particules, ou encore des forces dues à des liaisons avec les corps extérieurs. Si n désigne le nombre de ces particules, qu'on peut considérer comme des points matériels sans dimensions, les équations analogues à (1) seront en nombre triple $3n$, et renfermeront comme inconnues auxiliaires toutes les forces de liaison, en nombre encore plus considérable. On rencontrerait donc ici les mêmes difficultés qu'on a déjà signalées (n° 127) à propos de la recherche des conditions d'équilibre, et il s'y ajouterait encore les difficultés d'un genre différent qui se rapportent à l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées, du second ordre au moins. Le théorème ou principe de d'Alembert n'en a pas moins le très grand avantage de ramener la détermination d'un mouvement à celle des conditions d'équilibre, sauf la difficulté d'analyse dont nous venons de parler en dernier lieu. La suite du Cours montrera, dans une certaine mesure, le parti qu'on peut en tirer; nous allons, quant à présent, en déduire un certain nombre de conséquences, qui seront encore des théorèmes très généraux, quoique à un moindre degré que le principe lui-même.

194. *Cas d'un système à liaisons.* — Supposons, en premier lieu, un système dont les liaisons, variables, si l'on veut, avec le temps, satisfont toujours à la condition essentielle formulée au n° 130. Les forces provenant des liaisons produisent donc, par hypothèse, des travaux élémentaires dont la somme est toujours nulle dans tous les déplacements compatibles, à l'instant considéré, avec ces mêmes liaisons. Alors, si dans l'équation (2) on se borne à introduire des systèmes de déplacements virtuels

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \ldots,$$

compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'époque t, ces variations de coordonnées n'étant plus alors indépendantes les unes des autres, on sait que, dans l'équation répondant à chaque système de déplacements, les travaux des forces de liaison disparaissent d'eux-mêmes, en sorte que ces forces, *a priori* inconnues, se trouvent ainsi éliminées et

qu'on n'a plus à les comprendre dans les composantes X, Y, Z, ... Il suffit alors de considérer X, Y, Z comme les sommes des composantes, suivant les axes coordonnés, des forces directement appliquées à chaque point matériel, lesquelles sont le plus souvent des données immédiates du problème. Cependant, après cette modification, l'équation (2) reste encore la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre (n° 130), et, par conséquent, elle renferme implicitement les équations du mouvement.

Pour montrer comment on peut les en faire sortir dans un cas très général, nous allons supposer, avec Lagrange, que les liaisons sont exprimables par des équations entre les coordonnées

$$(3)\qquad x,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ y_{n-1},\ z_{n-1}$$

des n points qui composent le système. Soient

$$(4)\qquad L=0,\quad L_1=0,\quad \ldots,\quad L_{k-1}=0$$

des équations que ces coordonnées doivent toujours vérifier, et dans lesquelles peut aussi figurer le temps t. Le nombre k des équations (4) ci-dessus ne peut d'ailleurs atteindre $3n$, sans quoi ces équations suffiraient pour déterminer toutes les coordonnées des n points, et il n'y aurait plus de mouvement à chercher.

Si un système de déplacements virtuels est compatible avec les liaisons, telles qu'elles existent à l'époque t, il faut que les équations (4) soient vérifiées simultanément par les coordonnées (3) et par ces coordonnées augmentées de leurs variations

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta x_1,\ \delta y_1,\ \delta z_1,\ \ldots,\ \delta x_{n-1},\ \delta y_{n-1},\ \delta z_{n-1},$$

qui définissent les déplacements virtuels dont il s'agit. De là résultent les conditions

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \ldots + \dfrac{dL}{dz_{n-1}}\delta z_{n-1} = 0,\\[2ex]
\dfrac{dL_1}{dx}\delta x + \dfrac{dL_1}{dy}\delta y + \dfrac{dL_1}{dz}\delta z + \dfrac{dL_1}{dx_1}\delta x_1 + \ldots + \dfrac{dL_1}{dz_{n-1}}\delta z_{n-1} = 0,\\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\[2ex]
\dfrac{dL_{k-1}}{dx}\delta x + \dfrac{dL_{k-1}}{dy}\delta y + \dfrac{dL_{k-1}}{dz}\delta z + \ldots + \dfrac{dL_{k-1}}{dz_{n-1}}\delta z_{n-1} = 0;
\end{array}\right.$$

on les obtient en retranchant les équations (4) prises avec les coordonnées (3), des mêmes équations dans lesquelles on a mis les coordonnées augmentées de leurs variations. Les déplacements définis par ces variations, et qui peuvent être admis comme compatibles avec les liaisons, sont généralement en nombre infini, mais chaque système doit toujours vérifier les k équations (5). On peut imaginer qu'on tire de ces équations k variations en fonction des $3n-k$ autres, et qu'on en porte les valeurs dans l'équation (2); les $3n-k$ variations restantes sont alors complètement arbitraires, et l'équation se décompose en $3n-k$ équations distinctes, parce qu'on doit égaler séparément à zéro chacun des coefficients des $3n-k$ variations arbitraires. Ces $3n-k$ équations, jointes aux k équations de liaison, donnent les $3n$ équations nécessaires pour déterminer les $3n$ coordonnées inconnues en fonction du temps.

Au lieu d'éliminer k variations, comme on vient de le faire concevoir, Lagrange a indiqué une méthode dans laquelle tous les points sont traités de la même manière. Multiplions chacune des équations (5) par une indéterminée, puis sommons ces équations avec l'équation (2), où nous supposerons que les déplacements sont compatibles avec les liaisons et où nous ne ferons entrer, en conséquence, que les forces directement appliquées; nous aurons ainsi

$$(6)\quad \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \lambda_1\frac{dL_1}{dx} + \ldots + \lambda_{k-1}\frac{dL_{k-1}}{dx}\right)\delta x + \ldots = 0,$$

en désignant les indéterminées par

$$(7)\qquad \lambda,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{k-1}.$$

Le nombre des parenthèses serait $3n$ comme celui des variations, et chacune d'elles s'écrirait facilement *in extenso*. Or nous pouvons concevoir qu'on assujettisse les k indéterminées à un pareil nombre de conditions, qui consisteraient à rendre nuls les coefficients de k variations; l'équation (6) deviendrait alors l'équation finale obtenue tout à l'heure, et l'on devrait encore égaler à zéro les coefficients des $3n-k$ varia-

tions restantes. On aurait donc le système de $3n$ équations

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \lambda_1\frac{dL_1}{dx} + \ldots + \lambda_{k-1}\frac{dL_{k-1}}{dx} = 0,\\
&Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dy} + \lambda_1\frac{dL_1}{dy} + \ldots + \lambda_{k-1}\frac{dL_{k-1}}{dy} = 0,\\
&Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz} + \lambda_1\frac{dL_1}{dz} + \ldots + \lambda_{k-1}\frac{dD_{k-1}}{dz} = 0,\\
&X_1 - m\frac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx_1} + \lambda_1\frac{dL_1}{dx_1} + \ldots + \lambda_{k-1}\frac{dL_{k-1}}{dx_1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&Z_{n-1} - m\frac{d^2z_{n-1}}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz_{n-1}} + \lambda_1\frac{dL_1}{dz_{n-1}} + \ldots + \lambda_{k-1}\frac{dL_{k-1}}{dz_{n-1}} = 0,
\end{aligned}\right.$$

qui, jointes aux k équations (4) de liaison, détermineraient, en fonction du temps, les $3n$ coordonnées et les k coefficients (7).

Cette dernière méthode (et c'est encore un de ses avantages) permet aussi de trouver bien facilement les forces produites par les liaisons. Concevons, en effet, qu'on attribue aux quantités $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ les valeurs qu'elles ont réellement à chaque instant et que le calcul précédent a fait connaître; alors les équations (8), en nombre $3n$, suffiraient pour déterminer le mouvement du système et redonneraient les valeurs des $3n$ coordonnées, qu'on a déjà obtenues d'une autre manière. Or, en considérant en particulier l'une des liaisons, par exemple, celle qui s'exprime par l'équation $L = 0$, on voit qu'on ne changerait rien aux équations (8) si, d'une part, on n'avait pas égard à cette liaison et si, d'autre part, on supposait appliquées aux divers points du système de nouvelles forces ayant pour composantes

$$\lambda\frac{dL}{dx},\ \lambda\frac{dL}{dy},\ \lambda\frac{dL}{dz},\ \lambda\frac{dL}{dx_1},\ \ldots,\ \lambda\frac{dL}{dz_{n-1}};$$

car, après avoir supprimé certains termes, on les rétablirait à un autre titre. La liaison $L = 0$ produit donc, sur un point quelconque (x, y, z), le même effet qu'une force ayant, parallèlement aux axes coordonnés, les composantes $\lambda\frac{dL}{dx}$, $\lambda\frac{dL}{dy}$,

$\lambda \frac{dL}{dz}$; ce sont donc là effectivement les composantes de la force réellement exercée sur le point dont il s'agit, en vertu de la liaison $L = 0$, et on les aura immédiatement quand λ aura été calculé, puisque L est une fonction connue. On voit que cette force a ses cosinus directeurs proportionnels à $\frac{dL}{dx}, \frac{dL}{dy}, \frac{dL}{dz}$; donc elle agit normalement à la surface représentée par l'équation $L = 0$, où x, y, z seraient considérées comme les seules variables.

195. *Cas de forces instantanées.* — On donne le nom de *forces instantanées* à celles qui ont une grande intensité, mais une très courte durée d'action; on leur donne aussi le nom de *percussions*, parce que des forces de ce genre se produisent quand on bat ou frappe un corps solide avec un autre solide. Supposons d'abord une force F de ce genre agissant sur un point isolé, de masse m, pendant le temps θ; nommons

X, Y, Z les composantes de la force suivant trois axes rectangulaires fixes;

x, y, z les coordonnées du point mobile dans ce système d'axes;

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ les composantes de la vitesse à la fin du temps θ;

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ les mêmes composantes à l'instant initial de ce même temps.

Si l'on commence en outre à compter le temps quand commence l'action de la force, l'application du théorème des quantités de mouvement projetées (n° 106), pendant l'intervalle de temps θ, donne immédiatement

$$m\left[\frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right] = \int_0^\theta X\,dt, \quad m\left[\frac{dy}{dt} - \left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right] = \int_0^\theta Y\,dt,$$
$$m\left[\frac{dz}{dt} - \left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right] = \int_0^\theta Z\,dt.$$

Or les trois intégrales des seconds membres peuvent avoir

une valeur notable, malgré la petitesse de θ, si F est grand; c'est comme une aire plane dont on augmente la hauteur en même temps qu'on réduit la largeur de plus en plus. On voit donc que la quantité de mouvement (ou la vitesse) du point a pu varier notablement pendant ce temps θ, pour ainsi dire nul; et cependant la position du point semble rester invariable, et elle le serait en effet dans l'hypothèse limite $\theta = 0$, car, en nommant u, v, w les limites supérieures des vitesses composantes pendant la durée θ, on aurait pour limites correspondantes des espaces parcourus par le point en projection sur chacun des axes

$$u\theta,\ v\theta,\ w\theta,$$

c'est-à-dire o à la limite, quand θ devient nul. Ainsi, en résumé, la force instantanée ne change pas la position de son point d'application, mais elle modifie sa vitesse d'une quantité finie; c'est de cette manière que se manifeste le résultat de son action, et ce résultat est en rapport avec les impulsions $\int_0^\theta X\,dt$, $\int_0^\theta Y\,dt$, $\int_0^\theta Z\,dt$, ou simplement avec $\int_0^\theta F\,dt$ dans le cas où F agirait toujours suivant une même ligne droite donnée, parce qu'alors les trois premières intégrales seraient dans des rapports connus avec la dernière. Il suffit alors de définir la percussion par son impulsion, pour être en mesure d'en évaluer le résultat.

Considérons maintenant un système à liaisons soumis à des percussions en nombre quelconque pendant une très courte durée θ. Les impulsions des forces étant données, ainsi que les vitesses initiales, on peut établir une relation entre ces quantités et les vitesses finales. A cet effet, imaginons qu'on écrive l'équation (2) pour une époque quelconque entre zéro et θ, en n'y faisant pas entrer les forces de liaison et en n'y admettant que les déplacements virtuels dont ces liaisons laissent subsister la possibilité. Un système de valeurs pour

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta x_1,\ \delta y_1,\ \delta z_1,\ \ldots,\ \delta x_{n-1},\ \delta y_{n-1},\ \delta z_{n-1},$$

admissible au commencement de la durée θ, l'est encore à la fin et à un instant intermédiaire quelconque; car, en vertu du

raisonnement fait pour le cas d'un point unique (lequel s'appliquerait à chaque point du système), le système n'a pas changé de position pendant toute cette durée θ, et, puisque θ est censé pour ainsi dire nul, le temps n'a pas varié non plus d'une manière appréciable; d'où il résulte que les conditions imposées aux variations ci-dessus n'ont pas pu changer, sauf dans le cas où l'on admettrait la possibilité d'une modification brusque des liaisons. Laissant ce cas de côté, nous multiplierons l'équation (2) par dt et nous intégrerons pendant la durée des percussions, en considérant les variations δx, δy, δz, ... comme des constantes; nous trouverons ainsi

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \sum\Bigg\{ &\left[\int_0^\theta X\,dt - m\frac{dx}{dt} + m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right]\delta x \\ &+\left[\int_0^\theta Y\,dt - m\frac{dy}{dt} + m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right]\delta y \\ &+\left[\int_0^\theta Z\,dt - m\frac{dz}{dt} + m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right]\delta z\Bigg\} = 0, \end{aligned}\right.$$

équation dans laquelle les dérivées de coordonnées relativement au temps, avec ou sans indice, conservent la signification définie plus haut, quand il s'agissait d'un point isolé. L'équation (9) n'est pas autre chose que l'expression analytique de la condition d'équilibre fournie par le théorème du travail virtuel, entre les quantités suivantes traitées comme forces directement appliquées :

1° Impulsions des forces directement appliquées en réalité, parmi lesquelles forces on ne prendra que les percussions, l'intégrale $\int_0^\theta F\,dt$ étant négligeable pour une force ordinaire, en raison de la petitesse de θ;

2° Quantités de mouvement finales, prises en sens contraire;

3° Quantités de mouvement initiales.

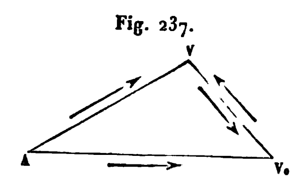
Cette équation exprime en effet que les forces dont on vient de donner l'énumération font un travail total nul dans tout déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons, qu'on donnerait fictivement au système à partir de la

position occupée par lui pendant que les percussions se produisent. Donc :

Il y a équilibre, par l'intermédiaire des liaisons du système, entre les impulsions des forces instantanées ou percussions directement appliquées, les quantités de mouvement initiales et les quantités de mouvement finales changées de sens.

L'énoncé devient plus élégant lorsqu'on y introduit ce qu'on nomme les *quantités de mouvement perdues*. Soient $\overline{AV}$ (*fig.* 237) la vitesse finale d'un point A et $\overline{AV_0}$ sa vitesse initiale; joignons VV_0. On peut regarder $\overline{AV}$ comme la résultante ou somme géométrique (n° 11) de $\overline{AV_0}$ et de $\overline{V_0V}$ (sens de la flèche extérieure), ou encore regarder $\overline{AV_0}$ comme la somme géométrique de $\overline{AV}$ et de $\overline{VV_0}$ (sens de la flèche intérieure). Au premier point de vue, la vitesse représentée par la droite $\overline{V_0V}$ est l'excès géométrique de la vitesse finale sur la vitesse initiale; on nomme alors $\overline{V_0V}$ *vitesse gagnée*.

Fig. 237.



De même, en se plaçant au second point de vue, on reconnaît dans la vitesse $\overline{VV_0}$ l'excès géométrique de la vitesse initiale sur la vitesse finale, et l'on nomme VV_0 *vitesse perdue*. Si l'on imagine les côtés du triangle amplifiés dans le rapport de la masse m du point à l'unité, les produits $m\overline{V_0V}$ et $m\overline{VV_0}$ représenteront les quantités de mouvement perdues ou gagnées par ce point. Soient maintenant x, y, z les coordonnées de A; u, v, w les composantes, suivant les trois axes, de sa vitesse perdue. On a immédiatement, par la projection du triangle sur ces axes,

$$mu = m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 - m\frac{dx}{dt},$$

$$mv = m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 - m\frac{dy}{dt},$$

$$mw = m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 - m\frac{dz}{dt}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (9), on voit qu'elle peut s'énoncer ainsi :

Il y a équilibre, par l'intermédiaire des liaisons du sys-

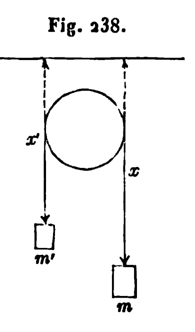
tème, entre les impulsions des percussions directement appliquées et les quantités de mouvement perdues.

Ce théorème conduit, comme on le verra plus tard par des exemples, à la détermination des vitesses finales; mais c'est là une proposition que nous ne chercherons pas à démontrer dans toute sa généralité. En la tenant pour exacte, on comprend qu'on arrive ainsi à connaître le résultat final de l'action des forces instantanées, sans avoir à s'occuper du détail de ce qui se passe pendant la très courte durée de cette action.

En terminant cet article sur les forces dites instantanées, nous ferons remarquer que θ ne peut pas être rigoureusement nul, à moins de supposer les forces infinies, car autrement leurs impulsions s'annuleraient, ainsi que leurs effets. Nous avons cependant raisonné dans l'hypothèse limite $\theta = 0$, mais on ne doit regarder les résultats que comme approximativement applicables aux phénomènes naturels, car il n'existe pas de force infinie dans la nature.

196. *Exemples simples de l'application du principe de d'Alembert.* — Prenons d'abord le cas de deux masses m, m' (*fig.* 238) attachées aux deux extrémités d'un fil parfaitement flexible et inextensible, qui s'enroule sur la demi-section droite d'un cylindre horizontal fixe et pend verticalement des deux côtés. On suppose l'absence de frottement et l'on regarde la masse du fil comme négligeable; la pesanteur est d'ailleurs la seule force directement appliquée. Si l'on nomme x et x' les distances des deux extrémités du fil à un plan horizontal supérieur, l'équation d'équilibre fournie par le théorème du travail virtuel sera

Fig. 238.



$$m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0.$$

On a, d'autre part, en vertu de la liaison de m avec m',

$$x + x' = \text{const.},$$

car il est visible qu'une des deux masses descend autant que l'autre remonte; de là résulte

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \delta x' = -\delta x.$$

Donc

$$m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - m'\left(g + \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

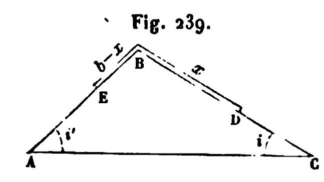
d'où l'on tire immédiatement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{m - m'}{m + m'}.$$

Si m est plus grand que m', le corps m a une accélération descendante, puisque alors $\frac{d^2x}{dt^2}$ est positif; au contraire, m' a une accélération ascendante et égale en valeur absolue. D'ailleurs $\frac{d^2x}{dt^2}$ est constant et le mouvement est uniformément varié. En rendant suffisamment petit l'excès de m sur m', on peut réduire, dans telle mesure qu'on veut, l'accélération g que prendrait la masse m tombant toute seule; ce serait quelque chose d'analogue à la machine d'Atwood, mais dans la pratique il serait difficile de rendre le frottement réellement négligeable.

Supposons encore une chaîne pesante, qui glisse sans frottement ni résistance due à la raideur, suivant les lignes de plus grande pente de deux plans inclinés AB, BC (*fig.* 239), adossés l'un à l'autre. Le poids de la chaîne est censé uniformément réparti sur sa longueur, à raison de p^{kg} par unité linéaire. Soient x la longueur $\overline{BD}$, b la longueur totale EBD de la chaîne, i et i' les inclinaisons des deux plans sur l'horizon. Le poids de BD est px, qui se décompose en $px \sin i$ suivant BC et $px \cos i$ suivant la normale; la force d'inertie de cette même portion est $-\frac{px}{g}\frac{d^2x}{dt^2}$, en l'évaluant dans le sens BC, considéré comme positif. De même le poids de BE

Fig. 239.



donne lieu aux composantes $p(b-x)\sin i'$, $p(b-x)\cos i'$, suivant BA et la normale; la force d'inertie dans le sens BA pris comme sens positif est $-\frac{p(b-x)}{g}\frac{d^2(b-x)}{dt^2}$ ou simplement $\frac{p(b-x)}{g}\frac{d^2x}{dt^2}$. La somme des travaux virtuels de toutes ces forces étant égalée à zéro, dans un déplacement virtuel δx suivant BC, on trouve, après la suppression du facteur commun $p\,\delta x$, l'équation

$$x\sin i-\frac{x}{g}\frac{d^2x}{dt^2}-(b-x)\sin i'-\frac{b-x}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

ou, en réduisant,

$$\frac{b}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-b\sin i'+x(\sin i+\sin i').$$

Pour intégrer cette équation, on posera, en nommant y une inconnue auxiliaire,

$$x=y+\frac{b\sin i'}{\sin i+\sin i'},$$

valeur dont la substitution conduit à

$$\frac{b}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=y(\sin i+\sin i')$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dt^2}=k^2y,$$

si l'on pose encore

$$k^2=\frac{g}{b}(\sin i+\sin i').$$

L'intégrale de l'équation différentielle en y est connue; on peut écrire immédiatement, en désignant par A et B deux constantes,

$$y=Ae^{kt}+Be^{-kt},$$

d'où résulte

$$x=\frac{b\sin i'}{\sin i+\sin i'}+Ae^{kt}+Be^{-kt}.$$

Les constantes A et B se détermineraient au moyen des

circonstances initiales du mouvement; si l'on donne, pour $t=0$,

$$x=x_0, \quad \frac{dx}{dt}=v_0,$$

on devra satisfaire aux équations

$$x_0=\frac{b\sin i'}{\sin i+\sin i'}+A+B, \quad v_0=k(A-B),$$

d'où il sera facile de tirer A et B.

Il est à remarquer que les calculs précédents cesseraient de s'appliquer dès que la chaîne commencerait à se mouvoir sur un seul des deux plans inclinés. Si, par exemple, elle a passé tout entière sur le plan BC, le poids px devient constant et égal à pb, tandis que le poids $p(b-x)$ disparaît; les expressions algébriques ci-dessus employées pour les forces ne restent donc pas exactes lorsque x cesse d'être compris entre 0 et b. Dans ce cas, il serait facile de reconnaître, en recommençant le calcul, que l'accélération prend une valeur constante $g\sin i$ ou $g\sin i'$, suivant que la chaîne glisse tout entière sur BC ou sur BA.

Cas particulier. — On suppose $x_0=\frac{b}{2}$, $v_0=0$, $i>i'$. On trouve alors

$$A=B=\frac{b}{4}\,\frac{\sin i-\sin i'}{\sin i+\sin i'}$$

et, par suite,

$$(10) \quad \frac{x}{b}(\sin i+\sin i')=\sin i'+\frac{1}{4}(\sin i-\sin i')(e^{kt}+e^{-kt}).$$

La distance x croît avec le temps; elle atteint la limite b au bout d'un temps t_1 donné par l'équation

$$e^{kt_1}+e^{-kt_1}=\frac{4\sin i}{\sin i-\sin i'};$$

d'où résulte, en posant $\beta=\frac{2\sin i}{\sin i-\sin i'}$,

$$(11) \quad e^{kt_1}=\beta+\sqrt{\beta^2-1}, \quad t_1=\frac{1}{k}L(\beta+\sqrt{\beta^2-1}).$$

A partir de $t = t_1$, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \sin i, \quad x = D + Ct + \frac{1}{2} g t^2 \sin i,$$

C et D étant deux nouvelles constantes. Si l'on compte maintenant le temps à partir de l'époque t_1 prise pour origine, on aura

$$D = b, \quad C = \frac{kb}{4} \frac{\sin i - \sin i'}{\sin i + \sin i'} (e^{kt_1} - e^{-kt_1});$$

la valeur de C n'est autre chose que celle de la vitesse, calculée d'après l'équation (10), pour $t = t_1$. D'après la relation (11), on la transforme en la suivante :

$$C = \frac{kb}{2} \frac{\sin i - \sin i'}{\sin i + \sin i'} \sqrt{\beta^2 - 1}$$

ou, en remplaçant β par $\dfrac{2 \sin i}{\sin i - \sin i'}$,

$$C = \frac{kb}{2} \sqrt{\frac{3 \sin i - \sin i'}{\sin i + \sin i'}}.$$

Le problème se trouve ainsi complètement résolu.

§ II. — Théorèmes généraux de la dynamique.

197. *Observations préliminaires.* — Comme nous l'avons déjà dit, on déduit du théorème ou principe de d'Alembert un certain nombre de théorèmes, d'une généralité moindre, quoique très grande encore; ces théorèmes sont d'ailleurs importants, et l'on en fait plus fréquemment usage que du principe lui-même. Nous avons vu comment ce principe s'applique aux systèmes présentant des liaisons d'une certaine nature; nous allons maintenant en tirer quatre théorèmes qu'on appelle *théorèmes généraux de la Dynamique,* parce qu'ils sont toujours applicables dans le mouvement d'un système matériel quelconque, bien qu'en général ils ne soient pas suffisants pour déterminer ce mouvement, dont ils font seulement connaître certaines propriétés. Nous y arriverons

en posant diverses équations d'équilibre toujours nécessaires, mais pouvant ne pas être suffisantes, entre les forces qui agissent réellement et les forces d'inertie (n° 193).

Prenons d'abord les six équations générales auxquelles doivent satisfaire les forces extérieures d'un système quelconque en équilibre (n° 129), savoir, avec les notations habituelles,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0;$$

elles expriment, dans leur ensemble, que la somme algébrique des projections ou moments des forces est nulle pour un axe quelconque, et l'on se rappelle que ces équations, toujours nécessaires, sont suffisantes dans le cas particulier d'un système solide. Si l'on y met en évidence les forces d'inertie, elles deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} \sum\left(X - m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum\left(Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum\left(Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum\left[\left(Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)y - \left(Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)z\right] = 0, \\ \sum\left[\left(X - m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)z - \left(Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)x\right] = 0, \\ \sum\left[\left(Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)x - \left(X - m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)y\right] = 0, \end{cases}$$

les forces extérieures réellement agissantes devant alors être seules prises en compte dans le calcul des composantes X, Y, Z de la force appliquée au point (x, y, x).

Cela posé, les équations (1) vont nous donner les trois premiers théorèmes généraux.

198. *Premier théorème général ou théorème sur le mouvement du centre de gravité.* — Les trois premières équa-

tions (1) peuvent s'écrire

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum Y,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum Z;$$

or, en désignant par M la masse totale Σm du système et par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité, on sait (nº 150) que ces coordonnées vérifient les équations

$$Mx_1=\Sigma mx,\quad My_1=\Sigma my,\quad Mz_1=\Sigma mz,$$

qui en donneraient les valeurs à un instant quelconque, si les coordonnées de tous les points étaient connues. On tire de ces dernières équations, en les différentiant deux fois par rapport au temps,

$$(2)\qquad \begin{cases} M\dfrac{dx_1}{dt}=\sum m\dfrac{dx}{dt},\\ M\dfrac{dy_1}{dt}=\sum m\dfrac{dy}{dt},\\ M\dfrac{dz_1}{dt}=\sum m\dfrac{dz}{dt};\end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\sum m\dfrac{d^2x}{dt^2},\\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\sum m\dfrac{d^2y}{dt^2},\\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=\sum m\dfrac{d^2z}{dt^2};\end{cases}$$

donc on a aussi

$$(4)\qquad M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Les équations (4) sont celles du mouvement du centre de gravité; on voit qu'elles sont identiques (nº 104) avec celles d'un point de masse M sollicité par une force dont les composantes auraient pour valeurs ΣX, ΣY, ΣZ, ce qu'on exprime en disant :

Le centre de gravité d'un système matériel se meut comme un point qui réunirait la masse entière du système et auquel

on transporterait toutes les forces extérieures parallèlement à elles-mêmes.

Tel est le premier théorème général. On voit qu'il justifie complètement ce que nous avons dit au n° 92 touchant l'assimilation d'un corps de dimensions quelconques à un simple point matériel; pour la rendre légitime et pouvoir faire abstraction des dimensions du corps, il suffit d'imaginer que toute la matière se concentre au centre de gravité. Voici maintenant quelques autres applications ou conséquences immédiates de ce théorème.

Lorsqu'un être animé s'appuie sur un plan horizontal, la pression verticale N qu'il exerce est tantôt inférieure, tantôt supérieure à son poids Mg. La première alternative se présente quand l'accélération du centre de gravité est descendante, et la seconde dans le cas contraire; la pression est égale au poids, si le centre de gravité n'a qu'une accélération horizontale. On comprend que le jeu des muscles puisse donner lieu successivement à ces divers cas. La réaction du plan d'appui étant une force ascendante égale à N, on aura toujours, si l'on nomme J la projection de l'accélération du centre de gravité sur la verticale descendante,

$$MJ = Mg - N \quad \text{ou} \quad N = M(g - J),$$

ce qui montre bien que N sera inférieure, égale ou supérieure à Mg, suivant qu'on aura J positive, nulle ou négative. Remarquons, d'ailleurs, que la réaction du plan a nécessairement le sens que nous lui avons attribué; par suite, N étant ainsi que M une quantité positive, la dernière équation montre qu'on a

$$g - J > 0.$$

Il résulte de là que J peut à la rigueur prendre une valeur négative quelconque, mais que ses valeurs positives ont g pour limite supérieure.

Lorsque le système n'est soumis à aucune force extérieure ou que la résultante de translation de ces forces est nulle, la vitesse du centre de gravité reste constante en grandeur, direction et sens, de sorte que ce point possède un mouvement rectiligne et uniforme. C'est en cela que consiste ce

qu'on a nommé le *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*. On peut l'appliquer au centre de gravité de l'univers, et même à celui du système solaire seul, si l'on admet que les corps extérieurs sont trop éloignés pour exercer des attractions de grandeur appréciable. On voit aussi qu'un animal privé de point d'appui extérieur ne pourrait, malgré le jeu de ses muscles, modifier la vitesse de son centre de gravité, car le jeu des muscles ne donne naissance qu'à des actions mutuelles des diverses parties du corps les unes sur les autres, c'est-à-dire à des forces intérieures deux à deux égales et de sens contraires (nº 95), qui n'influent pas sur le mouvement du centre de gravité. Par une raison toute semblable, ce mouvement n'est pas altéré, pour un système quelconque, lorsqu'il se produit une explosion qui en disperse les fragments, ou par des chocs intérieurs, autant du moins qu'il n'y a intervention d'aucune force extérieure nouvelle.

Enfin, si l'on suppose un animal placé sur un plan horizontal sans frottement et ne supportant que son poids, comme force directement appliquée, les forces extérieures étant alors verticales, puisque les réactions du plan sont censées normales, la vitesse horizontale du centre de gravité restera constante; et, si l'animal était primitivement en repos, il ne pourrait donner à son centre de gravité qu'un mouvement vertical. Il lui serait donc impossible d'avancer horizontalement; cela ne peut se faire que par l'intervention du frottement qui fournit la force extérieure nécessaire. Tout le monde sait par expérience combien il est difficile de marcher sur un sol très poli et ne donnant que très peu de frottement, comme, par exemple, un parquet avec enduit lubrifiant ou la surface de l'eau congelée.

On tire encore immédiatement des équations (2) et (3) cette conséquence :

La résultante de translation des quantités de mouvement d'un corps est égale à la quantité de mouvement qu'aurait son centre de gravité en lui attribuant la masse entière du corps. La même propriété est vraie pour les forces d'inertie.

Une résultante de translation (ou somme géométrique) est, en effet, caractérisée par cette propriété que sa projection sur

chacun des trois axes égale la somme algébrique des projections des composantes (nº **11**). Or les équations (2) expriment cette propriété pour les quantités de mouvement, et les équations (3) l'expriment pour les forces d'inertie.

199. *Deuxième théorème général ou théorème des quantités de mouvement projetées.* — Intégrons maintenant la première des équations (1) mise sous la forme

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum \mathrm{X},$$

après avoir multiplié les deux membres par dt; il vient, en prenant l'intégrale entre deux époques déterminées t_0 et t,

$$\sum m \left[\frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right] = \sum \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}\, dt.$$

Si v et v_0 désignent les vitesses du point matériel m au temps t et t_0, on sait (nº **13**) que les projections de ces vitesses sur l'axe des x ont pour valeurs $\frac{dx}{dt}$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$; X désigne d'autre part la projection F_x, sur le même axe, de la force extérieure F qui agit sur m. L'équation précédente peut alors s'écrire

$$(5) \qquad \sum m v_x - \sum m v_{0x} = \sum \int_{t_0}^{t} \mathrm{F}_x\, dt;$$

et, attendu que l'axe des x est indéterminé, on la traduit par cet énoncé :

L'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque, pendant un certain temps, est égal à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur le même axe, les impulsions étant prises pendant le même temps.

On a vu au nº **106** le même théorème pour le cas d'un point isolé.

200. *Troisième théorème général ou théorème des moments des quantités de mouvement.* — Pour établir le troisième

théorème, nous reprendrons la quatrième équation (1) sous la forme

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(Zy - Yz).$$

Le premier membre n'est autre chose, comme on le vérifie sans peine, que la dérivée par rapport à t de

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

c'est-à-dire de la somme des moments des quantités de mouvement mv par rapport à l'axe des x (n° 103); le second est la somme des moments, relativement au même axe, des forces extérieures F. Si donc on multiplie l'équation par dt et qu'on intègre entre deux limites, il viendra

$$(6) \qquad \Sigma\mathfrak{M}_x mv - \Sigma\mathfrak{M}_x mv_0 = \int_{t_0}^{t} \Sigma\mathfrak{M}_x \mathrm{F}\,dt,$$

v_0 désignant la valeur de v pour $t = t_0$ et la notation $\mathfrak{M}_x$ ayant la signification déjà connue (n° 107). Comme l'axe des x est arbitraire, l'équation (6) exprime que :

L'accroissement de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe quelconque, pendant un certain temps, est égal à l'intégrale, prise pendant le même intervalle de temps, du moment total des impulsions élémentaires des forces extérieures relativement au même axe.

Le même théorème a été démontré (n° 107) pour un point matériel unique.

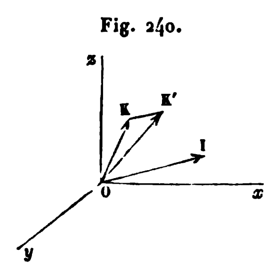
201. *Remarque sur le second et le troisième théorème général.* — Il semble au premier abord qu'en variant l'axe des projections ou des moments on puisse obtenir par ces théorèmes autant d'équations qu'on veut, mais en réalité on ne peut jamais avoir plus de six équations distinctes. Quand on aura pris trois équations de projections sur trois axes coordonnés et trois équations de moments relativement aux mêmes axes, on est certain que toute équation nouvelle de projections ou de moments sera une conséquence des six

premières. C'est, en effet, ce qui a lieu, comme on l'a vu dans la Statique (nº 129), pour les équations d'équilibre (1), d'où l'on a ensuite tiré (5) et (6) par une intégration. Les équations intégrales ne peuvent évidemment pas être distinctes quand les équations différentielles ne le sont pas.

202. *Autre énoncé du troisième théorème, d'après M. Resal.* — Soient (*fig.* 240)

Ox, Oy, Oz trois axes coordonnés rectangulaires;

Fig. 240.



$\overline{OK}$ l'axe représentatif du moment résultant (nº 145), par rapport au point O, à l'époque t, des quantités de mouvement considérées comme des forces;

$\overline{OK'}$ la quantité analogue pour l'époque infiniment voisine $t+dt$;

$\overline{OI}$ l'axe représentatif du moment résultant des forces extérieures, toujours relativement à l'origine, pour l'époque t;

a, b, c les coordonnées du point K;

$a+da$, $b+db$, $c+dc$ celles du point K';

α, β, γ celles du point I.

Appliquons l'équation (6) pour chacun des trois axes, pendant l'intervalle de temps de t à $t+dt$, en nous rappelant que la projection de la longueur $\overline{OK}$ sur toute droite issue du point O donne, pour l'époque t, la somme des moments des quantités de mouvement relativement à cette droite, et qu'une propriété semblable existe pour $\overline{OK'}$ et $\overline{OI}$. Nous trouverons

$$a+da-a=\alpha\,dt,\quad b+db-b=\beta\,dt,\quad c+dc-c=\gamma\,dt$$

ou simplement

$$\frac{da}{dt}=\alpha,\quad \frac{db}{dt}=\beta,\quad \frac{dc}{dt}=\gamma.$$

Donc les trois composantes de la vitesse du point K sont respectivement égales aux trois composantes $\overline{OI}$; d'où résulte l'énoncé de M. Resal :

La vitesse du point extrême de l'axe représentatif du mo-

ment résultant des quantités de mouvement est égale à l'axe représentatif du moment résultant des forces extérieures.

Il est sous-entendu que le centre des moments est le même pour les forces que pour les quantités de mouvement.

203. *Cas particulier du troisième théorème général; principe de la conservation des aires.* — Admettons que pour un axe particulier la somme des moments des forces extérieures soit constamment nulle; alors, d'après le troisième théorème général, la somme des moments des quantités de mouvement relativement à cet axe restera invariable; autrement dit, le point K de la *fig.* 240 ne pourra se mouvoir que dans un plan perpendiculaire à l'axe en question. Si les forces extérieures, composées entre elles comme pourraient l'être des forces qui agiraient sur un solide en équilibre, donnent sans cesse une résultante passant par un point fixe O, alors la somme de leurs moments est constamment nulle par rapport à tout axe issu de ce point, et réciproquement (n° 145). Dans ce cas, la somme des moments des quantités de mouvement reste invariable pour tous les axes menés par le point O, le point K est immobile et $\overline{OK}$ est constant en grandeur, direction et sens.

On remarquera aussi qu'en faisant varier l'axe mené par O, par rapport auquel on prend la somme des moments des quantités de mouvement, cette somme varie elle-même; mais, comme elle est égale à la projection de $\overline{OK}$ sur l'axe variable, elle sera maximum quand cet axe coïncidera avec OK.

Ces énoncés prennent une forme un peu différente en y introduisant les aires décrites pendant l'élément de temps dt, par des rayons vecteurs joignant chacun des points matériels au point O. Soient (*fig.* 241)

M_0MM' la trajectoire d'un point de masse m;
MM' l'élément décrit dans le temps dt;
P_0PP' la projection de la trajectoire sur un plan perpendiculaire à un axe Ox issu de O (on peut supposer, comme dans la figure, que le plan passe aussi par ce point).

Dans le Cours de première année, quand on s'est occupé du théorème des aires pour un point unique (n° 108), on a dé-

montré l'égalité

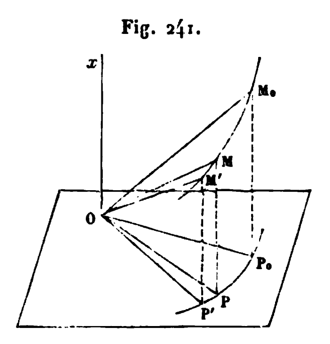
$$\mathfrak{M}_x mv = \frac{m \times 2 \text{ aire OPP}'}{dt},$$

ou encore, en désignant par $d\sigma_x$ l'aire OPP′ projection de l'aire OMM′ $= d\sigma$ sur un plan perpendiculaire à Ox,

$$(7) \qquad m\, d\sigma_x = \frac{dt}{2} \mathfrak{M}_x mv.$$

Le produit de la masse d'un point par l'aire que décrit, dans

Fig. 241.



l'élément de temps dt, en projection sur un plan perpendiculaire à un axe, le rayon vecteur joignant le point mobile avec un point de l'axe, est donc dans le rapport $\frac{dt}{2}$ avec le moment de la quantité de mouvement du point mobile par rapport à l'axe; et si l'on imagine un déplacement simultané de tous les points, en faisant la somme des égalités (7) appliquées à chacun d'eux, on aura

$$(8) \qquad \Sigma m\, d\sigma_x = \frac{dt}{2} \Sigma \mathfrak{M}_x mv.$$

Pour la complète généralité des équations (7) et (8), il faut que $d\sigma_x$ et $\mathfrak{M}_x mv$ aient toujours le même signe; il est donc nécessaire d'adopter le même sens positif pour les moments et pour la génération des aires.

Lorsque la somme des moments des forces extérieures est nulle par rapport à l'axe Ox, la somme $\Sigma \mathfrak{M}_x mv$ des moments des quantités de mouvement est constante par rapport

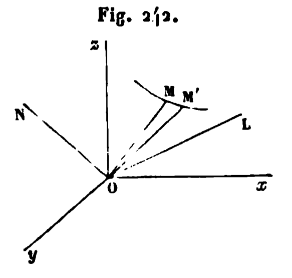
à cet axe; alors l'équation (8) nous montre que la somme $\Sigma m\, d\sigma_x$ des produits des masses par les aires décrites en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe sera toujours la même pour une série d'intervalles de temps dt égaux entre eux. C'est ce qu'on nomme le *principe de la conservation des aires*. On pourra poser

$$(9) \qquad \Sigma m\, d\sigma_x = C_x\, dt,$$

C_x désignant une constante égale à $\frac{1}{2}\Sigma \mathfrak{M}_x m v$.

Si le moment total des forces extérieures est encore nul pour deux autres axes Oy, Oz formant avec Ox un système rectangulaire, les forces, composées comme si elles agissaient sur un solide en équilibre, remplissent la condition (n° 146) nécessaire et suffisante pour être réductibles à une résultante unique passant en O, et la somme de leurs moments est nulle pour tout axe $O\alpha$ issu de ce point; donc l'équation (9) et l'énoncé qu'elle traduit algébriquement s'appliquent pour ce dernier axe et son plan perpendiculaire. Lorsqu'on les fait varier à un même instant, $\Sigma m\, d\sigma_\alpha$ varie aussi bien que $\Sigma \mathfrak{M}_\alpha m v$; mais, puisque le rapport de ces deux quantités est toujours $\frac{dt}{2}$, il est clair que l'une des deux devient maximum en même temps que l'autre. Donc le plan pour lequel la somme des produits des masses par les aires élémentaires projetées est maximum sera le plan perpendiculaire à l'axe $\overline{\text{OK}}$ du moment résultant des quantités de mouvement. La constance de direction de OK entraîne celle du plan perpendiculaire, qu'on nomme pour cette raison *plan invariable*, en même temps que *plan du maximum des aires*.

Fig. 242.



La recherche du plan du maximum des aires vient d'être donnée comme conséquence de la théorie des moments; voici comment on pourrait y arriver directement. Soient (*fig.* 242)

$d\sigma$ l'aire élémentaire OMM' décrite dans l'espace par le rayon vecteur OM d'un point;

λ, μ, ν les angles que fait la normale à OMM′ avec trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, cette normale ON étant portée dans un sens tel que l'observateur ayant la tête en N et les pieds en O verrait l'aire $d\sigma$ engendrée dans le sens adopté comme positif;

a, b, c les angles que fait avec les axes une droite fixe quelconque OL.

Cherchons la somme des produits des masses par les aires décrites en projection sur un plan P perpendiculaire à OL. On a, pour expression de cette somme,

$$\begin{aligned}&\Sigma m\, d\sigma \cos(\mathrm{ON}, \mathrm{OL})\\ &\quad = \Sigma m\, d\sigma(\cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu)\\ &\quad = \cos a\, \Sigma m\, d\sigma \cos\lambda + \cos b\, \Sigma m\, d\sigma \cos\mu + \cos c\, \Sigma m\, d\sigma \cos\nu,\end{aligned}$$

ce qui, en nommant $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ les projections de $d\sigma$ sur les plans des yz, des zx et des xy, revient à

$$\cos a\, \Sigma m\, d\sigma_x + \cos b\, \Sigma m\, d\sigma_y + \cos c\, \Sigma m\, d\sigma_z.$$

Si l'on pose maintenant

$$\Sigma m\, d\sigma_x = \mathrm{C}_x\, dt, \quad \Sigma m\, d\sigma_y = \mathrm{C}_y\, dt, \quad \Sigma m\, d\sigma_z = \mathrm{C}_z\, dt,$$

ces trois sommes pourront être regardées comme les projections sur les trois plans coordonnés d'une aire plane $\Omega\, dt$, l'étendue de cette aire étant définie par l'égalité

$$\Omega = \sqrt{\mathrm{C}_x^2 + \mathrm{C}_y^2 + \mathrm{C}_z^2}$$

et les cosinus directeurs de sa normale ayant les valeurs

$$\frac{\mathrm{C}_x}{\Omega}, \; \frac{\mathrm{C}_y}{\Omega}, \; \frac{\mathrm{C}_z}{\Omega}.$$

On a, par suite,

$$\begin{aligned}\Sigma m\, d\sigma \cos(\mathrm{ON}, \mathrm{OL}) &= \Omega\, dt \left(\frac{\mathrm{C}_x}{\Omega}\cos a + \frac{\mathrm{C}_y}{\Omega}\cos b + \frac{\mathrm{C}_z}{\Omega}\cos c\right)\\ &= \Omega\, dt \cos(\Omega, \mathrm{P}).\end{aligned}$$

Comme le cosinus est toujours au plus égal à 1, le premier membre a $\Omega\, dt$ pour valeur maximum; le plan du maximum

des aires est donc celui de $\Omega\,dt$, qui est défini en direction par trois cosinus proportionnels à C_x, C_y, C_z.

Quelles que soient les forces extérieures appliquées au système en mouvement, on peut toujours faire, pour chaque intervalle de temps dt, une recherche pareille à celle qu'on vient d'indiquer et en déduire un plan du maximum des aires. Mais, en général, ce plan variera d'un instant à l'autre. Lorsque, au contraire, les forces auront sans cesse leurs sommes de moments nulles par rapport aux trois axes coordonnés, les quantités C_x, C_y, C_z seront des constantes et, par suite, le plan du maximum des aires ne changera pas, non plus que l'aire Ω et la somme $\sum m \frac{d\sigma}{dt}\cos(\mathrm{ON}, \mathrm{OL})$ calculée pour un axe toujours le même aux diverses époques, mais d'ailleurs quelconque.

204. *Application du principe de la conservation des aires aux mouvements des animaux.* — Un animal isolé, en repos initial et sans point d'appui extérieur, ne pourrait produire par le jeu des muscles que des forces intérieures; s'il n'était soumis d'ailleurs à aucune force directement appliquée, non seulement il serait hors d'état de donner aucun mouvement à son centre de gravité (n° 198), mais il ne pourrait pas non plus donner à tous les points de son corps une rotation de même sens autour d'un axe quelconque, parce que cela ferait varier la somme des produits $\Sigma m\,d\sigma_x$ pour un plan de projection perpendiculaire à l'axe, et que cette somme doit toujours rester nulle, comme elle l'était d'abord. Quand l'animal soumis à l'action de la pesanteur est placé sur un plan horizontal sans frottement, les forces extérieures sont toutes verticales et les mêmes propositions subsistent, soit pour la progression horizontale, soit pour une rotation d'ensemble autour d'un axe vertical. Ces deux mouvements ne deviennent possibles l'un et l'autre que par l'intervention d'une réaction tangentielle que le jeu des muscles fait naître sur le plan d'appui, en tendant à produire, sur un ou plusieurs des points de contact, un glissement auquel le frottement s'oppose.

205. *Quatrième théorème général ou théorème des forces vives.* — Nous reprendrons l'équation fournie par le théorème

du travail virtuel pour exprimer l'équilibre entre toutes les forces réellement agissantes et les forces d'inertie (n° 193)

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Toutes les forces réellement agissantes étant supposées comprises dans cette équation, les δx, δy, δz de chaque point deviennent arbitraires, et nous sommes en droit de les remplacer par les composantes dx, dy, dz du déplacement infiniment petit que prend effectivement le point dans le temps dt; l'équation peut alors se mettre sous la forme

$$\sum m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}dt + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}dt + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}dt\right) = \sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Or le premier membre de cette dernière équation n'est autre chose que la différentielle de

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \text{ ou de } \frac{1}{2}\sum mv^2,$$

en nommant v la vitesse du point (x, y, z), et le second membre représente la somme des travaux élémentaires de toutes les forces qui agissent réellement sur les divers points du système; si donc on intègre entre deux positions quelconques, on pourra dire que :

L'accroissement de la demi-somme des forces vives de tous les points, entre deux positions du système, est égal à la somme des travaux effectués par toutes les forces, dans le passage de la première position à la dernière.

Observations sur le calcul de la somme des travaux des forces. — Les actions mutuelles des divers points les uns sur les autres sont des forces deux à deux égales et de sens contraires; mais on sait (n° 128) que la somme de leurs travaux n'est pas nulle par ce seul fait. En nommant f l'intensité de la force répulsive qui s'exerce entre deux points séparés

par une distance r, la somme des travaux élémentaires de ces deux actions mutuelles f s'exprime par $f\,dr$, expression qui convient aussi dans le cas d'une attraction en ayant soin d'affecter la force du signe $-$; la somme des travaux de toutes les actions analogues peut donc se représenter par $\sum\int f\,dr$, quantité généralement différente de zéro. Mais, si le corps est un solide invariable, on aura, pour tous les groupes de deux points,

$$r = \text{const.} \quad \text{et} \quad dr = 0;$$

par suite on n'a pas à tenir compte du travail des actions moléculaires dans ce cas particulier.

Lorsqu'il existe dans le système des liaisons de la nature de celles qu'on a considérées au n° 130, on sait que le travail total dû aux forces produites par les liaisons est nul dans tous les déplacements dont ces liaisons laissent subsister la possibilité. Et, comme le déplacement effectif est nécessairement un de ceux-là, on voit que le travail des forces de liaison disparaît de lui-même dans l'application du théorème des forces vives, et que par conséquent on n'a pas à le calculer.

Mais il est remarquable que la condition essentielle posée au n° **130** ne puisse pas être vérifiée d'une manière générale pour les déplacements effectifs, quand les liaisons sont exprimables par des équations où entre le temps t, concurremment avec les coordonnées des divers points. Le travail virtuel des forces de liaison, dans ce cas, est bien toujours nul, par hypothèse, pour un déplacement virtuel quelconque permis par les liaisons, *en les prenant telles qu'elles existent à l'instant considéré*; mais il n'est pas nul pour un déplacement élémentaire réel, qui s'effectue après cet instant et sous l'influence des liaisons variables avec le temps. Reprenons en effet les notations du n° 194 et considérons la liaison exprimée par l'équation $L = 0$; les déplacements virtuels doivent, comme on l'a vu, satisfaire à diverses équations, parmi lesquelles se trouve

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \ldots + \frac{dL}{dz_{n-1}}\delta z_{n-1} = 0.$$

Or le premier membre de cette équation, multiplié par un certain facteur λ, exprime justement la somme des travaux virtuels des forces dues à la liaison $L = 0$, et l'on vérifie bien ainsi que cette somme est nulle. Si l'on s'occupe au contraire du déplacement réel qui s'effectue pendant le temps dt, l'équation $L = 0$ devant être vérifiée par les coordonnées et le temps t, à toutes les époques, on sera conduit à poser

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \ldots + \frac{dL}{dz_{n-1}}dz_{n-1} + \frac{dL}{dt}dt = 0;$$

de là résulte que la somme des travaux élémentaires des mêmes forces, c'est-à-dire

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \ldots + \frac{dL}{dz_{n-1}}dz_{n-1}\right),$$

s'exprime par $-\lambda\frac{dL}{dt}dt$. La somme des travaux élémentaires réels des forces de liaison ne peut donc être nulle en général, que si les dérivées partielles

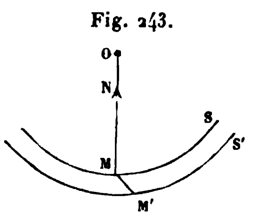
$$\frac{dL}{dt}, \frac{dL}{dt}, \ldots, \frac{dL_{k-1}}{dt}$$

s'annulent également, ce qu'on exprime en disant que *les liaisons doivent être indépendantes du temps*. On peut vérifier que cette condition se trouve remplie par les liaisons données comme exemples au n° 130; la vérification est immédiate pour les deux premiers exemples; elle serait un peu plus compliquée pour le troisième, c'est-à-dire dans le cas de deux surfaces solides, sans frottement, assujetties à rester en contact. Nous nous dispenserons de la faire. Mais il est parfaitement certain *a priori* qu'on peut l'effectuer; car, si l'on donnait les coordonnées des points des deux surfaces, on pourrait constater si elles sont ou non tangentes, et par conséquent la condition de leur contact doit être exprimable au moyen de ces coordonnées seulement.

Voici un exemple simple, dans lequel on voit bien la différence entre le calcul du travail d'une force de liaison pour un déplacement virtuel et pour un déplacement élémentaire effectif. Supposons un point M assujetti à glisser sans frotte-

ment sur une sphère, dont le centre O (*fig.* 243) reste fixe, pendant que le rayon $\overline{OM}$ croît avec le temps. Soient M et M′ les positions du point mobile aux époques t et $t+dt$, S et S′ les deux sphères correspondantes. Quand le point est en M, il se trouve soumis, par l'effet de la liaison, à une certaine force N normale à S et dirigée suivant le rayon MO, dans un sens ou dans l'autre. Le travail de cette force est bien nul quand on conçoit un déplacement virtuel sur la sphère S, c'est-à-dire un déplacement compatible avec la liaison telle qu'elle existe à l'époque t. Mais, à l'époque $t+dt$, le point mobile est obligé de se trouver sur la sphère S′, de rayon plus grand que $\overline{OM}$; il a donc parcouru un certain chemin en projection sur la force N, et par conséquent le travail élémentaire de cette force pendant le déplacement effectif ne peut pas être égal à zéro.

Fig. 243.



206. *Cas particulier du théorème des forces vives; principe de la conservation des forces vives.* — Lorsque les composantes des forces produisant du travail peuvent s'obtenir en prenant les dérivées partielles d'une même fonction T des coordonnées, et qu'on a en conséquence

$$X = \frac{dT}{dx}, \quad Y = \frac{dT}{dy}, \quad Z = \frac{dT}{dz}, \quad \ldots, \quad Z_{n-1} = \frac{dT}{dz_{n-1}},$$

la fonction T prend, comme au n° 109, le nom de *potentiel*, et l'on dit que les forces dérivent d'un potentiel. Dans ce cas l'équation des forces vives (n° 205) se met sous la forme

$$d\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = dT,$$

et l'intégration peut s'effectuer sans qu'on ait besoin de connaître les relations entre les diverses coordonnées variables qui entrent dans T. On a, en désignant par v_0 et T_0 les valeurs de v et T pour une première position du système,

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = T - T_0;$$

l'accroissement de la demi-somme des forces vives, entre deux positions, est donc égal à celui du potentiel quand on passe de la première position à la seconde. Si le potentiel n'a pas varié, la somme des forces vives aura dû également rester constante, quels que soient les chemins parcourus par les divers points du système, pour aller d'une position à l'autre. C'est ce qui constitue le principe de la *conservation* des forces vives.

L'existence de la fonction T, dont la différentielle totale exprime la somme des travaux élémentaires de toutes les forces, a lieu dans divers cas simples qu'il est bon de mentionner :

1° Pour un système soumis à la pesanteur (sans autre force capable de produire un travail). Le travail élémentaire des poids mg s'exprime par $\Sigma mg\,dz$ ou par $d\Sigma\, mgz$, l'axe des z étant supposé vertical et descendant. Donc ici

$$T = \Sigma mgz.$$

2° Pour un système de points soumis à des forces émanées de centres fixes et exprimables en fonction de la distance. Le travail élémentaire se représente (n° 109) par une somme de termes de la forme $\varphi(r)\,dr$, ce qui est encore la différentielle exacte d'une certaine fonction T des coordonnées.

3° Pour des points uniquement soumis à leurs actions mutuelles, lesquelles sont supposées fonctions des distances entre les points. Si $\varphi(r)$ exprime la force mutuelle exercée entre deux points, prise positivement quand elle est répulsive, la somme des travaux élémentaires des deux actions mutuelles est (n° 128) $\varphi(r)\,dr$. En réunissant tous les travaux analogues, on trouvera un résultat de même forme que dans le cas précédent.

207. *Usage du théorème des forces vives pour décider si l'équilibre est stable dans un cas assez général.* — Supposons le cas d'un système à liaisons pour lequel il existe un potentiel $T = f(x, y, z, \ldots)$, et mettons l'équation des forces vives sous la forme

$$(10)\quad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = f(x, y, z, \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots);$$

la fonction f renferme $3n$ variables, s'il y a n points matériels; mais, en supposant entre ces variables k équations de liaison indépendantes du temps, on peut concevoir les $3n$ coordonnées exprimées en fonction de $3n-k$ variables indépendantes.

D'un autre côté, supposons aussi qu'il existe une position du système, telle qu'en l'y mettant sans vitesse initiale il reste en équilibre sous l'action des forces X, Y, Z, ..., respectivement égales aux dérivées partielles $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}, \ldots$ de la fonction f. La condition nécessaire et suffisante de cet équilibre sera, conformément au théorème du travail virtuel (n° 131),

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \ldots = 0,$$

ou simplement $\delta f = 0$, pour un ensemble de déplacements virtuels compatibles avec les liaisons; cela signifie que, pour l'un quelconque des dérangements infiniment petits que le système peut prendre, eu égard aux liaisons, à partir de la position d'équilibre considérée, l'ensemble des termes du premier ordre dans l'accroissement du potentiel est égal à zéro; par conséquent, d'après la théorie connue des maxima et des minima d'une fonction de plusieurs variables, on est certain que les maxima et les minima du potentiel correspondent à autant de positions d'équilibre du système; mais il peut y en avoir d'autres, pour lesquelles l'ensemble des termes du premier ordre s'annulerait sans qu'on pût cependant affirmer que les termes du second ordre forment un total toujours négatif ou toujours positif, et jamais nul, comme il le faudrait dans le cas d'un maximum ou d'un minimum.

L'équilibre peut être *stable* ou *instable*. On dit par définition qu'il est stable lorsque, après avoir écarté le système de sa position d'équilibre, aussi peu qu'on le voudra, et lui avoir imprimé des vitesses également aussi petites qu'on le jugera convenable, on a la certitude que dans la suite du temps le système restera toujours très rapproché de la position d'équilibre qu'il avait d'abord. On attribue aussi à la stabilité d'autant plus *d'amplitude* qu'on peut donner des valeurs plus grandes à l'écart initial et aux vitesses initiales,

sans que le corps cesse d'osciller autour de la position d'équilibre d'où l'on est parti. Mais nous laisserons de côté cette question d'amplitude pour nous en tenir à la stabilité stricte. Nous nous bornerons donc à la considération des dérangements infiniment petits, de même que, pour décider si l'ordonnée d'une courbe ou d'une surface est maximum ou minimum, on se borne à la comparer aux ordonnées infiniment voisines.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Lorsque les forces agissant sur un système à liaisons sont tellement définies en fonction des coordonnées qu'il existe un potentiel, le système se trouve en équilibre stable toutes les fois qu'il est mis sans vitesse dans une position pour laquelle le potentiel devient un maximum.

Soient, en effet,

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \ldots$$

les valeurs particulières des coordonnées qui rendent la fonction f maximum, et auxquelles répond une position d'équilibre. Nous pouvons poser, quand le système se sera déplacé d'une manière quelconque,

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta, \quad z = c + \zeta, \quad \ldots,$$

les écarts ξ, η, ζ, ... étant tous nuls dans la position d'équilibre considérée. Il est évident que la connaissance de ces écarts entraîne celle des coordonnées $x, y, z, \ldots$ et par suite celle de $f(x, y, z, \ldots) - f(a, b, c, \ldots)$; donc on peut écrire, en nommant φ une nouvelle fonction, convenablement déterminée,

$$f(x, y, z, \ldots) = f(a, b, c, \ldots) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots).$$

La fonction φ, en vertu de sa définition même, tend vers o quand on diminue indéfiniment toutes ses variables; elle est aussi petite qu'on veut, en prenant celles-ci suffisamment petites, et même elle sera du second ordre par rapport à ξ, η, ζ, ..., puisque, par hypothèse, les termes du premier ordre s'annulent dans la différence $f(x, y, z, \ldots) - f(a, b, c, \ldots)$. De plus, pour que $f(a, b, c, \ldots)$ soit maximum, il faut que φ

reste constamment positive lorsque ses variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ prennent un système quelconque de valeurs, satisfaisant toujours (bien entendu) aux équations de liaison, avec cette seule restriction que chacune d'elles restera renfermée entre certaines limites de part et d'autre de la valeur o, mais aussi près de o qu'on le voudra; c'est la condition nécessaire et suffisante du maximum.

Maintenant appliquons le théorème des forces vives au mouvement que va prendre le corps après qu'on l'aura dérangé de sa position d'équilibre, et qu'on aura donné à chacun de ses points, dans la nouvelle position, une vitesse initiale. Nous aurons, en introduisant la fonction φ au lieu de f et faisant passer $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$ dans le second membre de l'équation (10),

$$(11)\quad \frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \varphi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots).$$

Nommons encore A la plus petite valeur que puisse prendre la fonction φ, lorsqu'une au moins de ses variables atteint l'une des limites au delà desquelles le signe de φ pourrait changer: A sera, d'après les propriétés caractéristiques d'un maximum, positif et différent de o. Disposons enfin des vitesses v_0 et du dérangement initial de manière qu'on ait

$$\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \varphi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots) < A,$$

ce qui est évidemment possible en prenant $v_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots$ suffisamment petits, puisque les deux termes qui composent le premier membre de cette inégalité ont tous deux pour limite zéro. Il résultera de là qu'aucune des variables de φ, supposées primitivement comprises dans les limites entre lesquelles φ reste toujours positive, ne pourra en sortir; car, si cela se produisait, il y aurait un instant auquel une ou plusieurs variables arriveraient à leurs valeurs limites et où φ aurait, en conséquence, une valeur supérieure ou tout au moins égale à A. Par suite, d'après l'équation (11), $\frac{1}{2}\Sigma m v^2$ devrait passer par une valeur négative, ce qui est impossible.

Ainsi donc, quand le système est placé sans vitesse dans une position d'équilibre pour laquelle le potentiel devient maximum, en le dérangeant suffisamment peu et lui imprimant des vitesses assez petites, on peut faire en sorte qu'il s'écarte aussi peu qu'on voudra de sa position d'équilibre. Comme c'est justement par ce caractère que nous avons défini l'équilibre stable, le théorème énoncé plus haut se trouve donc démontré.

208. *Autre mode de démonstration des quatre théorèmes généraux.* — Nous avons déduit ces théorèmes du principe de d'Alembert, afin de bien faire comprendre comment on peut s'en servir. Mais on aurait pu y arriver très simplement aussi par le procédé suivant.

Pour le premier théorème, on prendra comme point de départ les équations du mouvement de l'un de ses points (n° 104):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

les composantes X, Y, Z devant comprendre celles de toutes les forces réelles appliquées à la masse m, quelle que soit leur provenance. Faisant ensuite la sommation des équations analogues pour tous les points, on aura

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z,$$

et l'on remarquera que les forces intérieures, deux à deux égales et de sens contraires, disparaissent d'elles-mêmes dans les trois sommes des seconds membres. On retrouve donc, sans changement, les trois équations d'où nous avons déduit (n° 198) le théorème sur le mouvement du centre de gravité. La démonstration s'achèverait de la même manière.

Le deuxième et le troisième des théorèmes généraux ont été démontrés dans le cours de première année (n°s 106 et 107) pour le cas d'un seul point matériel. En considérant les projections sur un axe ou les moments par rapport à cet axe, qu'on peut prendre pour axe des x dans un système de

trois axes rectangulaires, on aura donc les équations

$$mv_x - mv_{0x} = \int_{t_0}^{t} F_x\, dt,$$

$$\mathfrak{M}_x mv - \mathfrak{M}_x mv_0 = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{M}_x F\, dt,$$

pourvu que F représente la résultante des forces qui agissent réellement sur la masse m. Si maintenant on fait la somme des équations analogues pour tous les points, les projections et les moments des forces intérieures se détruiront encore deux à deux, et l'on retrouvera l'expression algébrique ci-dessus donnée (n°s 199 et 200) des théorèmes dont il s'agit.

Quant au quatrième, le procédé est le même, mais avec cette différence que les forces intérieures ne disparaissent plus en général. Après avoir posé l'équation (n° 109)

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz),$$

on en déduit par une sommation étendue à tous les points

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \sum \int (X\, dx + Y\, dy + dz),$$

le second membre devant comprendre le travail de toutes les forces réelles, sauf les remarques à faire (n° 205) au sujet de celles dont les travaux sont toujours nuls.

209. *Extension des théorèmes généraux aux mouvements relatifs.* — Les théorèmes généraux se déduisent du principe de d'Alembert, et celui-ci, quand on y regarde de près, est une conséquence de ce fait primordial qu'il faut une force mj pour donner à un point matériel isolé l'accélération j, dans le sens et la direction de la force. Or cette relation entre l'accélération et sa cause est conservée dans le mouvement relatif, comme on l'a vu dans la dynamique du point matériel (n° 113), pourvu qu'on joigne aux forces réelles appliquées à chaque point deux forces fictives ou apparentes, savoir : 1° une force qu'on peut nommer (n° 193) *force d'inertie d'entraîne-*

ment, parce qu'elle est égale et contraire à celle qui donnerait au point son accélération d'entraînement; 2° la force dite *centrifuge composée.* Donc, en supposant ces forces appliquées à chaque point, outre les forces réelles, on sera en droit d'employer les théorèmes généraux de la Dynamique, dans un mouvement relatif comme dans un mouvement absolu.

Voici quelques remarques auxquelles donne lieu l'application de cet énoncé dans divers cas particuliers. 1° La force centrifuge composée est à chaque instant perpendiculaire au déplacement relatif du point sur lequel elle est censée agir; donc son travail relatif est constamment nul, et par conséquent cette force peut être laissée de côté quand on se sert du théorème des forces vives. 2° La même force s'annule quand le mouvement d'entraînement est de translation ou quand son point d'application est en repos relatif. 3° Les forces apparentes s'annulent toutes deux, et les théorèmes généraux s'appliquent aux mouvements relatifs sans introduction de termes dus à ces forces, quand les axes mobiles de comparaison sont animés d'une translation rectiligne et uniforme. Ces trois premières remarques avaient déjà été faites au n° 113. 4° Il faut bien prendre garde, dans le cas d'un système à liaisons, que le travail total des forces de liaison peut être nul dans le mouvement absolu sans l'être dans le mouvement relatif, et *vice versa.* La première alternative se présenterait si l'on avait, par exemple, un point assujetti à glisser sans frottement sur une courbe absolument fixe, parce que la réaction de la courbe serait normale à la trajectoire absolue sans l'être à la trajectoire relative; la seconde alternative aurait lieu, pour une raison analogue, si le point devait glisser sans frottement sur une courbe entraînée avec les axes mobiles. Cette remarque n'est pas du même ordre que les précédentes, puisqu'elle ne se rapporte pas aux forces fictives; mais elle n'en est pas moins importante.

On a souvent à considérer et nous allons maintenant étudier exclusivement le cas où le mouvement relatif est pris par rapport à des axes mobiles, de direction constante, dont l'origine se trouve toujours placée au centre de gravité du système. Voyons ce que deviennent les quatre théorèmes généraux, appliqués à ce mouvement relatif particulier.

Le mouvement d'entraînement étant ici un mouvement de translation, dans lequel chaque point décrirait une trajectoire égale et parallèle à celle du centre de gravité (n° 20), d'abord nous n'avons pas à nous occuper de la force centrifuge composée, qui est toujours nulle, et d'autre part la force d'inertie d'entraînement répondant à un point particulier, de masse m, sera le produit de m par l'accélération absolue J du centre de gravité à la même époque, cette accélération J étant prise en sens contraire; les trois composantes, suivant les axes coordonnés, de la première force fictive seront donc $-mJ_x$, $-mJ_y$, $-mJ_z$. Il s'agit maintenant de faire ressortir la valeur des termes qui répondent à l'introduction de ces forces dans les équations fournies par les quatre théorèmes généraux.

En ce qui concerne le premier, on voit que les composantes ΣX, ΣY, ΣZ de la résultante de translation des forces extérieures vont se changer en

$$(12) \qquad \Sigma X - J_x \Sigma m, \quad \Sigma Y - J_y \Sigma m, \quad \Sigma Z - J_z \Sigma m,$$

et ces trois quantités sont nulles en vertu du premier théorème général, appliqué au mouvement absolu du centre de gravité (n° 198). Ce point se meut donc, dans le mouvement relatif, comme s'il était sollicité par une force nulle, ce qu'on savait d'avance puisque le centre de gravité reste immobile dans le système de comparaison. Le premier théorème ne conduit donc ici à aucun résultat nouveau.

Dans le second théorème général, on considère les impulsions des forces projetées sur un axe. Quand on tient compte des forces apparentes, les sommes des impulsions élémentaires sont nulles en projection sur les trois axes coordonnés (et par conséquent sur un axe quelconque), car on les obtient en multipliant par dt les trois expressions (12). Donc les impulsions projetées sont également nulles pour tout intervalle de temps fini, et par conséquent le second théorème, appliqué au mouvement relatif dont il s'agit, nous apprend que la somme des projections des quantités de mouvement relatives sur un axe quelconque reste invariable pendant toute la durée du mouvement. Nous pouvons ajouter de plus et démontrer *a priori* que cette constante est nulle. En effet, si nous appe-

lons ξ, η, ζ les coordonnées d'un point relativement aux axes mobiles, celles du centre de gravité étant nulles, on aura toujours (n° 150)

$$\Sigma m\xi = 0, \quad \Sigma m\eta = 0, \quad \Sigma m\zeta = 0;$$

donc on a aussi, par la différentiation,

$$\sum m\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \sum m\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \sum m\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

ce qui prouve la vérité de notre assertion pour les axes coordonnés et, par conséquent, pour un axe arbitraire, car on aurait pu le choisir pour l'un des axes coordonnés. La même proposition est encore une conséquence immédiate du dernier théorème établi au n° 198; le centre de gravité se trouvant en repos relatif, la résultante de translation des quantités de mouvement relatives est nulle, et par conséquent la somme de leurs projections sur un axe quelconque s'annule également. En résumé, on voit encore que le second théorème général n'apprend rien de nouveau sur le mouvement relatif dont nous nous occupons présentement.

Lorsqu'on applique le troisième théorème général (n° 200), il faut compter, dans le second membre de l'équation se rapportant à un axe quelconque, la somme des moments par rapport à cet axe des forces d'inertie d'entraînement $-mJ$. Or ces forces sont parallèles et proportionnelles aux masses, puisque J ne change pas d'un point à l'autre; donc la somme de leurs moments sera la même que le moment d'une force $-J\Sigma m$, égale à leur somme et appliquée au centre de gravité (n° 150). Il n'en résulte rien de bien remarquable quand on prend une droite quelconque pour axe des moments; mais, si cette droite passe au centre de gravité, on voit que les forces apparentes ont une somme de moments nulle, qu'il en est par conséquent de même pour l'intégrale de la somme des moments de leurs impulsions élémentaires pendant tout intervalle de temps fini, et enfin que le troisième théorème général s'applique alors dans le mouvement relatif sans avoir à prendre en considération d'autres forces que celles qui agissent réellement.

Dans le cas où ces dernières forces, composées comme elles

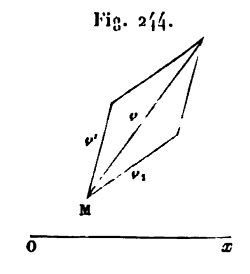
pourraient l'être si elles agissaient sur un solide invariable en équilibre, donneraient sans cesse une résultante passant par le centre de gravité, le principe des aires deviendrait en conséquence applicable au mouvement relatif (nº **203**), et il y aurait notamment un plan du maximum des aires, invariable pendant toute la durée du mouvement. C'est ce qui a lieu pour notre système planétaire, composé du Soleil et des planètes, car les forces extérieures provenant de corps très éloignés (les étoiles) peuvent être considérées comme parallèles et proportionnelles aux masses, ainsi qu'on l'a déjà dit (nº **114**) pour celles que supportent en particulier les points de la Terre; la résultante de ces forces extérieures passe donc au centre de gravité du système. Il y a donc un plan invariable dans le mouvement relatif du Soleil et des planètes autour de leur centre de gravité commun; Laplace a proposé de le choisir pour plan fixe dans l'étude du mouvement de chacun de ces astres en particulier, et on l'a nommé, pour cette raison, *plan invariable de Laplace*.

On a vu (nº **153**) que le travail total produit par les actions de la gravité sur un système matériel quelconque est égal à celui que produirait le poids total agissant au centre de gravité, et nous avons remarqué que la proposition s'étend immédiatement à un ensemble quelconque de forces parallèles et proportionnelles aux masses. Donc les forces d'inertie d'entraînement $-mJ$ font un travail total nul dans le mouvement relatif, puisque leur somme $-J\Sigma m$ agirait sur le centre de gravité, qui reste fixe dans ce mouvement. Donc le théorème des forces vives s'applique aussi dans le mouvement du système par rapport à des axes de direction constante menés par son centre de gravité, sans avoir à tenir compte d'aucun travail autre que celui des forces réelles.

210. *Décomposition particulière de la somme des moments des quantités de mouvement, des aires décrites en projection sur un plan et de la force vive d'un système.* — Soient m la masse d'un point M (*fig.* 244) faisant partie du système, et v sa vitesse absolue, qu'on peut regarder comme la résultante de la vitesse v_1 du centre de gravité et de la vitesse v' du mouvement relatif qu'on vient de considérer tout à l'heure par

rapport à des axes possédant constamment la vitesse v_1. La quantité de mouvement mv peut de même se décomposer en mv_1 et mv', et la substitution de ces deux composantes à mv ne changera rien à la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à tout axe Ox (n° 103). Or toutes les quantités de mouvement mv_1, parallèles et proportionnelles aux masses, se composent (toujours sans altérer la somme des moments) en une résultante $v_1 \Sigma m$ passant au centre de gravité; donc :

Fig. 244.



La somme des moments des quantités de mouvement d'un système matériel relativement à un axe quelconque est formée de deux parties : 1° le moment de la quantité de mouvement qu'aurait la masse entière condensée au centre de gravité; 2° la somme des moments des quantités de mouvement répondant aux vitesses du mouvement par rapport au centre de gravité.

Quand on multiplie par dt la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe, on obtient (n° 203) la somme des produits des masses par les éléments d'aires décrites en projection sur un plan perpendiculaire; donc aussi :

La somme des produits des masses par les aires élémentaires décrites en projection sur un plan quelconque, par des rayons vecteurs joignant tous les points à une origine commune, est formée de deux parties : 1° le produit analogue calculé pour la masse totale condensée au centre de gravité; 2° la somme des produits semblables, calculée dans le mouvement par rapport au centre de gravité.

Enfin, il y a une propriété toute semblable pour les forces vives. Le triangle des trois vitesses v, v_1, v' (*fig.* 244) donne la relation

$$v^2 = v_1^2 + v'^2 + 2 v_1 v' \cos(v_1, v'),$$

d'où l'on tire, en faisant pour tous les points la somme des équations pareilles respectivement multipliées par la masse m de chaque point,

$$\Sigma m v^2 = v_1^2 \Sigma m + \Sigma m v'^2 + 2 v_1 \Sigma m v' \cos(v_1, v').$$

Or, d'après une remarque faite plus haut (n° 209), la dernière somme est nulle, car elle représente la somme des quantités de mouvement relatives en projection sur une parallèle à v_1; donc on a simplement

$$\Sigma m v^2 = v_1^2 \Sigma m + \Sigma m v'^2,$$

ce qu'on énonce en disant :

La force vive d'un système est égale à celle qu'aurait sa masse entière condensée au centre de gravité, augmentée de la force vive dans le mouvement par rapport au centre de gravité.

Ici se termine l'exposé des principes ou théorèmes généraux de la dynamique des systèmes; nous allons maintenant aborder, dans le § III de ce Chapitre et dans le Chapitre suivant, une suite d'applications particulières, dont quelques-unes auront cependant encore beaucoup de généralité.

§ III. — Théorie du choc direct de deux solides de révolution.

211. *Recherche des vitesses finales.* — Nous allons faire la théorie du choc de deux solides, dans les conditions les plus simples qu'on puisse imaginer. Nous supposerons deux sphères homogènes, ou tout au moins deux solides de révolution autour d'un axe Ox (*fig.* 245), dont chacun possède, à un instant donné, un mouvement de translation parallèle à cet axe. Soient v et v' les vitesses des deux corps à l'instant où ils arrivent au contact et où le choc va commencer; pour fixer les idées, admettons que ces deux vitesses sont dans le sens Ox et qu'on a $v > v'$. Lorsque les corps commencent à se toucher, ils tendent à entrer l'un dans l'autre, et alors il naît du rapprochement des molécules une série de forces mutuelles douées d'une grande intensité; la résultante pour chacun des deux corps est évidemment dirigée suivant Ox, à cause de la symétrie. La force supportée par le corps G retarde son mouvement; la force égale et contraire (n° 95) qui agit sur G′ augmente au contraire sa vitesse. Les choses continuent à se passer de la même manière, tant que la vitesse de G reste su-

périeure à celle de G′; donc il viendra un instant où les deux vitesses auront pris une même valeur. Tout ce phénomène se passe dans un temps très court, en raison de la grande intensité des actions mutuelles développées par le choc; on peut, en conséquence, négliger l'impulsion des forces extérieures, et, par suite, le second théorème général (n° 199) nous apprend que la somme des quantités de mouvement des deux corps ne varie pas pendant ce même temps. Si donc on nomme m et m' les deux masses et u la vitesse commune, on aura

$$mv + m'v' = (m + m')u$$

ou bien

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}. \tag{1}$$

Il est à remarquer que cette vitesse u est celle du centre de gravité du système des deux masses pendant tout l'intervalle de temps qu'on vient de considérer; cela est évident pour l'instant final, puisque tous les points ont la vitesse u et que le centre de gravité doit alors se déplacer avec une vitesse égale ; d'un autre côté, la vitesse du centre de gravité ne peut pas varier dans un intervalle de temps pendant lequel on suppose les forces extérieures négligeables (n° 198).

A partir de l'instant où les deux corps ont pris la vitesse commune u, on peut considérer deux cas essentiellement distincts : 1° la vitesse étant devenue la même, la compression (réduction de volume) des deux corps l'un par l'autre est arrivée à sa valeur maximum; cette compression subsiste dans la suite du temps, et les corps vont continuer à se mouvoir ensemble comme un corps unique animé de la vitesse u. Ce cas est celui de corps absolument dépourvus d'élasticité, puisque la déformation d'abord produite n'est pas suivie d'un retour à la forme primitive; on voit que le choc est alors terminé en même temps que la période de compression; 2° la période de compression sera supposée suivie d'une période de dilatation égale en durée, pendant laquelle chaque corps reprendra, en ordre inverse et symétriquement, la même série de formes que dans la première période; les forces mutuelles repasseront aussi par les mêmes grandeurs. C'est le cas de corps parfaitement élastiques. Ces deux cas indi-

quent pour ainsi dire des limites entre lesquelles se placent les corps de la nature, chez lesquels on ne trouve jamais ni l'absence complète ni la perfection absolue de l'élasticité.

Dans le premier cas, l'équation (1) donne la vitesse finale des deux corps après le choc. Dans le second, la vitesse de chaque corps continue à se modifier après avoir passé par la valeur u; nommons v_1 et v'_1 les valeurs finales. Puisque, en vertu de l'élasticité, l'action mutuelle reprend symétriquement les mêmes intensités dans la seconde période que dans la première, la perte de vitesse du premier corps ou le gain du second doivent être les mêmes dans les deux périodes; cela résulterait immédiatement du second théorème général (nº **199**) appliqué séparément à chacun des deux corps. On a donc

$$v - u = u - v_1, \quad u - v' = v'_1 - u$$

ou bien

$$(2) \qquad v_1 = 2u - v, \quad v'_1 = 2u - v',$$

ce qui fait connaître les deux vitesses finales v_1, v'_1, puisque u est déjà connu par l'équation (1). On voit que u est la moyenne arithmétique des vitesses initiale et finale de chaque corps, puisque les équations (2) donnent

$$u = \frac{1}{2}(v + v_1) = \frac{1}{2}(v' + v'_1);$$

on en tire également, par soustraction membre à membre,

$$v - v' = v'_1 - v_1,$$

ce qui montre que les vitesses relatives initiale et finale des deux corps sont égales et de sens contraires. On peut encore éliminer u pour avoir les deux vitesses finales en fonction des vitesses initiales, et l'on trouve ainsi

$$(3) \left\{ \begin{aligned} v_1 &= 2u - v = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v = \frac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'}, \\ v'_1 &= 2u - v' = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'}. \end{aligned} \right.$$

Appliquons ces dernières formules en supposant d'abord

$m' = \infty$, $v' = 0$; on obtient alors $v_1 = -v$ et $v'_1 = 0$. C'est ce qui arrive dans le choc direct d'un corps élastique contre un obstacle fixe; ce corps revient en sens contraire avec la vitesse qu'il avait en arrivant. Prenons encore $m = m'$, $v' = 0$; alors les formules donnent $v_1 = 0$, $v'_1 = v$; il y a échange de vitesse entre les deux corps élastiques.

212. *Durée du choc et intensité de l'action mutuelle.* — Pour faire, non pas un calcul rigoureux, mais une évaluation plus ou moins grossière, pouvant donner seulement une idée de l'ordre de grandeur de ces quantités, nous admettrons que l'action mutuelle des deux corps est une force d'intensité constante F. Soit θ la durée de la première période du choc, au bout de laquelle les vitesses ont pris la valeur commune u; ce sera le temps total du phénomène ou seulement sa moitié, suivant qu'il s'agira de corps sans élasticité ou parfaitement élastiques. Le théorème des quantités de mouvement projetées (n° 199), appliqué au corps m, donne d'abord

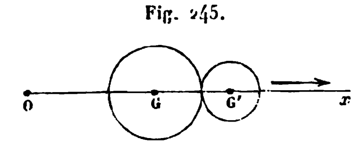
$$m(u - v) = -F\theta$$

ou bien, en substituant la valeur (1) de u,

$$(4) \qquad \frac{mm'}{m + m'}(v - v') = F\theta.$$

Condensons maintenant chaque corps en son centre de gravité G ou G′ (*fig.* 245), en y transportant simultanément

Fig. 245.



la force F, conformément au premier théorème général (n° 198); appliquons ensuite le théorème des forces vives (n° 109) à chacun de ces deux points matériels, en observant que les forces ordinaires, telles que la pesanteur, sont négligeables devant F. Désignons par x et x' les distances de G et G′ à l'origine fixe O, pour l'instant final de la durée θ, et

par x_0, x'_0 les valeurs des mêmes distances à l'instant initial. Nous aurons

$$\frac{1}{2} m\,(u^2 - v^2) = -\mathrm{F}(x - x_0),$$

$$\frac{1}{2} m'(u^2 - v'^2) = \mathrm{F}(x' - x'_0);$$

d'où résulte, par addition membre à membre,

$$\frac{1}{2}(m + m)u^2 - \frac{1}{2}(mv^2 + m'v'^2) = \mathrm{F}[(x' - x) - (x'_0 - x_0)].$$

La quantité entre crochets n'est autre que la variation de la distance GG'; cette variation est un effet de la compression des deux corps et sera d'autant moindre que les corps seront plus durs. En désignant par δ le rapprochement des deux points et mettant pour u sa valeur (1) dans le premier membre de l'équation précédente, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{(mv + m'v')^2}{m + m'} - \frac{1}{2}(mv^2 + m'v'^2) = -\mathrm{F}\delta$$

ou, toute réduction faite,

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{mm'(v - v')^2}{m + m'} = \mathrm{F}\delta.$$

Les valeurs de F et de θ se tirent bien facilement des équations (4) et (5); on trouve

$$(6) \qquad \mathrm{F} = \frac{mm'(v - v')^2}{2\delta(m + m')}, \quad \theta = \frac{2\delta}{v - v'}.$$

On aurait pu arriver plus rapidement au but par l'emploi des formules du mouvement uniformément varié (n° 6). Les points G et G', de masses m et m', ont suivant Ox des accélérations constantes $-\frac{\mathrm{F}}{m}$ et $\frac{\mathrm{F}}{m'}$, sous l'action de la force constante F; leur rapprochement s'opère avec une accélération relative constante égale à $-\mathrm{F}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$. Ce rapprochement a été δ pendant le temps θ; la vitesse relative est

$v - v'$ à l'instant initial et zéro à l'instant final, ce qui donne une moyenne $\frac{1}{2}(v - v')$. Donc on a d'abord

$$\delta = \frac{1}{2}(v - v')\theta.$$

L'application au même mouvement relatif de l'équation entre la variation du carré de la vitesse et l'espace parcouru donne ensuite

$$(v - v')^2 = 2F\delta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

On retrouverait ainsi les deux équations (6).

Soient, par exemple,

$$mg = 9^{kg}, \quad m'g = 1^{kg},$$
$$v - v' = \sqrt{2g} = 4^m,429 \text{ par seconde}, \quad \delta = 0^m,001.$$

On trouve alors

$$F = 900^{kg}, \quad \theta = 0'',00045.$$

On voit dans cet exemple que le temps est très court et la force assez considérable, quoique les deux masses aient d'assez petites valeurs.

213. *Perte de force vive dans le choc.* — Pendant la durée du choc (ou pendant sa première moitié seulement, s'il s'agit de corps parfaitement élastiques), il y a compression et par suite rapprochement des molécules, malgré les forces répulsives qui tendent à les éloigner. Il y a donc un travail négatif produit par les forces intérieures des deux corps (n° 128), et, comme les forces extérieures sont censées négligeables, il en résulte une diminution de force vive. La valeur de la différence est

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2,$$

soit, comme on l'a déjà constaté (n° 212),

$$(7) \qquad \frac{mm'(v - v')^2}{m + m'},$$

quantité dont la moitié représente, en valeur absolue, le travail des forces intérieures pendant la période de compression.

L'expression (7) peut se remplacer par une autre. En effet, u étant (n° 211) la vitesse constante du centre de gravité des deux masses m et m', les forces vives initiale et finale ont pour valeurs respectives, d'après le dernier théorème du n° 210,

$$(m+m')u^2+m(v-u)^2+m'(v'-u)^2 \text{ et } (m+m')u^2;$$

donc la perte est égale à

$$(8) \qquad m(v-u)^2+m'(v'-u)^2,$$

c'est-à-dire que la perte de force vive est égale à la somme des forces vives dues aux vitesses gagnées ou perdues. Cet énoncé, généralisé comme on le verra bientôt, constitue le *théorème de Carnot*.

Lorsque les corps sont parfaitement élastiques, suivant la définition donnée plus haut (n° 211), la période de compression est suivie d'une période tout à fait symétrique de dilatation, pendant laquelle les forces intérieures produisent un travail égal et de signe contraire à celui de la première période. La somme des travaux élémentaires des deux actions mutuelles s'exprime en effet (n° 128) par $f\,dr$, en nommant f la force et r la distance des points d'application; et il résulte de la symétrie supposée que f repasse par les mêmes valeurs dans les deux périodes, pendant que dr prend des valeurs égales et de signe contraire. Les éléments de l'intégrale $\int f\,dr$ se détruisent donc deux à deux pendant l'ensemble des deux périodes, et il en est de même pour la somme $\Sigma\int f\,dr$ qui exprime le travail total des forces intérieures. Il ne doit donc y avoir aucune perte de force vive entre le commencement et la fin du choc de deux corps parfaitement élastiques; et en effet l'expression algébrique de cette perte

$$mv^2+m'v'^2-mv_1^2-m'v_1'^2$$

peut d'abord s'écrire

$$m(v-v_1)(v+v_1)+m'(v'-v'_1)(v'+v'_1).$$

Soit, en substituant les valeurs de v_1 et v'_1 fournies par les équations (2) du n° **211**,

$$4u[m(v-u)+m'(v'-u)],$$

quantité dont le facteur entre crochets est nul en vertu de l'équation (1), qui donne la valeur de u.

Mais l'hypothèse de corps parfaitement élastiques ne se trouve jamais complètement réalisée, et cette reconstitution de la force vive, telle qu'on vient de l'indiquer, n'existe pas effectivement dans la plupart des cas. D'une part, le retour à la forme primitive peut être incomplet, ce qui laisserait subsister une partie du travail négatif produit dans la première période; d'autre part, quand les molécules ont été une fois écartées des positions relatives qu'elles avaient d'abord, elles n'y reviennent pas toutes à la fois ou elles y reviennent avec une certaine vitesse acquise, et il se produit alors un mouvement vibratoire dont la demi-force vive représente, au moins en partie, le travail positif de la seconde période. Dans ce deuxième cas, la force vive possédée par l'ensemble des deux corps pourrait être aussi grande à la fin qu'au commencement du choc; mais la partie de la force vive primitive qui aurait été transformée en mouvement vibratoire ne contribuerait plus au déplacement des deux corps et serait, pour ainsi dire, passé à l'état latent. On devrait donc, à ce point de vue, la regarder comme tout aussi bien perdue que si elle avait été annulée, au lieu de changer simplement de forme.

La production plus ou moins marquée de mouvements vibratoires fait concevoir pourquoi des corps doués d'une très grande élasticité se comportent parfois dans le choc comme s'ils en étaient au contraire presque complètement dépourvus. Par exemple, quand on laisse tomber une boule de caoutchouc sur un plan horizontal dur et bien uni, elle rebondit à une hauteur qui n'est pas très inférieure à la hauteur de chute, tandis qu'un parallélépipède rectangle formé

de la même matière rebondirait très peu, quoique sa substance possède les mêmes qualités physiques. Cela tient à ce que la force vive acquise pendant la chute se transforme beaucoup plus en force vive vibratoire dans le second cas que dans le premier.

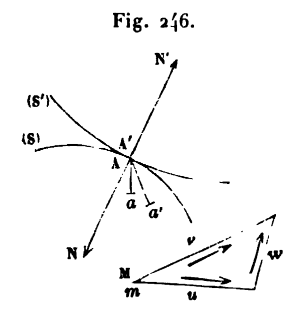
214. *Application au battage des pieux.* — On sait que certaines constructions reposent sur des pieux enfoncés dans le sol, et que l'enfoncement s'opère au moyen d'un corps pesant nommé *mouton*, qu'on laisse retomber sur le pieu, après l'avoir élevé à une certaine hauteur. Soient m la masse du mouton, v sa vitesse à l'instant où le choc va se produire, m' la masse du pieu. La force vive initiale du mouton était mv^2; la portion perdue dans le choc est, suivant la formule (7), $\frac{mm'v^2}{m+m'}$ ou la fraction $\frac{m'}{m+m'}$ de la force vive antérieurement donnée au mouton, par suite du travail de la pesanteur. Cette partie ne sert qu'à produire la déformation des deux corps ou des vibrations inutiles, tandis que le surplus $\frac{m^2v^2}{m+m'}$, servira ultérieurement à l'enfoncement du pieu. On a donc intérêt, pour économiser autant que possible le travail moteur dépensé (qui est $\frac{1}{2}mv^2$ à chaque coup de mouton), à rendre petite la fraction $\frac{m'}{m+m'}$, ce qui se fait en donnant une valeur suffisamment grande à la masse m du mouton, comparativement à celle du pieu. Si l'on emploie toujours le même travail moteur pour élever le mouton, il vaudra donc mieux se servir d'un mouton lourd élevé à une petite hauteur, que d'un mouton léger qu'on laisserait retomber de très haut.

215. *Théorème de Carnot.* — Ce théorème donne la généralisation du résultat précédemment obtenu et exprimé par la formule (8) du n° 213. Supposons qu'il se produise un choc entre deux corps solides ou, plus généralement, entre deux systèmes à liaisons, dans lesquels les liaisons seront du genre de celles qu'on a données comme exemples au n° 130, de

telle sorte que les forces de liaisons feront toujours des travaux ayant une somme nulle dans tous les déplacements compatibles avec ces liaisons, et notamment dans les déplacements réels.

Soient (S) et (S′) ces deux systèmes, qui seront supposés se choquer par la rencontre de deux surfaces solides. Il se développe alors au point de contact deux forces de percussion mutuelles, qu'on doit regarder comme normales aux surfaces en contact, parce que l'hypothèse ci-dessus admise sur la nature des liaisons exclut la possibilité d'une réaction tangentielle ou d'un frottement. Nommons N et N′ ces forces mutuelles respectivement appliquées à (S) et (S′), A et A′ leurs points d'application (*fig.* 246), qui se trouvent en coïncidence pendant le choc; soient $\overline{Aa} = \delta n$, $\overline{A'a'} = \delta n'$ les déplacements virtuels, compatibles avec les liaisons, qu'on imagine pour ces points, et $\beta = a\text{AN}$, $\beta' = a'\text{A}'\text{N}$ les angles de ces déplacements avec la normale.

Fig. 246.



Désignons encore par

m la masse d'un point quelconque M du système (S);
v sa vitesse initiale au commencement du choc;
u sa vitesse à la fin de la première période quand la compression atteint son maximum;
w la vitesse perdue, qui composée avec u donnerait v;
δs le déplacement virtuel attribué au point M en particulier dans un ensemble de déplacements compatibles avec les liaisons.

Nous emploierons les mêmes lettres avec un accent pour désigner les quantités analogues dans le système (S′).

Cela posé, appliquons au système (S) le théorème de d'Alembert modifié pour le cas des forces instantanées ou percussions (n° 195). En écrivant que, dans un déplacement compatible avec les liaisons et d'ailleurs quelconque, la somme des travaux virtuels des impulsions dues aux percussions

et des quantités de mouvement perdues est égale à zéro, il viendra

$$\Sigma m w \,\delta s \cos(w, \delta s) + \delta n \cos\beta \int_0^\theta \mathrm{N}\, dt = 0,$$

les impulsions devant être calculées pendant la durée θ de la première période du choc. On n'a d'ailleurs fait entrer dans l'équation précédente, comme force directement appliquée, que la percussion N; on sait en effet que l'impulsion des autres forces est négligeable pendant le temps très court θ. Un calcul tout semblable fait pour (S') donnera, eu égard à $\mathrm{N} = \mathrm{N}'$ (n° 95),

$$\Sigma m' w' \,\delta s' \cos(w', \delta s') - \delta n' \cos\beta' \int_0^\theta \mathrm{N}\, dt = 0;$$

puis on aura, en ajoutant ces équations membre à membre et convenant, pour abréger l'écriture, que les sommes Σ s'étendront désormais aux deux systèmes (S) et (S') pris dans leur ensemble,

$$\Sigma m w \,\delta s \cos(w, \delta s) + (\delta n \cos\beta - \delta n' \cos\beta') \int_0^\theta \mathrm{N}\, dt = 0.$$

Au lieu de prendre un déplacement virtuel quelconque, parmi tous ceux que les liaisons permettent, on a le droit de choisir le déplacement réel qui s'effectue dans le premier élément de temps dt succédant au choc; il est en effet compatible avec les liaisons (n° 205), et l'on sait (n° 195) que le même système de déplacements virtuels est admissible pendant toute la durée θ. On fera donc d'abord $\delta s = u\, dt$; puis on remarquera que, la période de compression se terminant avec le temps θ, les vitesses de A et A' doivent avoir la même projection sur la normale, d'où résulte, pour l'instant considéré, l'égalité

$$\delta n \cos\beta = \delta n' \cos\beta',$$

sans quoi les surfaces continueraient à se comprimer ou auraient dépassé le maximum de compression. Par suite, la dernière équation devient, après réduction et suppression du facteur commun dt,

$$\Sigma m u w \cos(w, u) = 0. \tag{9}$$

On a maintenant, par la considération du triangle des vitesses,

$$v^2 = u^2 + w^2 + 2uw\cos(w, u);$$

multipliant cette équation par m et faisant la somme des équations semblables pour tous les points des deux systèmes, il vient, eu égard à l'équation (9),

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mu^2 + \Sigma mw^2$$

ou encore

$$(10) \qquad \Sigma mv^2 - \Sigma mu^2 = \Sigma mw^2.$$

Le premier membre de l'équation (10) exprime la perte de force vive pendant la première partie du choc, perte qui reste sans compensation si la seconde partie n'existe pas, soit en raison de l'absence d'élasticité dans les corps, soit parce que le travail de l'élasticité pendant cette seconde partie se transforme uniquement en mouvements vibratoires. On peut dire alors que

La perte de force vive est égale à la somme des forces vives répondant aux vitesses perdues.

Les actions moléculaires font un travail correspondant égal à $-\frac{1}{2}\Sigma mw^2$, qu'on peut considérer comme perdu, en ce sens qu'il n'a servi qu'à déformer les corps du système pendant le choc, et ne leur a pas donné une force vive utilisable dans leur mouvement ultérieur.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DYNAMIQUE SPÉCIALE DES SOLIDES.

§ I. — Théorie des moments d'inertie.

216. *Définitions; formules fondamentales.* — Dans l'étude du mouvement des solides libres ou soumis à des liaisons, on rencontre souvent une quantité à laquelle on a donné le nom de *moment d'inertie,* et d'autres quantités qui en dérivent. Nous allons tout d'abord nous occuper de ces quantités; ce sera une digression en dehors de notre sujet principal.

On appelle moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe la somme des produits de chacune de ses masses élémentaires par le carré de sa distance à l'axe. En prenant la racine carrée du quotient de ce moment d'inertie divisé par la masse totale, on obtient ce qu'on nomme le *rayon de giration* du solide relativement au même axe. Si donc on désigne par

m une masse élémentaire du corps;
r sa distance à un axe particulier;
I le moment d'inertie du corps relativement à cet axe;
k le rayon de giration correspondant;

on aura, par définition,

$$\mathrm{I} = \Sigma m r^2, \quad k^2 = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m},$$

les sommations indiquées par le signe Σ devant s'étendre à tous les points matériels du corps.

Pour les corps formant un volume continu, le calcul d'un moment d'inertie ou d'un rayon de giration se ramènerait à la recherche d'intégrales triples. Imaginons qu'on prenne l'axe du moment d'inertie pour axe des z, dans un système de

coordonnées rectangulaires. Soit ρ la densité du corps autour du point ayant pour coordonnées x, y, z. Si l'on décompose le volume total en éléments $dx\,dy\,dz$, l'un de ces éléments aura pour masse $\rho\,dx\,dy\,dz$ et x^2+y^2 pour carré de sa distance à l'axe; donc

$$I = \int\int\int \rho(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad k^2 = \frac{\int\int\int \rho(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz},$$

les intégrales étant prises dans l'étendue complète du volume. Dans le cas particulier d'un volume homogène, ρ est constant et peut sortir des signes d'intégration; alors on a

$$I = \rho\int\int\int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad k^2 = \frac{\int\int\int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int dx\,dy\,dz}.$$

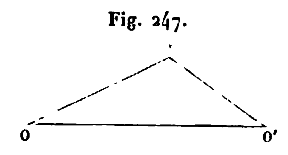
On voit que dans ce dernier cas le rayon de giration devient indépendant de la densité. La quantité

$$\int\int\int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

peut être considérée comme le moment d'inertie du volume géométrique occupé par le corps : c'est la somme des produits de chaque volume élémentaire par le carré de sa distance à un axe.

217. *Loi de variation des moments d'inertie d'un même corps relativement à une série d'axes parallèles.* — Soient deux axes parallèles O, O′ (*fig.* 247), tous deux perpendiculaires au plan de la figure, dont l'un, O par exemple, contient le centre de gravité du corps. Soit M la projection d'un point du corps sur un plan perpendiculaire aux axes; sa distance à l'axe O sera

Fig. 247.



$\overline{OM} = r$, et $\overline{O'M} = r'$ sera de même sa distance à l'axe O′. Nommons encore I et I′ les deux moments d'inertie relativement à ces axes et a leur distance $\overline{OO'}$. On aura, dans le triangle OO′M,

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos MOO';$$

multipliant cette équation par la masse m du point M et sommant les équations semblables pour tous les points, on trouve

$$I' = I + a^2 \Sigma m - 2a \Sigma mr \cos MOO'.$$

Or $\Sigma mr \cos MOO'$ exprime la somme des produits des masses par leurs distances respectives au plan mené par l'axe O, perpendiculairement à OO'; c'est donc zéro, puisque ce plan contient le centre de gravité (n° **150**). Donc

$$I' = I + a^2 \Sigma m,$$

ce qui s'énonce en disant :

Le moment d'inertie d'un corps relativement à un axe est égal au moment d'inertie relativement à l'axe parallèle mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse entière par le carré de la distance des deux axes.

Ainsi donc, parmi tous les axes parallèles, celui qui contient le centre de gravité est celui qui donne lieu au plus petit moment d'inertie; toutes les génératrices d'un cylindre circulaire décrit autour de cet axe donneraient lieu à des moments d'inertie égaux, dont la valeur commune résulte immédiatement de l'équation précédente.

En divisant cette formule par Σm et nommant k et k' les rayons de giration relatifs aux deux axes O et O', on aurait

$$k'^2 = k^2 + a^2,$$

c'est-à-dire que

Le carré du rayon de giration d'un corps relativement à un axe est égal au carré du rayon de giration du même corps relativement à l'axe parallèle passant au centre de gravité, augmenté du carré de la distance des deux axes.

218. *Loi de variation des moments d'inertie d'un corps relativement à une série d'axes concourants; ellipsoïde d'inertie.* — Soient Ox, Oy, Oz (*fig.* 248) un système d'axes coordonnés rectangulaires, dont l'origine est prise au point de concours de tous les axes; soient encore Ou l'un de ces axes, défini par les angles α, β, γ qu'il fait avec Ox, Oy, Oz; M un

point du corps, répondant aux coordonnées x, y, z et possédant la masse m. La perpendiculaire $\overline{MP}$ abaissée de M sur Ou est donnée par l'équation

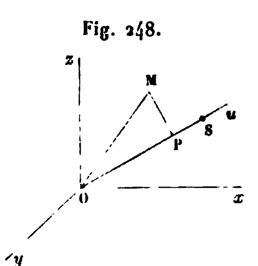


Fig. 248.

$$\overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OP}^2;$$

or on a

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et, d'autre part, $\overline{OP}$ est la projection de $\overline{OM}$ sur Ou, ou celle du contour formé par les coordonnées x, y, z, d'où résulte

$$\overline{OP} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Donc

$$\overline{MP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

ou bien, vu l'égalité $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ &\quad - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \\ &= (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma \\ &\quad - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Multiplions cette équation par m et faisons la somme des équations semblables pour tous les points du corps; le résultat $\Sigma m\overline{MP}^2$ sera le moment d'inertie relativement à l'axe Ou. En le désignant par I et définissant six constantes A, B, C, D, E, F par les relations

$$\begin{aligned}&A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2), \\ &D = \Sigma myz, \qquad\quad E = \Sigma mzx, \qquad\quad F = \Sigma mxy,\end{aligned}$$

on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} I &= A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \\ &\quad - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}\right.$$

A, B, C ne sont autre chose que les moments d'inertie du corps considéré, relativement aux axes Ox, Oy, Oz; quant

aux sommes de produits représentées par D, E, F, elles n'ont pas reçu de nom particulier.

Lorsqu'un corps est donné et qu'on a calculé les six sommes A, B, C, D, E, F, relatives à trois axes rectangulaires déterminés, l'équation (1) fait connaître le moment d'inertie I relatif à un autre axe quelconque, issu de la même origine et défini par les angles α, β, γ; I est exprimé en fonction de ces angles. Cette équation contient donc en elle-même la loi de variation de I relativement à une série d'axes concourants; mais la loi peut être rendue plus facilement saisissable par le procédé géométrique suivant, dû à Poinsot. Représentons le moment d'inertie relatif à un axe par une certaine longueur portée à partir de O suivant l'axe, et convenons en conséquence de prendre $\overline{OS} = \frac{1}{\sqrt{I}}$. Chaque moment d'inertie I pouvant se calculer par l'équation (1), la surface lieu géométrique du point S en est une conséquence, et réciproquement la connaissance de cette surface remplacerait au besoin l'équation (1), puisqu'on pourrait en déduire la longueur $\overline{OS}$ et, par suite, I pour un axe quelconque mené par le point O. Or, si nous appelons ξ, η, ζ les coordonnées de S, nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\overline{OS}} = \xi\sqrt{I}, \quad \cos\beta = \eta\sqrt{I}, \quad \cos\gamma = \zeta\sqrt{I},$$

valeurs qui, portées dans l'équation (1), donnent, après suppression du facteur I,

$$(2) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1.$$

C'est l'équation de la surface cherchée. On voit que c'est une surface du second degré à centre, ayant son centre en O; de plus, c'est un ellipsoïde, parce que tous les rayons vecteurs $\overline{OS}$ ont, d'après leur définition même, une valeur finie ([1]).

([1]) Il faut cependant excepter le cas singulier où tous les points du corps seraient sur une même droite passant en O. En prenant cette droite pour axe des z, on aurait

$$C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0, \quad A = B,$$

et l'équation (2) deviendrait celle d'un cylindre circulaire ayant l'axe des z

Cet ellipsoïde se nomme *ellipsoïde d'inertie* pour le point O; quand ce point coïncide avec le centre de gravité, on emploie la dénomination particulière d'*ellipsoïde central d'inertie.*

Les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie se nomment *axes principaux d'inertie* pour le point O. S'ils étaient pris pour axes coordonnés, l'équation (2) ne contiendrait plus que les termes en ξ^2, η^2, ζ^2, et, par suite, il faudrait qu'on eût

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

ou bien

$$(3) \qquad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0,$$

les coordonnées employées dans le calcul de ces trois sommes étant, bien entendu, relatives aux axes principaux. Réciproquement, si les équations (3) sont satisfaites pour un certain système de trois axes rectangulaires, l'équation (2) ne contiendra plus que les carrés des coordonnées, en sorte que les axes Ox, Oy, Oz seront les axes principaux d'inertie. Les équations (3) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour exprimer que les axes principaux d'inertie pour le point O coïncident avec le système d'axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz. En prenant à part deux de ces équations, elles expriment que l'un des axes coordonnés est axe principal d'inertie pour l'origine; ainsi les deux premières, par exemple, donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que la droite Oz soit axe principal d'inertie en O, parce que, si elles sont remplies, les termes contenant ζ au premier degré manquent dans l'équation (2), et réciproquement.

Lorsque, le point O étant donné, on veut connaître les axes principaux d'inertie pour ce point, on peut toujours prendre arbitrairement les axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz et former l'équation (2) de l'ellipsoïde d'inertie. La question reviendrait alors à trouver les axes principaux d'un ellipsoïde donné, ce qui est un problème connu de Géométrie analytique, sur lequel nous n'avons rien à dire ici. Nous énon-

---

pour axe de figure, avec un rayon égal à $\frac{1}{\sqrt{A}}$. Le rayon vecteur $\overline{OS}$ dirigé suivant l'axe des z serait alors infini.

cerons cependant quelques remarques propres à faciliter la recherche dont il s'agit et parfois à la rendre inutile.

1° Si un solide est de révolution autour d'une droite, si la distribution des masses est identique dans tous les plans méridiens et si, de plus, elle est, dans chacun d'eux, symétrique des deux côtés de l'axe, l'axe de révolution est axe principal d'inertie pour tous les points de son cours. Faisons-le, en effet, coïncider avec l'axe Oz dans un système rectangulaire Ox, Oy, Oz; il est clair que, pour toute masse m ayant les coordonnées x, y, z, on trouvera dans le même plan méridien et dans une situation symétrique relativement à Oz une autre masse égale ayant même z avec des x et y égaux et de signe contraire. Ces deux masses donneront des produits myz et mzx qui se détruiront dans les sommes Σmyz et Σmzx; comme la masse totale se décomposera de la même manière, ces sommes sont nulles, ce qui démontre la proposition énoncée, quelle que soit d'ailleurs l'origine O sur l'axe de révolution. Ajoutons que toutes les génératrices d'un cône circulaire engendré par la rotation d'une droite Ou autour de Oz ont évidemment des situations identiques relativement au corps, et que, par conséquent, celui-ci a le même moment d'inertie par rapport à toutes ces génératrices. Les rayons vecteurs correspondants de l'ellipsoïde d'inertie auront donc une valeur constante, et, par conséquent, cet ellipsoïde est de révolution autour du même axe que le corps; il en résulte que toute perpendiculaire élevée à cet axe en l'un de ses points est axe principal d'inertie pour son point de départ. Cette dernière proposition peut également se déduire de la suivante.

2° Toute droite perpendiculaire à un plan de symétrie est axe principal d'inertie pour le point où elle coupe ce plan. En effet, si on la prend pour axe des z, les axes des x et des y étant dans le plan de symétrie, à chaque masse m répondra une masse égale ayant même x et même y, avec un z égal et de signe contraire. Donc on a

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0,$$

ce qui démontre notre théorème.

3° Tout axe de symétrie est axe principal d'inertie en tous

les points de son cours. La démonstration est identique à celle qu'on a donnée ci-dessus (1°) pour un axe de révolution. Il faut entendre par axe de symétrie une droite qui divise en deux moitiés symétriques toute section faite dans le corps par un plan qui la contient.

Lorsqu'un ellipsoïde est rapporté à un système de trois axes principaux, son équation ne contient plus que les carrés des coordonnées; s'il s'agit d'un ellipsoïde d'inertie, l'équation générale (2) doit donc se réduire à

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1; \tag{4}$$

les trois sommes D, E, F sont nulles comme on l'a déjà dit, et l'expression de I devient

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma, \tag{5}$$

A, B, C étant alors les trois moments d'inertie relativement aux axes principaux, et α, β, γ les angles que fait avec ces axes une droite quelconque issue de leur point de concours, relativement à laquelle on veut avoir le moment d'inertie I.

En général, il n'y a, pour un ellipsoïde, qu'un système de trois axes principaux. Cependant, si dans les équations (4) et (5) on suppose égales deux des trois quantités A, B, C, par exemple $A = B$, l'ellipsoïde devient de révolution autour du troisième axe (ici l'axe des z); tout diamètre mené dans le plan de l'équateur devient un axe principal, et, comme sa longueur est constante, le moment d'inertie correspondant conserve aussi la même valeur A ou B. Si l'on avait $A = B = C$, l'ellipsoïde deviendrait une sphère; tous ses diamètres deviendraient des axes principaux, auxquels répondrait toujours un même moment d'inertie A.

Voici encore, au sujet des axes principaux, deux propriétés utiles à connaître.

219. *Condition pour qu'une droite soit axe principal en un point de son cours.* — Soient donnés une droite et un corps; nous pouvons toujours prendre la droite pour axe des z dans un système d'axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 249), dont l'origine sera l'un quelconque de ses points et l'orientation telle que le plan des zx contienne le centre

de gravité G du corps. Soit maintenant O′ un point *a priori* inconnu, défini par sa coordonnée $z=a$, pour lequel $O'z$ serait un axe principal d'inertie du corps. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela ait lieu s'expriment (n° 218) par les équations

Fig. 249.

$$\Sigma my'z'=0, \quad \Sigma mz'x'=0;$$

les coordonnées x', y', z' ayant l'origine O′ et formant un second système rectangulaire qu'on peut prendre parallèle au premier. Alors, comme on a $z=z'+a$, $x=x'$, $y=y'$, les conditions ci-dessus deviennent

$$\Sigma my(z-a)=0, \quad \Sigma mx(z-a)=0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\Sigma myz-a\Sigma my=0, \quad \Sigma mzx-a\Sigma mx=0.$$

Or, d'après la position particulière attribuée au plan des zx, on a $\Sigma my=0$; d'un autre côté, en nommant x_1 l'abscisse du point G, on a

$$\Sigma mx=x_1\Sigma m;$$

par suite, les conditions précédentes se transforment en

$$\Sigma myz=0, \quad a=\frac{\Sigma mzx}{x_1\Sigma m}.$$

La première condition doit se trouver remplie indépendamment du choix de l'origine O qui est restée arbitraire, mais en assujettissant, comme nous l'avons dit, le plan des zx à passer par le centre de gravité G; c'est la condition à remplir pour que la droite Oz soit axe principal d'inertie du corps en un de ses points O′, et, quand elle sera vérifiée, la seconde équation fera connaître O′ par sa coordonnée $z=a$.

220. *Condition pour qu'une droite soit axe principal d'inertie en plus d'un point; axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie.* — Si la droite Oz (*fig.* 249) est axe principal en O et O′, en imaginant deux systèmes de coordonnées rectangu-

laires parallèles qui auraient ces points pour origines et dont Oz ferait partie, on aura les conditions nécessaires et suffisantes

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma my'z' = 0, \quad \Sigma mz'x' = 0.$$

En désignant encore par a le z du point O′, les deux dernières conditions, quand on y fait

$$z' = z - a, \quad x' = x, \quad y' = y,$$

deviennent

$$\Sigma myz - a\Sigma my = 0, \quad \Sigma mzx - a\Sigma mx = 0,$$

ou bien, en vertu des deux premières, si a n'est pas supposé nul,

$$\Sigma my = 0, \quad \Sigma mx = 0,$$

ce qui montre que le centre de gravité du corps se trouve sur l'axe des z, car les coordonnées x_1 et y_1 sont nulles (n° 150).

Réciproquement, si le centre de gravité est sur l'axe des z, les sommes Σmy et Σmx seront nulles; la vérification des conditions

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0$$

suffit alors pour entraîner aussi, quel que soit a, celle des égalités

$$\Sigma my'z' = 0, \quad \Sigma mz'x' = 0.$$

Donc on peut conclure que :

Toute droite qui est axe principal d'inertie en deux de ses points passe par le centre de gravité.

Toute droite qui passe par le centre de gravité, en étant axe principal pour un quelconque de ses points, est par cela même axe principal pour tous les points de son cours (et notamment pour le centre de gravité).

Les axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie sont, comme on le voit, axes principaux d'inertie en tous leurs points; les droites qui passent au centre de gravité sans y être axe principal d'inertie ne peuvent le devenir en aucun autre point, car, si cela était, elles seraient axe principal au centre de gravité, ce qui est contraire à l'hypothèse.

221. *Expressions toutes calculées des moments d'inertie de divers volumes homogènes.* — Nous allons calculer les trois moments d'inertie principaux pour le centre de gravité de divers corps, supposés homogènes, avec une densité $\rho = 1$, ce qui permet de confondre l'élément de volume avec l'élément de masse. Ces trois moments étant connus, la formule (5) du n° 218 donnerait le moment d'inertie pour tout axe passant par le centre de gravité, et l'on aurait ensuite le moment d'inertie pour un axe quelconque au moyen de la règle concernant les axes parallèles (n° 217).

1° *Parallélépipède rectangle.* — Le centre de figure du volume est son centre de gravité (n° 152 *f*), et les parallèles aux arêtes menées par ce point y sont les axes principaux d'inertie, d'après la seconde ou la troisième des remarques générales faites à ce sujet (n° 218). Cela posé, soient a, b, c les trois dimensions; A, B, C les trois moments d'inertie relativement aux axes principaux dont on vient de parler. En prenant ces axes pour axes coordonnés, on aura

$$A = \int\int\int (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

les limites de l'intégration devant être

$$\text{de } -\frac{a}{2} \text{ à } +\frac{a}{2} \text{ pour } x,$$

$$\text{de } -\frac{b}{2} \text{ à } +\frac{b}{2} \text{ pour } y,$$

$$\text{de } -\frac{c}{2} \text{ à } +\frac{c}{2} \text{ pour } z.$$

Le calcul s'effectue sans peine et donne successivement

$$A = a\int\int (y^2 + z^2)\, dy\, dz$$

$$= ab\int\left(\frac{1}{12} b^2 + z^2\right) dz = \frac{1}{12} abc(b^2 + c^2).$$

On trouve ensuite, par une simple permutation de lettres,

$$B = \frac{1}{12} abc(c^2 + a^2), \quad C = \frac{1}{12} abc(a^2 + b^2).$$

Comme le volume a pour valeur abc, on voit aussi que les trois rayons de giration répondant à A, B, C sont respectivement les racines carrées de

$$\frac{1}{12}(b^2+c^2),\quad \frac{1}{12}(c^2+a^2),\quad \frac{1}{12}(a^2+b^2).$$

2° *Cylindre circulaire, creux ou plein.* — Le centre de gravité se trouve sur l'axe de figure, au milieu de la hauteur (n° 152, g). Plaçons-y l'origine de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, dont le dernier coïncide avec l'axe de figure, les deux autres étant orientés d'une manière quelconque dans un plan perpendiculaire. Ce seront encore là trois axes principaux d'inertie pour le centre de gravité (n° 218). Maintenant, afin de calculer d'abord le moment C, on décomposera le cylindre en couches concentriques d'épaisseur dr; si l'on désigne par h la hauteur du cylindre et par R, R′ ses rayons extérieur et intérieur, le moment d'inertie d'une couche relativement à Oz s'exprimera par $2\pi r\,dr.h.r^2$, et l'on aura

$$C = 2\pi h\int_{R'}^{R} r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi h(R^4 - R'^4).$$

Attendu que le volume a pour valeur $\pi h(R^2 - R'^2)$, on voit que le rayon de giration correspondant à C est la racine carrée de $\frac{1}{2}(R^2+R'^2)$.

Ensuite on a évidemment $A = B$; en outre, on a les relations

$$(6)\qquad \begin{cases} A = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\\ B = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int (z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz,\\ C = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz; \end{cases}$$

d'où l'on tire, dans le cas actuel, où $A = B$,

$$A = B = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int (2z^2+x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int\!\!\int\!\!\int z^2\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{2}C.$$

Nous connaissons déjà C; quant à $\int\int\int z^2\,dx\,dy\,dz$, le calcul en est facile.

Une première intégration par rapport à z, entre $-\frac{h}{2}$ et $+\frac{h}{2}$, donne

$$\int\int\int z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{12}h^3\int\int dx\,dy,$$

et, comme $\int\int dx\,dy$ n'est autre chose que la section droite du cylindre, il en résulte

$$\int\int\int z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{12}\pi h^3(R^2 - R'^2).$$

Donc enfin

$$A = B = \frac{1}{4}\pi h(R^4 - R'^4) + \frac{1}{12}\pi h^3(R^2 - R'^2)$$
$$= \frac{1}{4}\pi h(R^2 - R'^2)\left(R^2 + R'^2 + \frac{1}{3}h^2\right).$$

A ce moment d'inertie répond un carré du rayon de giration égal à

$$\frac{1}{4}\left(R^2 + R'^2 + \frac{1}{3}h^2\right).$$

S'il s'agit d'un cylindre plein, il suffira de faire $R' = 0$ dans les formules précédentes.

3° *Sphère creuse ou pleine.* — Soient R le rayon extérieur, R′ le rayon du vide intérieur, supposé concentrique à la surface extérieure. Menons par le centre de figure, qui est en même temps le centre de gravité (n° 152, *f*), trois axes rectangulaires quelconques; ils seront axes principaux (n° 218), car on a évidemment ici $A = B = C$. On déduit de là

$$A = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

ou, en vertu des relations (6),

$$A = \frac{2}{3}\int\int\int(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Pour calculer la dernière intégrale, imaginons le volume total décomposé en couches concentriques; pour l'une de ces couches ayant un rayon r et une épaisseur dr, la somme des éléments serait $r^2 \times 4\pi r^2\,dr$.

Donc

$$A = \frac{8\pi}{3}\int_{R'}^{R} r^4\,dr = \frac{8\pi}{15}(R^5 - R'^5);$$

c'est le moment d'inertie relativement à un diamètre quelconque. Le volume s'exprimant par $\frac{4}{3}\pi(R^3 - R'^3)$, le carré du rayon de giration sera

$$\frac{2}{5}\frac{R^5 - R'^5}{R^3 - R'^3} = \frac{2}{5}\frac{R^4 + R^3R' + R^2R'^2 + RR'^3 + R'^4}{R^2 + RR' + R'^2}$$
$$= \frac{2}{5}\left(R^2 + R'^2 - \frac{R^2R'^2}{R^2 + RR' + R'^2}\right).$$

Si l'on fait $R' = 0$, pour traiter le cas d'une sphère pleine, on aura

$$A = \frac{8}{15}\pi R^5$$

et pour le carré du rayon de giration correspondant, la valeur $\frac{2}{5}R^2$.

4° *Ellipsoïde plein.* — Nous laissons de côté, pour plus de simplicité, le cas d'un ellipsoïde creux; au surplus on pourrait toujours avoir les moments d'inertie dans ce dernier cas, en calculant d'abord leur valeur sans avoir égard au vide, puis retranchant le moment d'inertie du vide supposé plein.

Soit donc donné un ellipsoïde plein, dont a, b, c désignent les demi-diamètres principaux; en prenant ces diamètres pour axes coordonnés, l'équation de l'ellipsoïde sera

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ces mêmes axes sont en même temps les axes principaux d'inertie pour le centre de gravité de l'ellipsoïde (n° **218**), et les moments d'inertie correspondants sont exprimés par les formules (6). Pour les calculer, prenons ces variables auxi-

liaires définies par les relations

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz';$$

il en résulte

$$\begin{aligned} A &= abc\int\int\int(b^2 y'^2 + c^2 z'^2)\,dx'\,dy'\,dz' \\ &= abc\left(b^2\int\int\int y'^2\,dx'\,dy'\,dz' + c^2\int\int\int z'^2\,dx'\,dy'\,dz'\right). \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que les intégrales entrant dans les formules (6) devaient s'étendre à tous les éléments compris dans l'intérieur de l'ellipsoïde (7); après le changement de variables, cet ellipsoïde est remplacé par la sphère ayant pour équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

et il faut étendre les intégrales à tous les éléments du volume de cette sphère. Comme la sphère présente la même disposition relativement à tous ses plans diamétraux, on en déduit les relations

$$\begin{aligned} \int\int\int y'^2\,dx'\,dy'\,dz' &= \int\int\int z'^2\,dx'\,dy'\,dz' \\ &= \frac{1}{2}\int\int\int(y'^2 + z'^2)\,dx'\,dy'\,dz'. \end{aligned}$$

La dernière intégrale n'est autre chose que le moment d'inertie de la sphère de rayon 1 relativement à un de ses diamètres; donc elle a pour valeur, d'après ce qu'on a vu plus haut, $\frac{8}{15}\pi$, d'où résulte

$$\int\int\int y'^2\,dx'\,dy'\,dz' = \int\int\int z'^2\,dx'\,dy'\,dz' = \frac{4}{15}\pi.$$

Donc enfin

$$A = \frac{4}{15}\pi abc(b^2 + c^2);$$

et, par une permutation de lettres, on aurait de même

$$B = \frac{4}{15}\pi abc(c^2 + a^2), \quad C = \frac{4}{15}\pi abc(a^2 + b^2).$$

Les rayons de giration correspondants ont pour carrés les quotients de A, B, C par le volume $\frac{4}{3}\pi abc$ de l'ellipsoïde, c'est-à-dire

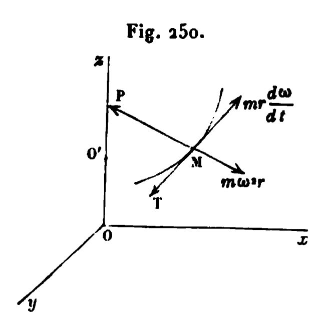
$$\frac{1}{5}(b^2+c^2),\quad \frac{1}{5}(c^2+a^2),\quad \frac{1}{5}(a^2+b^2).$$

Nous croyons inutile de multiplier davantage les exemples de ce genre de recherches.

§ II. — Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

222. *Détermination de l'accélération angulaire et des positions successives du solide.* — Lorsqu'un solide est assujetti à tourner autour d'un axe fixe, le principe de d'Alembert conduit sans peine à l'équation de son mouvement. Prenons un système d'axes rectangulaires, dont l'un Oz (*fig.* 250) coïncide avec l'axe de rotation; soit, à un instant quelconque, ω la vitesse angulaire commune à tous les points. Soient de plus M un point du corps, m la masse, r sa distance à l'axe. Le point M décrit un cercle dans un plan perpendiculaire à Oz; sa vitesse est ωr; son accélération totale se décompose en une accélération tangentielle $r\frac{d\omega}{dt}$ et une accélération centripète $\omega^2 r$, respectivement dirigées suivant la tangente MT et le rayon MP du cercle décrit. Le sens de la première composante sera d'ailleurs celui de M vers T, si la vitesse ω est comptée positivement dans le sens de Ox vers Oy; le sens de la seconde sera toujours de M vers P. A ces accélérations répond une force d'inertie ayant deux composantes, l'une tangentielle $mr\frac{d\omega}{dt}$, l'autre centrifuge $m\omega^2 r$, dans les sens contraires à MT et à MP. En imaginant toutes les forces analogues pour les divers points du corps,

Fig. 250.



elles doivent, conformément au principe de d'Alembert (n° 193), faire équilibre aux forces réellement agissantes, y compris les forces de liaison. Or on a vu au n° 135 quelle est la condition d'équilibre d'un solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe ; il faut égaler à zéro la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe. Si donc on nomme Q cette somme calculée pour les seules forces directement appliquées, en considérant comme positifs les moments qui ont le sens de Ox vers Oy, on trouvera de cette manière

$$(1) \qquad Q - \frac{d\omega}{dt} \Sigma mr^2 = 0.$$

On connaît ainsi l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ au moyen de Q et du moment d'inertie Σmr^2.

La somme des produits mr^2 ou Σmr^2 exprime la somme des moments des forces d'inertie lorsque $\frac{d\omega}{dt}$ prend la valeur 1; c'est ce qui explique le nom qu'on lui a donné. On voit que cette quantité joue ici un rôle assez semblable à celui de la masse dans l'équation du mouvement d'un point soumis à une force; plus le moment d'inertie est grand, et moindre est l'accélération angulaire communiquée au corps par un moment Q donné.

Nommons φ l'angle décrit par le corps autour de Oz, a partir d'une position initiale déterminée; en comptant encore les accroissements positifs de φ dans le sens de Ox vers Oy, on aura

$$(2) \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

et les équations (1) et (2) détermineront les inconnues ω et φ en fonction du temps lorsque Q sera défini en fonction de t, de φ et des dérivées de φ par rapport à t. Le mouvement sera ainsi déterminé, ou du moins sa détermination ne comportera plus qu'une difficulté purement analytique. Par exemple, si l'on supposait $Q = f(t)$, on aurait par l'équation (1)

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{\Sigma mr^2} \int_0^t f(t)\, dt;$$

puis, en vertu de (2),

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{\Sigma mr^2}\int_0^t dt \int_0^t f(t)\,dt.$$

Les constantes ω_0 et φ_0 se détermineraient par les données relatives aux circonstances initiales; elles représentent les valeurs de ω et de φ pour $t = 0$. Comme second exemple on pourrait prendre $Q = f(\varphi)$; l'élimination de ω entre les équations (1) et (2) donne alors

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Sigma mr^2 = f(\varphi).$$

Multipliant par $2d\varphi$ et intégrant, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Sigma mr^2 = 2\int_0^\varphi f(\varphi)\,d\varphi + \text{const.},$$

équation du premier ordre entre φ et t, où l'on peut séparer les variables. En posant

$$F(\varphi) = \sqrt{\frac{2\int_0^\varphi f(\varphi)\,d\varphi + \text{const.}}{\Sigma mr^2}},$$

il vient alors

$$dt = \frac{d\varphi}{F(\varphi)} \quad \text{et par suite} \quad t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F(\varphi)} + \text{const.},$$

relation sous forme finie entre φ et t.

L'équation (1) aurait pu se déduire du théorème des moments des quantités de mouvement ou du théorème des forces vives (n^{os} **200** et **205**). La somme des moments des quantités de mouvement relativement à Oz a pour valeur $\Sigma m\omega r . r$ ou $\omega\Sigma mr^2$; l'application du troisième théorème général pour l'axe Oz et pendant le temps dt donne, par suite,

$$d\omega\,\Sigma mr^2 = Q\,dt,$$

relation équivalente à l'équation (1). De même la demi-force vive du corps est $\frac{1}{2}\Sigma m\omega^2 r^2$ ou $\frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2$; son accroissement dans le temps dt est $\omega\,d\omega\,\Sigma mr^2$. Le travail élémentaire des forces est égal au produit de leur moment total Q par le dé-

placement angulaire $d\varphi = \omega\, dt$ (n° 102); donc, en vertu du quatrième théorème général,

$$\omega\, d\omega\, \Sigma m r^2 = Q\, \omega\, dt,$$

ce qui, en divisant $\omega\, dt$, reproduit encore l'équation (1).

223. *Pressions supportées par les appuis.* — Afin de réaliser la fixité de l'axe, nous imaginerons, conformément à ce que nous avons déjà fait (n° 135), qu'on fixe d'abord un de ses points, le point O (*fig.* 250), puis qu'on assure l'invariabilité de sa direction au moyen d'un petit anneau sans frottement placé en O'. Soient

a le z du point O';

X_1, Y_1, Z_1 les composantes, parallèlement aux axes, de la réaction subie en O par le corps, à cause de la fixité de ce point;

X_2, Y_2 les composantes de la réaction exercée en O' par l'anneau sur le corps;

X, Y, Z, L, N, Q les sommes de projections et de moments des forces extérieures directement appliquées au corps, ces sommes étant prises pour les axes Ox, Oy, Oz;

X', Y', Z', L', N', Q' les sommes analogues pour les forces d'inertie.

En tenant compte de toutes ces forces, le solide peut être considéré comme libre. Il y a donc six conditions d'équilibre, nécessaires et suffisantes (n° 133), qui sont dans le cas actuel

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &X + X' + X_1 + X_2 = 0,\\ &Y + Y' + Y_1 + Y_2 = 0,\\ &Z + Z' + Z_1 \qquad\quad = 0,\\ &L + L' - Y_2 a \qquad = 0,\\ &N + N' + X_2 a \qquad = 0,\\ &Q + Q' \qquad\qquad\quad = 0. \end{aligned}\right.$$

On sait déjà (n° 222) que Q' a pour valeur $-\dfrac{d\omega}{dt}\Sigma m r^2$, par suite, la dernière équation se confond avec l'équation (1) précédemment obtenue, qui sert à déterminer le mouvement. Les cinq autres feront connaître les cinq forces demandées X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, quand on aura calculé les cinq sommes

désignées par X′, Y′, Z′, L′, N′ qui, conjointement avec Q′, donnent la définition d'un système équivalent aux forces d'inertie (n° 137). On aura donc ainsi déterminé les réactions des appuis sur le corps, et il suffira de les prendre en sens contraire (n° 95) pour avoir les pressions du corps sur ses appuis.

Mais il reste à opérer la réduction des forces d'inertie, c'est-à-dire à calculer X′, Y′, Z′, L′, N′, puisque Q′ est déjà connu.

En nommant α l'angle que le rayon $\overline{MP} = r$ (*fig.* 250) fait avec le plan des zx, on trouve sans peine les composantes X′, Y′, Z′ de la force d'inertie du point M répondant aux coordonnées x, y, z, savoir :

$$X' = m\omega^2 r\cos\alpha + mr\frac{d\omega}{dt}\sin\alpha = m\omega^2 x + my\frac{d\omega}{dt},$$

$$Y' = m\omega^2 r\sin\alpha - mr\frac{d\omega}{dt}\cos\alpha = m\omega^2 y - mx\frac{d\omega}{dt},$$

$$Z' = 0;$$

puis les moments L′, N′ de la même force par rapport à Ox, Oy, au moyen des formules du n° 103 (b),

$$L' = Z'y - Y'z = -m\omega^2 yz + mzx\frac{d\omega}{dt},$$

$$N' = X'z - Z'x = \quad m\omega^2 zx + myz\frac{d\omega}{dt}.$$

Faisant la somme des quantités analogues pour tous les points, et rappelant la valeur déjà connue de Q′, on trouve

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= \omega^2\Sigma mx + \frac{d\omega}{dt}\Sigma my,\\ Y' &= \omega^2\Sigma my - \frac{d\omega}{dt}\Sigma mx,\\ Z' &= 0,\\ L' &= -\omega^2\Sigma myz + \frac{d\omega}{dt}\Sigma mzx,\\ N' &= \quad\omega^2\Sigma mzx + \frac{d\omega}{dt}\Sigma myz,\\ Q' &= -\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par M la masse totale Σm du corps et par x_1, y_1 les coordonnées de son centre de gravité, on aura (n° 150)

$$Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my,$$

ce qui permet d'écrire, sous une autre forme, les valeurs de X' et Y',

$$(5) \qquad X' = M\omega^2 x_1 + My_1 \frac{d\omega}{dt}, \quad Y' = M\omega^2 y_1 - Mx_1 \frac{d\omega}{dt}.$$

Ces composantes sont les mêmes que si la masse entière était condensée au centre de gravité, propriété qui rentre dans l'énoncé du dernier théorème démontré au n° 198.

On a maintenant tous les éléments nécessaires pour la recherche des pressions sur les appuis.

224. *Cas particuliers.* — On suppose que les forces extérieures se réduisent à un couple Q perpendiculaire à l'axe de rotation, c'est-à-dire qu'on fait

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad L = 0, \quad N = 0;$$

on demande les conditions : 1° pour que la fixité de l'axe soit assurée par celle du seul point O; 2° pour que l'axe reste spontanément fixe, sans aucun appui extérieur.

Si nous admettons d'abord la suppression du seul appui O', il faudra, pour que le mouvement n'en soit pas modifié, qu'on ait $X_2 = 0$, $Y_2 = 0$. Les équations (3), écrites en supprimant les quantités nulles et tenant compte des équations (4) et (5), deviennent alors

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} M\omega^2 x_1 + My_1 \frac{d\omega}{dt} + X_1 &= 0, \\ M\omega^2 y_1 - Mx_1 \frac{d\omega}{dt} + Y_1 &= 0, \\ Z_1 &= 0, \\ -\omega^2 \Sigma myz + \frac{d\omega}{dt} \Sigma mzx &= 0, \\ \omega^2 \Sigma mzx + \frac{d\omega}{dt} \Sigma myz &= 0, \\ Q - \frac{d\omega}{dt} \Sigma mr^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

La dernière équation détermine le mouvement sous l'action du couple donné Q; la troisième montre que le point fixe n'a pas à exercer d'action suivant l'axe, de sorte qu'il n'est pas besoin d'un épaulement; les deux premières déterminent les composantes normales de la force exercée par l'appui placé en O. La quatrième et la cinquième, ajoutées ensemble après leur élévation au carré, donnent

$$\left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right][(\Sigma m zx)^2 + (\Sigma m yz)^2] = 0.$$

Or le premier facteur ne peut s'annuler que si l'on suppose tout à la fois absence de vitesse acquise et d'accélération angulaire, ce qui conduirait à supposer $Q = 0$, c'est-à-dire l'absence de toute force extérieure, en même temps que le repos initial. Hors de cette hypothèse très particulière, il faut qu'on ait, pour annuler le second facteur,

$$\Sigma m zx = 0, \quad \Sigma m yz = 0;$$

l'axe de rotation doit donc être axe principal d'inertie pour le point O (n° 218) où l'on place l'appui conservé, ce qui est une condition à remplir par le corps.

Supposons maintenant qu'on veuille encore supprimer cet appui; les équations (6) se modifieront seulement en ce qu'on devra y faire $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$. Donc on aura toujours la dernière équation pour déterminer le mouvement; un épaulement restera inutile; l'axe Oz sera encore axe principal d'inertie pour le point O. Mais les deux premières équations vont nous donner une condition nouvelle à remplir par le corps; en y supprimant les termes nuls X_1, Y_1, les élevant au carré et les ajoutant, on trouve

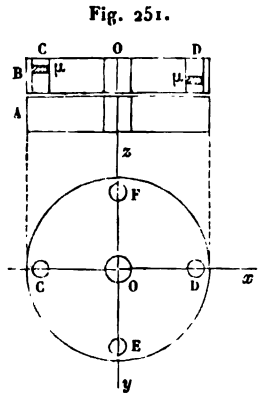
$$M^2\left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right](x_1^2 + y_1^2) = 0;$$

d'où l'on déduit, comme ci-dessus, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, sauf dans le cas exceptionnel d'un corps en repos, ne subissant aucune action extérieure. Donc l'axe est l'un des axes principaux d'inertie pour le centre de gravité (n° 220).

On voit, en résumé : 1° que si une droite est axe principal d'inertie en un de ses points, il suffit de fixer ce point pour qu'un mouvement de rotation antérieurement acquis autour de la droite se continue autour de la même droite, sous l'action d'un couple contenu dans un plan perpendiculaire ; 2° que si la droite est un axe principal d'inertie pour le centre de gravité, le même fait se produit sans avoir à fixer aucun de ses points. Les axes du premier genre se nomment *axes permanents de rotation;* ceux du second genre, *axes naturels de rotation.*

225. *Application des considérations précédentes aux meules de moulin.* — Une paire de meules comprend d'abord une meule fixe A (*fig.* 251), au-dessus de laquelle se trouve une meule mobile B qui tourne autour de la verticale Oz, coïncidant avec son axe de figure. Les meules ont la forme de deux cylindres se touchant presque par une de leurs bases; sur ces bases très rapprochées se trouvent tracées des cannelures dans lesquelles se produit l'écrasement du grain par suite de la rotation relative.

Fig. 251.



La meule mobile ne porte sur l'axe que par le point O, et, à cet effet, l'axe est terminé par une pointe qui entre dans une pièce métallique fixée à la meule. Celle-ci doit d'abord rester horizontale au repos, et il faut, en conséquence, que son centre de gravité soit sur Oz; mais il faut en outre, pour son bon fonctionnement, qu'elle reste horizontale pendant le mouvement de rotation qu'elle doit prendre sous l'action de couples moteurs horizontaux et d'autres couples également horizontaux provenant des résistances opposées par le grain.

Si les choses se passent ainsi, le centre de gravité de B reste immobile; donc les forces extérieures transportées en ce point se font équilibre (n° 198). Or, en dehors des couples dont on vient de parler, il n'y a que le poids agissant sur Oz et la réaction de l'appui O; ces deux forces sont donc égales

et directement opposées, et par conséquent on peut en faire abstraction, car elles se détruiraient dans toutes les équations d'équilibre obtenues par l'application à la meule B du principe de d'Alembert, et par conséquent elles ne peuvent avoir aucune influence sur le mouvement. Alors la meule ne tourne plus que sous l'action des couples horizontaux; pour que sa rotation persiste à se produire autour de Oz, sans autre réaction sur l'axe, il faut que cette droite soit un axe naturel de rotation (n° 224), c'est-à-dire une axe principal d'inertie au centre de gravité. Et si l'on prend un système d'axes coordonnés rectangulaires composé de Oz et deux autres lignes Ox, Oy, il faudra remplir les conditions, à la fois nécessaires et suffisantes (n° 220),

$$\Sigma m z x = 0, \quad \Sigma m y z = 0.$$

Ces conditions seraient remplies si la meule avait rigoureusement la forme d'un cylindre et si l'homogénéité de sa matière intérieure était parfaite. Mais, comme on doit supposer pratiquement qu'il n'en sera jamais tout à fait ainsi, voici comment on pourrait corriger le défaut et rendre nulles les deux sommes ci-dessus, étant admis qu'elles ne s'écartent pas trop de zéro. Imaginons qu'on pratique dans la meule B deux trous cylindriques verticaux C et D, ayant pour sections droites deux cercles égaux, de rayon assez petit, dont les centres sont, sur l'axe des x, à égale distance de part et d'autre du point O; on introduira ensuite dans ces trous des masses deux à deux égales, telles que μ, μ, mais en les plaçant à des hauteurs différentes. Il est clair que le percement des trous et l'introduction des masses μ n'ont fait varier ni $\Sigma m x$, ni $\Sigma m y$; le centre de gravité de la meule est donc encore sur Oz, après comme avant ces opérations. Seulement l'introduction des deux masses μ a fait varier $\Sigma m z x$ d'une quantité égale au produit de μ par $\overline{OC}$ et par leur différence de niveau; on comprend donc qu'on puisse arriver ainsi à rendre nulle la somme $\Sigma m z x$. On arriverait de même à rendre nulle $\Sigma m y z$ par l'emploi de masses placées dans deux trous E, F ayant les centres de leurs sections droites sur l'axe des y.

La détermination des masses μ et de leurs différences de niveau résulte d'ailleurs d'un tâtonnement expérimental.

226. *Condition pour que les forces d'inertie d'un solide tournant aient une résultante unique.* — La condition nécessaire et suffisante s'exprime, avec les notations du n° 223, par l'équation (n° 147)

$$L'X' + N'Y' + Q'Z' = 0,$$

ou bien, puisque $Z' = 0$, par

$$L'X' + N'Y' = 0.$$

La substitution des valeurs (4) pour L' et N', et des valeurs (5) pour X' et Y' (n° 123), conduit à

$$0 = \left(-\omega^2 \Sigma myz + \frac{d\omega}{dt}\Sigma mzx\right)\left(M\omega^2 x_1 + My_1\frac{d\omega}{dt}\right)$$
$$+ \left(\omega^2 \Sigma mzx + \frac{d\omega}{dt}\Sigma myz\right)\left(M\omega^2 y_1 - Mx_1\frac{d\omega}{dt}\right)$$

ou, toute réduction faite, à

$$M\left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right](y_1\Sigma mzx - x_1\Sigma myz) = 0.$$

Les facteurs M et $\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ ne peuvent pas être supposés nuls, car alors il n'y aurait plus de corps, ni de force d'inertie; donc il reste la condition

$$y_1\Sigma mzx - x_1\Sigma myz = 0.$$

Pour en voir plus facilement la signification, disposons du plan des zx, jusqu'à présent arbitraire, et faisons-le passer par le centre de gravité du corps, alors y_1 est nul et la condition devient

$$x_1\Sigma myz = 0.$$

On peut y satisfaire de deux manières : d'abord en supposant $x_1 = 0$; mais alors, x_1, y_1 étant nuls, le centre de gravité se trouverait sur l'axe de rotation, la résultante de translation des forces d'inertie s'annulerait et ces forces n'auraient plus, à proprement parler, de résultante unique, car elles se réduiraient à un couple ou se feraient équilibre. Rejetant donc l'hypothèse $x_1 = 0$, il ne reste qu'à supposer $\Sigma myz = 0$; avec la position particulière choisie pour le plan des zx, cela signifie

que l'axe des z (c'est-à-dire l'axe de rotation) est axe principal d'inertie en un de ses points (n° **219**).

Supposons que cette condition soit remplie par le solide tournant dont on s'occupe; il y a dans ce cas une résultante unique, et l'on peut demander son intensité ainsi que la ligne suivant laquelle elle agit. Afin de simplifier autant que possible cette recherche, conservons au plan des zx la position particulière ci-dessus définie et, de plus, transportons l'origine au point pour lequel l'axe de rotation est axe principal d'inertie. Alors on a

$$y_1 = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma myz = 0,$$

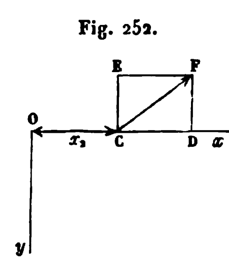
et les équations (4) et (5) donnent

$$X' = M\omega^2 x_1, \quad Y' = -Mx_1 \frac{d\omega}{dt}, \quad Z' = 0,$$

$$L' = 0, \quad N' = 0, \quad Q' = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma mr^2.$$

Le fait d'avoir $L' = 0$, $N' = 0$ montre que la résultante est dans le nouveau plan des xy, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à l'axe mené par le point où celui-ci est axe principal d'inertie. Représentons ce plan et soit F (*fig.* 252) la résultante, que nous regarderons comme appliquée au point C, où elle perce le plan des zx; les composantes

Fig. 252.



$$X' = \overline{CD} = M\omega^2 x_1,$$
$$Y' = CE = -Mx_1 \frac{d\omega}{dt}$$

étant connues, il suffit de déterminer l'abscisse $\overline{OC} = x_2$ de ce point C pour que la résultante F soit elle-même complètement déterminée. A cet effet, on écrira que le moment de F (ou de sa composante $\overline{CE} = Y'$), relativement à l'axe Oz projeté en O, est égal à la somme Q' des moments de toutes les forces d'inertie; cela conduit à l'équation

$$-Mx_1 x_2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma mr^2,$$

d'où résulte

$$x_2 = \frac{\Sigma mr^2}{Mx_1}. \quad (7)$$

En résumé, pour que les forces d'inertie dues à la rotation d'un solide autour d'un axe fixe Oz aient une résultante unique, il faut que l'axe soit axe principal d'inertie en un de ses points O, et en un seul, car autrement il passerait au centre de gravité (n° 220), et, dans ce cas, les forces d'inertie se feraient équilibre ou se réduiraient à un couple. Menant ensuite en ce point O un axe des abscisses Ox perpendiculaire à l'axe de rotation dans un plan passant par celui-ci et par le centre de gravité, on prendra sur Ox un point C déterminé, par l'abscisse x_2, et l'on aura ainsi un point de la résultante. La grandeur de la résultante est d'ailleurs la même que si la masse entière était condensée au centre de gravité (n° 223); il ne restera donc qu'à mener par le point C une droite égale, parallèle et de même sens.

Remarquons encore que le produit x_1x_2, égal à $\frac{1}{M}\Sigma mr^2$, est essentiellement positif; les abscisses x_1 et x_2 sont donc de même signe, et, par suite, le point C et le centre de gravité sont du même côté de l'axe de rotation. Ensuite, si l'on nomme k le rayon de giration du corps relativement à un axe parallèle à Oz mené par le centre de gravité, on aura (n° 217)

$$\Sigma mr^2 = M(x_1^2 + k^2),$$

valeur qui, portée dans l'équation (7), donne

$$x_2 = x_1 + \frac{k^2}{x_1}; \quad (8)$$

donc le point C est plus loin de l'axe de rotation que le centre de gravité.

Le point C a reçu le nom de *centre de percussion*, et cela tient à une propriété que nous allons maintenant établir.

227. *Centre de percussion.* — Un corps solide étant assujetti à tourner autour d'un axe fixe, supposons qu'à un certain

instant on lui applique une percussion, c'est-à-dire une force très considérable agissant pendant un temps presque nul. La vitesse angulaire devant varier instantanément d'une quantité finie, l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$ deviendra très grande, infinie à la limite, et les forces d'inertie centrifuges seront négligeables devant les forces tangentielles; si donc l'axe est axe principal d'inertie en un de ses points, de manière que le point C (nº 226) existe, la résultante des forces d'inertie sera la force $-Mx_1\frac{d\omega}{dt}$ appliquée en C.

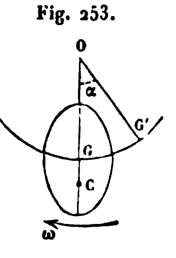
Cela posé, on demande quelles conditions doit remplir la percussion pour ne pas faire naître sur les appuis des réactions dont les intensités seraient du même ordre de grandeur que cette percussion elle-même. Afin de répondre à cette question, nous remarquerons que, en vertu du principe de d'Alembert, il y a équilibre à chaque instant entre les forces d'inertie, la force due à la percussion et les réactions sur l'axe. Pour que les réactions n'interviennent pas dans cet équilibre et puissent être considérées comme nulles, il faut et il suffit que la force de percussion soit égale et contraire à la résultante des forces d'inertie. Donc : 1º les forces d'inertie doivent avoir une résultante qui, alors, passe au point C et a pour valeur $-Mx_1\frac{d\omega}{dt}$; 2º on doit frapper suivant une ligne passant au point C et dans la direction de cette résultante, c'est-à-dire perpendiculairement à un plan mené par l'axe de rotation et par le centre de gravité. Ainsi l'axe et le corps ont à remplir une certaine condition relative à l'existence du point C (nº 226); ensuite la percussion doit passer par ce point avec une direction déterminée. On peut d'ailleurs lui attribuer telle intensité et tel sens qu'on voudra; cela influera seulement sur la grandeur et le sens de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$.

Nous aurions pu traiter aussi cette question en employant le principe de d'Alembert, modifié pour le cas des forces instantanées (nº 195). Si nous appelons ω' l'accroissement de vitesse angulaire pendant le choc, la quantité de mouvement perdue par un point de masse m, situé à la distance r de l'axe,

sera $-m\omega' r$ et ne différera de la force d'inertie tangentielle, introduite dans les calculs précédents, que par le changement du facteur $\frac{d\omega}{dt}$ en ω'. Or il doit y avoir équilibre entre les quantités de mouvement perdues par tous les points et l'impulsion de la force instantanée, sans intervention de l'axe; donc il faut que les quantités de mouvement perdues aient une résultante unique, égale et contraire à l'impulsion. Si cette résultante existe, elle passe au point C, et a pour intensité $-M\omega' x_1$ et pour direction celle de la perpendiculaire au plan passant par l'axe et le centre de gravité. Donc, enfin, l'axe et le corps doivent remplir la condition pour que le point C existe; cela étant, il faut frapper suivant une ligne qui passe par C, dans la direction qu'on vient de définir. La grandeur et le sens de l'impulsion sont du reste indifférentes si ω' n'est pas donnée *a priori.*

228. *Théorie du pendule composé.* — Le pendule composé est un corps solide soumis à l'action de son poids et assujetti à tourner autour d'un axe horizontal fixe. Prenons pour plan de la figure un plan mené perpendiculairement à l'axe par le centre de gravité G du corps (*fig.* 253). Soient O le point de rencontre de l'axe avec ce plan, $\overline{OG} = a$ le rayon du cercle décrit par le centre de gravité. La droite OG étant supposée coïncider avec la position verticale de ce rayon, considérons une autre position quelconque OG′ faisant un angle α avec la première, et nommons ω la vitesse de rotation correspondante, évaluée dans le sens de la flèche. Les poids de tous les points matériels qui composent le pendule auront, relativement à l'axe O, même somme de moments que le poids total Mg appliqué en G′, soit un moment total $Mga \sin\alpha$; l'application de la formule donnant l'accélération angulaire (n° 223) conduit donc ici à l'équation

Fig. 253.



$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mga \sin\alpha}{\Sigma mr^2}, \tag{9}$$

Σmr^2 étant le moment d'inertie relativement à l'axe O. Si le pendule se réduisait à un point C situé sur OG à la distance

$l = \overline{OC}$ du point O, il faudrait faire, dans l'équation précédente, $a = l$ et $\Sigma mr^2 = Ml^2$; elle deviendrait alors

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g \sin \alpha}{l}. \tag{10}$$

Or les équations (9) et (10) sont identiques si l'on prend

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{Ma}; \tag{11}$$

donc le mouvement du pendule composé est le même que celui d'un pendule simple dont la longueur aurait été déterminée par l'équation (11), pourvu cependant que l'écart initial et la vitesse initiale soient les mêmes dans les deux pendules, car ces données (ou d'autres données équivalentes) sont encore nécessaires pour que les équations (9) et (10) définissent entièrement les mouvements des deux pendules. On ramène ainsi la question actuelle à celle qu'on a traitée au n° **121**.

Le pendule simple, dont la longueur est $\frac{\Sigma mr^2}{Ma}$, se nomme le pendule simple *équivalent* au pendule composé. Les points O et C se nomment *centre de suspension* et *centre d'oscillation*. L'axe projeté en O et la parallèle menée en C sont l'*axe de suspension* et l'*axe d'oscillation*. Les noms du point C et de la parallèle menée par ce point à l'axe O viennent de ce que le point C et tous les autres points de cette parallèle oscillent comme s'ils étaient seuls et indépendants de tous les autres points du pendule composé.

Soit k le rayon de giration de ce corps, relativement à une parallèle menée en G à l'axe de suspension; on aura (n° **217**)

$$\Sigma mr^2 = M(k^2 + a^2)$$

et par suite

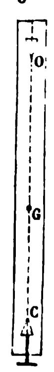
$$l = \frac{\Sigma mr^2}{Ma} = a + \frac{k^2}{a}. \tag{12}$$

La longueur $\overline{OC} = l$ comprend, comme on le voit, les deux parties $\overline{OG} = a$ et $\overline{GC} = \frac{k^2}{a}$; donc : 1° le centre d'oscillation C

est au delà du centre de gravité G par rapport à l'axe de suspension; 2° si le pendule a un centre de percussion pour l'axe O, ce point sera sur l'axe d'oscillation, car il doit se trouver (n° 226) dans le plan par l'axe O et le centre de gravité, à une distance de l'axe justement égale à $\frac{\Sigma mr^2}{Ma}$ ou à l; 3° si l'axe d'oscillation C était pris pour axe de suspension, on obtiendrait le nouveau centre d'oscillation en prolongeant la ligne $\overline{CG}$ d'une quantité $\frac{k^2}{\overline{CG}} = \frac{k^2}{\left(\frac{k^2}{a}\right)} = a$, ce qui donnerait le point O. On exprime la dernière propriété en disant que les centres d'oscillation et de suspension sont *réciproques;* la même chose se dit des axes correspondants.

Le capitaine anglais Kater a utilisé cette réciprocité pour la détermination expérimentale de l'accélération g. On prend un pendule muni de deux couteaux O et C (*fig.* 254), dont le second, portant une vis de rappel, peut se mouvoir dans une coulisse. Le centre de gravité G doit se trouver dans l'intervalle de ces couteaux, ce dont on s'assure en constatant que le plan OC est bien vertical, quand le pendule reste en équilibre sur l'un des deux couteaux. On arrive ensuite, par un tâtonnement expérimental, en faisant varier C, à remplir cette condition que le temps des petites oscillations soit le même pour les axes de suspension O et C. Quand les choses sont ainsi arrangées, on peut dire que C est le centre d'oscillation répondant au centre de suspension O et inversement, de sorte que la distance $\overline{OC}$ est la longueur l du pendule simple équivalent, pourvu toutefois qu'on n'ait pas $\overline{OG} = \overline{GC}$. En effet, l'égalité des temps d'oscillation autour de O et autour de C entraîne celles des longueurs des pendules simples équivalents, puisque le temps des petites oscillations d'un pendule simple ne dépend que de sa longueur (n° 121); donc, en posant $\overline{OG} = a$, $\overline{GC} = b$, on a

Fig. 254.



$$a + \frac{k^2}{a} = b + \frac{k^2}{b},$$

ou bien, sous une autre forme,

$$a - b = k^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{k^2(a-b)}{ab},$$

d'où résulte, si $a - b$ n'est pas nul,

$$k^2 = ab.$$

Ainsi $\overline{GC}$ est bien égal à $\frac{k^2}{a}$, et C est bien le centre d'oscillation quand on prend O pour centre de suspension. Ensuite, si l'on pose $\overline{OC} = l$ et qu'on nomme T la durée des petites oscillations du pendule autour des axes O ou C, on aura (n° 121)

$$(13) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

équation d'où l'on peut tirer la valeur de g quand les mesures expérimentales ont fait connaître l et T.

Les propriétés du pendule composé permettent aussi de déterminer expérimentalement son moment d'inertie par rapport à l'axe de suspension. En effet, l'équation (13), où π et g représentent des nombres connus, permet de calculer la longueur l du pendule simple équivalent, quand on a observé le temps T; portant ensuite cette longueur l dans l'équation (11), on pourrait en déduire Σmr^2 si la distance $a = \overline{OG}$ était connue. Or cette distance peut d'abord s'obtenir au moyen des formules qui définissent la position d'un centre de gravité quelconque (n° 150). Si les masses qui constituent le pendule ne sont pas suffisamment bien connues et définies, il sera mieux de déterminer a par un moyen expérimental. On écartera le pendule de sa position d'équilibre, en faisant agir sur lui, dans un plan perpendiculaire à l'axe, une force connue R à une distance donnée h. Soit alors θ l'angle de OG avec la verticale; on aura l'équation d'équilibre

$$Mga\sin\theta = Rh,$$

d'où l'on tirera a, quand on aura évalué par des mesures directes R, h, θ et le poids Mg du pendule.

Variation du temps des petites oscillations, quand on fait varier l'axe de suspension. — D'après la formule (13), on connaît T au moyen de l, et l'on voit notamment que les variations de ces deux quantités ont lieu dans le même sens; il suffit donc d'étudier l'influence des changements de l'axe de suspension sur la longueur l du pendule simple équivalent. Si l'on suppose d'abord que la direction de l'axe reste invariable, k^2 ne changera pas dans l'équation (12); par suite la longueur l et le temps $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ d'une petite oscillation dépendront uniquement de a. Donc ces quantités ne changeront pas lorsqu'on prendra pour axes de suspension du pendule successivement toutes les génératrices d'un cylindre circulaire, ayant pour section droite un cercle décrit de G comme centre avec un rayon arbitraire a, dans un plan perpendiculaire à la direction donnée de l'axe. A chacune de ces génératrices correspondra un axe d'oscillation, qu'on pourra également lui substituer sans altérer l et T; ces axes formeront un second cylindre circulaire, de rayon $\frac{k^2}{a}$, concentrique et parallèle au premier. Lorsque a variera de zéro à ∞, en conservant toujours la même direction de l'axe, l ou $a + \frac{k^2}{a}$ variera entre deux valeurs infinies, en passant par un minimum $2k$ pour $a = k$, valeur qui annule la dérivée

$$\frac{dl}{da} = 1 - \frac{k^2}{a^2}.$$

Si maintenant on fait varier la direction de l'axe, ce minimum $2k$ varie simultanément; en nommant k_1 le minimum de k, on voit que le *minimum minimorum* de l et celui de T seront respectivement $2k_1$ et $\pi\sqrt{\frac{2k_1}{g}}$. Pour trouver un axe de suspension qui les réalise, il faut déterminer l'axe du plus petit moment d'inertie, parmi toutes les droites passant en G, c'est-à-dire le grand axe de l'ellipsoïde central d'inertie du pendule (n° 218); Mk_1^2 étant le moment d'inertie correspondant, on décrirait autour de ce grand axe un cylindre circu-

laire de rayon k_1, et l'on prendrait pour axe de suspension une génératrice quelconque de ce cylindre.

Influence de l'air sur le mouvement du pendule composé. — La résistance opposée par un milieu fluide, l'air par exemple, à un solide en mouvement, ne peut être évaluée que d'une manière assez incertaine, dans l'état actuel de la Science. Sans entrer à ce sujet dans des détails qui ne seraient pas ici à leur place, nous admettrons, comme nous l'avons déjà fait ailleurs (n^{os} **115** et **121**), que l'action totale exercée sur le pendule par l'atmosphère puisse être réduite à deux forces : 1° la pression qu'il supporterait dans l'état d'équilibre, égale et contraire au poids du fluide déplacé, conformément au principe d'Archimède; 2° une force résistante proportionnelle au carré de la vitesse angulaire ou à $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$. La première est appliquée en un point qui coïncide avec le centre de gravité de la masse M' de l'air déplacé; on admettra que ce point ne se distingue pas du point G, ce qui est vrai si le pendule ainsi que l'air déplacé sont homogènes. Enfin nous représenterons par $A\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ la valeur absolue du moment de la seconde force relativement à l'axe de suspension, A désignant une constante convenablement déterminée pour chaque pendule.

Cela posé, la formule donnant l'accélération angulaire conduit à l'équation

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{\Sigma mr^2}\left[(M - M')ga\sin\alpha - A\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right]$$

ou bien, en nommant ρ le rapport des densités de l'air et du pendule $\left(\text{c'est-à-dire le rapport } \frac{M'}{M}\right)$ et posant $p = \frac{A}{\Sigma mr^2}$, $l = \frac{\Sigma mr^2}{Ma}$, $g' = g(1 - \rho)$,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g'}{l}\sin\alpha + p\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.$$

Cette équation est semblable en tous points à celle que

nous avons employée au n° 121, à l'occasion du pendule simple. On la traiterait de même et l'on en tirerait les mêmes conséquences, savoir :

La résistance proportionnelle au carré de la vitesse angulaire fait décroître successivement l'amplitude des petites oscillations, mais n'a pas d'effet sur leur durée;

La résistance verticale $M'g$ augmente dans le rapport $\frac{1}{1-\rho}$ la longueur du pendule simple équivalent et multiplie par $\sqrt{\frac{1}{1-\rho}}$ la durée des petites oscillations.

L'étude du pendule composé est une des applications les plus simples qu'on puisse faire de la théorie du mouvement des solides autour d'un axe fixe, sous l'action de forces données. Nous avons encore à présenter d'autres applications particulières, utiles au point de vue de la mécanique pratique. Mais nous les renvoyons plus loin, afin de ne pas interrompre par des digressions trop étendues l'exposé de la dynamique spéciale des solides.

§ III. — Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

229. *Moment résultant des quantités de mouvement du solide relativement au point fixe.* — Pour établir les équations du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, nous aurons à faire usage du troisième théorème général de la Dynamique (n° 200), et nous sommes ainsi conduit à calculer la somme des moments des quantités de mouvement du corps relativement à trois axes rectangulaires menés par le point fixe; voici d'abord ce calcul, d'où nous déduirons ensuite le moment résultant.

Fig. 255.

Quand un solide tourne autour d'un point fixe O (*fig.* 255), on sait que son mouvement élémentaire se réduit à chaque instant à une rotation autour d'un certain axe instantané OU (n° 24) et que ce mouvement peut se remplacer par trois

rotations autour de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (n° 36). Soit OU l'axe instantané; nommons

ω la vitesse angulaire autour de cet axe;
α, β, γ les angles qu'il fait avec Ox, Oy, Oz;
p, q, r les vitesses des rotations composantes autour des mêmes axes coordonnés.

On a

$$p = \omega\cos\alpha, \quad q = \omega\cos\beta, \quad r = \omega\cos\gamma,$$

et l'on sait de plus que la vitesse v d'un point M défini par les coordonnées x, y, z a pour composantes suivant les axes (n° 39)

$$(1) \qquad v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx.$$

La quantité de mouvement mv aura donc des composantes

$$mv_x = m(qz - ry), \quad mv_y = m(rx - pz),$$
$$mv_z = m(py - qx);$$

d'où il résulte que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à Ox sera (n° 103)

$$\Sigma m(yv_z - zv_y) = \Sigma m[y(py - qx) - z(rx - pz)]$$
$$= p\Sigma m(y^2 + z^2) - q\Sigma mxy - r\Sigma mzx.$$

Jusqu'à présent les axes coordonnés ont été supposés quelconques. Mais on est libre de choisir un système particulier dans lequel Ox coïnciderait avec la position actuelle d'un axe principal d'inertie du corps pour le point O; alors Σmxy et Σmzx s'annulent, et l'on a

$$\Sigma m(yv_z - zv_y) = p\Sigma m(y^2 + z^2)$$

ou simplement, en représentant par A le moment d'inertie $\Sigma m(y^2 + z^2)$ autour de cet axe principal

$$\Sigma m(yv_z - zv_y) = Ap.$$

Si l'on fait coïncider de même Oy et Oz avec les positions actuelles de deux autres axes principaux d'inertie du corps pour le point O, et qu'on nomme B et C les moments d'inertie correspondants, on trouverait, par des calculs tout sem-

blables, les sommes des moments des quantités de mouvement par rapport à ces axes Oy et Oz :

$$\Sigma m(zv_x - xv_z) = Bq, \quad \Sigma m(xv_y - yv_x) = Cr.$$

L'axe représentatif du moment résultant se trouve ainsi défini par ses projections Ap, Bq, Cr sur trois directions déterminées (n° 145).

Soit maintenant $\overline{OK} = k$ cet axe représentatif; ses cosinus directeurs par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie en O sont

$$\frac{Ap}{k}, \quad \frac{Bq}{k}, \quad \frac{Cr}{k};$$

ils sont donc proportionnels à Ap, Bq, Cr. Or p, q, r sont proportionnels aux coordonnées d'un point quelconque de OU et notamment à celles du point D où cette droite perce l'ellipsoïde d'inertie; car, en les désignant par x', y', z' et posant $\overline{OD} = l$, on aurait

$$p = \frac{\omega x'}{l}, \quad q = \frac{\omega y'}{l}, \quad r = \frac{\omega z'}{l};$$

donc les cosinus directeurs de OK sont proportionnels à Ax', By', Cz'. D'autre part, on sait (n° 218) que l'équation de l'ellipsoïde d'inertie rapporté à ses axes principaux est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

la normale en D à cet ellipsoïde aura donc aussi ses cosinus directeurs proportionnels à Ax', By', Cz', et par conséquent sa direction et celle de OK sont parallèles. Le plan perpendiculaire à OK (plan du moment résultant) est par conséquent parallèle au plan tangent en D à l'ellipsoïde; en d'autres termes, c'est le plan conjugué de l'axe instantané de rotation.

Quant à la longueur $\overline{OK}$, on peut l'exprimer d'abord par $\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$; mais en voici encore une autre expression remarquable. Soient i l'angle de OK avec l'axe instantané de rotation OU et I le moment d'inertie relatif à ce même axe; la projection $k \cos i$ de OK sur OU donne la somme des moments des quantités de mouvement par rap-

port à cette droite, laquelle est $I\omega$ (n° 222) ou $\frac{\omega}{l^2}$, puisque $\overline{OD} = l$ a été pris (n° 218) égal à $\frac{1}{\sqrt{I}}$; donc

$$k \cos i = \frac{\omega}{l^2} \quad \text{et par suite} \quad k = \frac{\omega}{l^2 \cos i}.$$

Nommant enfin δ la distance du point O au plan tangent à l'ellipsoïde en D, on remplacera $\cos i$ par $\frac{\delta}{l}$, et il viendra

$$k = \frac{\omega}{l\delta}.$$

On a donc en résumé les formules

$$(2) \qquad k = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2} = \frac{\omega}{l\delta},$$

$$(3) \quad \cos(k, x) = \frac{Ap}{k}, \quad \cos(k, y) = \frac{Bq}{k}, \quad \cos(k, z) = \frac{Cr}{k}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de faire l'application du troisième théorème général de la Dynamique.

230. *Équation d'Euler.* — Nous prendrons le troisième théorème général sous la forme particulière que lui a donnée M. Resal (n° 202), et nous allons en conséquence exprimer que la vitesse du point K (*fig.* 255) est égale à l'axe du moment résultant des forces extérieures par rapport au point O. Considérons un système d'axes rectangulaires fixes dans le solide et dont chacun soit un axe principal d'inertie pour le point O; l'ellipsoïde d'inertie pour ce point ayant toujours au moins trois axes principaux, un pareil système existe toujours. Soient Ox, Oy, Oz ce système; puisqu'il est immobile dans le corps, il possède actuellement le mouvement élémentaire de celui-ci, mouvement représenté par les rotations p, q, r autour des axes. Le point K a pour coordonnées actuelles Ap, Bq, Cr dans ce système d'axes (n° 229); s'il était entraîné avec eux, sans déplacement relatif, il aurait donc une vitesse dont les trois projections sur les mêmes

axes sont calculables par les formules (1) et ont les valeurs respectives

$$\begin{array}{lll} \text{Suivant } Ox \ldots\ldots & qCr - rBq = (C - B)qr, \\ \quad\text{»} \quad Oy \ldots\ldots & rAp - pCr = (A - C)rp, \\ \quad\text{»} \quad Oz \ldots\ldots & pBq - qAp = (B - A)pq. \end{array}$$

D'un autre côté, le point K possède aussi une vitesse par rapport au système Ox, Oy, Oz, puisque ses coordonnées Ap, Bq, Cr varient avec le temps; les composantes de cette vitesse relative sont (n° 12)

$$\frac{d.Ap}{dt}, \ \frac{d.Bq}{dt}, \ \frac{d.Cr}{dt} \quad \text{ou bien} \quad A\frac{dp}{dt}, \ B\frac{dq}{dt}, \ C\frac{dr}{dt}.$$

Donc celles de la vitesse absolue seront (n° 28)

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr, \quad B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp, \quad C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq.$$

Maintenant désignons par L, N, Q les trois sommes de moments des forces extérieures relativement aux axes Ox, Oy, Oz pris dans les positions qu'ils ont à l'instant auquel se rapportent les vitesses ci-dessus désignées par p, q, r. Ces trois quantités L, N, Q sont égales aux projections sur Ox, Oy, Oz de l'axe du moment résultant des forces extérieures (n° 145); donc elles sont aussi égales aux composantes, qu'on vient de calculer, de la vitesse du point K. Donc

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= L, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= N, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= Q. \end{aligned} \right.$$

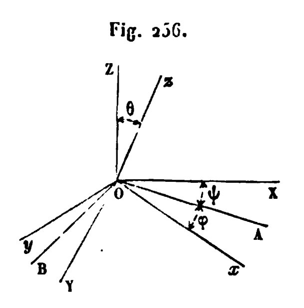
Ces équations se nomment *équations d'Euler*, parce que ce géomètre les a démontrées le premier d'une manière d'ailleurs toute différente de celle qu'on vient d'indiquer.

Si L, N, Q étaient exprimées au moyen de t, p, q, r et des dérivées de p, q, r par rapport au temps t, on conçoit que les équations (4) constitueraient un système de trois équations

différentielles simultanées, qui détermineraient p, q, r en fonction de t. Mais, d'une part, les moments L, N, Q sont en général dépendants de la position du corps, de sorte que leurs expressions algébriques contiennent les variables qui servent à la définir; d'autre part, quand même on serait arrivé à connaître p, q, r en fonction de t, il resterait encore à savoir comment on en déduirait la position occupée à chaque instant par le corps. De là résulte la nécessité de chercher les relations entre p, q, r et trois nouvelles inconnues définissant la position du solide pour un instant quelconque.

A cet effet, imaginons par le point fixe O d'abord trois axes fixes OX, OY, OZ (*fig.* 256), puis le système des trois axes principaux d'inertie considérés dans l'établissement des équations (4), ce second système Ox, Oy, Oz étant entraîné dans le mouvement du corps et restant fixe par rapport à lui. Pour définir la position du corps, il suffit de définir celle des axes mobiles, et l'on peut le faire au moyen de trois angles : 1° l'angle ψ que fait avec OX la trace OA du plan des xy sur le plan des XY; 2° l'angle θ de ces deux plans ou celui de leurs normales OZ, Oz; 3° l'angle φ de OA avec Ox. Quand ces trois angles seront donnés, on tracera d'abord la droite OA, définie par l'angle ψ dans le plan fixe XOY, puis on aura le plan des xy en menant par OA un plan faisant l'angle θ avec le plan XOY; on tracera ensuite, dans le plan xOy, les lignes Ox et Oy définies par les angles φ et $\frac{\pi}{2}+\varphi$, et, en y joignant la normale Oz, on aura le système des axes mobiles. Ce système a donc une position déterminée par les trois angles ψ, θ, φ, pourvu cependant que l'on compte chacun d'eux dans un sens bien déterminé; on pourra, par exemple, les compter dans le sens des rotations positives, le premier autour de Oz, le second autour de OA et le troisième autour de z. Considérons maintenant le corps dans deux positions infiniment voisines, la première répondant à l'époque t et aux angles ψ, θ, φ, la

Fig. 256.



seconde à l'époque $t + dt$ et aux angles $\psi + d\psi$, $\theta + d\theta$, $\varphi + d\varphi$; son mouvement élémentaire pendant le temps dt sera représenté par trois rotations $d\psi$, $d\theta$, $d\varphi$ autour de OZ, OA, Oz capables de faire prendre aux trois angles ψ, θ, φ les valeurs qu'ils doivent finalement avoir. Mais il l'est aussi par les trois rotations $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ autour de Ox, Oy, Oz, et, en exprimant les conditions de cette équivalence, on aura les relations entre p, q, r, ψ, θ, φ. Ces conditions consistent en ce que les deux systèmes doivent avoir une même somme de projections sur trois axes rectangulaires; car cela est nécessaire et suffisant pour qu'ils se réduisent à une même rotation résultante. Les projections s'obtiennent facilement sur les trois droites, rectangulaires entre elles, Oz, OA, OB, dont les deux premières ont déjà été mentionnées et la troisième fait avec OA un angle droit, compté comme les angles φ dans le plan des xy. Avant de procéder au calcul, faisons observer : 1° que OA est perpendiculaire à OZ comme étant dans le plan des XY, perpendiculaire à Oz comme étant le plan des xy, perpendiculaire à OB par construction; 2° que par conséquent Oz, OZ, OB sont dans un même plan et que $BOZ = \frac{\pi}{2} - \theta$, l'angle BO$z$ étant droit, puisque OB se trouve dans le plan des xy perpendiculaire à Oz; 3° que $BOy = AOx = \varphi$, comme ayant les côtés perpendiculaires. On en déduit les projections

	Sur OA.	Sur OB.	Sur Oz.
Premier système	$d\theta$.	$d\psi \sin\theta$,	$d\varphi + d\psi \cos\theta$,
Second »	$p\,dt \cos\varphi - q\,dt \sin\varphi$,	$p\,dt \sin\varphi + q\,dt \cos\varphi$,	$r\,dt$,

ce qui donne, en divisant par dt,

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\ &\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi, \\ &\frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt} = r. \end{aligned} \right.$$

Le plus souvent on écrit ces équations résolues par rapport

à p, q, r, sous la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} p = \quad \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \sin\theta \sin\varphi \dfrac{d\psi}{dt}, \\ q = - \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \sin\theta \cos\varphi \dfrac{d\psi}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

En joignant aux équations (4) l'un des groupes équivalents (5) ou (6), on a un système de six équations différentielles simultanées qui déterminent les six inconnues p, q, r, ψ, θ, φ en fonction du temps t, pourvu que L, N, Q soïent des fonctions données du temps, des six inconnues et de leurs dérivées par rapport à t. Cela constitue déjà une hypothèse très générale. A part les difficultés d'analyse, on peut donc regarder comme résolu le problème du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

Mais ces difficultés d'analyse sont considérables, et jusqu'à présent on n'a réussi à les surmonter que dans quelques cas particuliers. Nous citerons et traiterons seulement celui où l'on suppose les moments L, N, Q constamment nuls, c'est-à-dire les forces extérieures nulles ou tout au moins réductibles sans cesse à une résultante passant par le point fixe, ce qui rendrait applicable le principe de la conservation des aires (n° 203).

231. *Intégration des équations d'Euler, dans le cas où les forces extérieures ont toujours un moment résultant nul par rapport au point fixe.* — Le système (4) du n° 230 devient alors

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= 0, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= 0, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= 0, \end{aligned}$$

Ajoutant ensemble ces équations multipliées respectivement

par p, q, r, on trouve

$$A\frac{p\,dp}{dt}+B\frac{q\,dq}{dt}+C\frac{r\,dr}{dt}=0;$$

d'où résulte, en intégrant et désignant par h une constante,

$$(7)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h.$$

Si l'on avait ajouté les mêmes équations multipliées respectivement par Ap, Bq, Cr, on aurait eu

$$A^2\frac{p\,dp}{dt}+B^2\frac{q\,dq}{dt}+C^2\frac{r\,dr}{dt}=0$$

et, par l'intégration,

$$(8)\qquad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2,$$

k désignant une nouvelle constante.

On aurait pu arriver directement aux équations (7) et (8) par le théorème des forces vives et le théorème sur les moments des quantités de mouvement. Le travail élémentaire total des forces est égal (n° 102) à la somme de ceux qu'elles font dans les mouvements composants $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$; il a donc pour expression

$$(Lp+Nq+Qr)dt,$$

c'est-à-dire qu'il est nul, puisque L, N, Q le sont. Donc la force vive reste constante (n° 205). Or, si l'on nomme I le moment d'inertie relatif à l'axe instantané de rotation, cette force vive s'exprime (n° 222) par $I\omega^2$, ou, en mettant au lieu de I sa valeur en fonction de A, B, C (n° 218), par

$$\omega^2(A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma)=Ap^2+Bq^2+Cr^2;$$

la dernière expression égalée à une constante donne l'équation (7). D'un autre côté, puisque le moment résultant des forces extérieures relativement au point O est toujours nul, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est invariable en position et en grandeur dans l'espace (n° 203), et, comme sa valeur s'exprime par $\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}$ (n° 229), on en déduit l'équation (8).

Les équations (7) et (8) permettent d'avoir deux des vitesses

angulaires p, q, r en fonction de la troisième, par exemple p et q en fonction de r. On trouve successivement, par l'élimination de q et de p,

$$Ap^2(A-B) = k^2 - Bh + Cr^2(B-C),$$
$$Bq^2(A-B) = Ah - k^2 - Cr^2(A-C);$$

puis, si l'on porte les valeurs de p et de q dans la troisième équation d'Euler, il vient

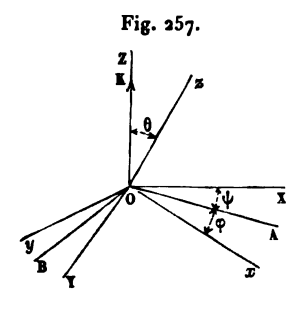
$$C\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{AB}}\sqrt{[k^2 - Bh + Cr^2(B-C)][Ah - k^2 - Cr^2(A-C)]}$$

ou bien

$$dt = \frac{C\,dr\sqrt{AB}}{\sqrt{[k^2 - Bh + Cr^2(B-C)][Ah - k^2 - Cr^2(A-C)]}}.$$

La relation entre r et t s'obtient, comme on le voit, par une quadrature qui peut s'effectuer, dans le cas général, au moyen des fonctions elliptiques. Les fonctions circulaires peuvent suffire lorsqu'on admet certaines relations particulières entre les moments d'inertie A, B, C et les constantes k et h; par exemple, si deux des moments d'inertie sont égaux entre eux, ou si l'une des quantités telles que $k^2 - Bh$ devient nulle, parce qu'alors il ne reste plus qu'un radical du second degré. Quoi qu'il en soit, quand on aura trouvé une des composantes p, q, r de la vitesse angulaire en la fonction de t, on connaîtra par cela même les deux autres au moyen des équations (7) et (8).

Fig. 257.



Il reste encore maintenant à chercher les angles ψ, θ, φ; voici comment on pourra procéder à cette recherche. Puisque l'axe OK du moment résultant des quantités de mouvement reste fixe en position, nous avons le droit de le choisir pour axe fixe des z; soient (*fig.* 257)

OX et OY les deux autres axes fixes, rectangulaires entre eux et avec le premier;

Ox, Oy, Oz les axes principaux d'inertie, mobiles avec le corps, axes dont la position est définie par les angles ψ, θ, φ;
OA et OB les mêmes lignes que ci-dessus.

Les projections de $\overline{OK} = k$ sur Oz et OB seront $k\cos\theta$ et $k\sin\theta$; de cette dernière, on déduit les composantes de k suivant Oy et Ox, savoir $k\sin\theta\cos\varphi$ et $k\sin\theta\sin\varphi$. Or on sait (n° 229) que les composantes de k, suivant les mêmes axes, ont aussi pour valeurs respectives Cr, Bq, Ap; donc on a les équations

$$(9)\qquad k\cos\theta = Cr, \quad k\sin\theta\cos\varphi = Bq, \quad k\sin\theta\sin\varphi = Ap,$$

qui font connaître θ et φ en fonction du temps, puisque p, q, r sont déjà déterminés au moyen du calcul précédent. Pour avoir le troisième angle ψ, on reprendra l'équation (n° 230)

$$\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi,$$

et l'on y mettra les valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ déduites des équations (9), ce qui donne

$$k\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = Ap^2 + Bq^2.$$

La première équation (9) et l'équation (7) des forces vives donnent encore

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{C^2 r^2}{k^2}, \quad Ap^2 + Bq^2 = h - Cr^2,$$

ce qui permet de transformer l'équation précédente en

$$(10)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{k(h - Cr^2)}{k^2 - C^2 r^2}.$$

Le second membre de l'équation (10) étant une fonction connue du temps, on en déduira ψ par une quadrature.

Nous avons parlé un peu plus haut du cas particulier où l'un des binômes analogues à $k^2 - Bh$ deviendrait nul, ce qui est une circonstance intéressante pour la simplicité des calculs. Il est bon d'observer que sur ses trois binômes

$$k^2 - Ah, \quad k^2 - Bh, \quad k^2 - Ch,$$

un seul peut s'annuler : c'est celui qui contient le moment

d'inertie moyen. Supposons, en effet, ces moments d'inertie ainsi rangés par ordre de grandeur :

$$A > B > C;$$

des égalités (7) et (8), on déduit

$$k^2 - Ah = Bq^2(B - A) + Cr^2(C - A),$$
$$k^2 - Bh = Ap^2(A - B) + Cr^2(C - B),$$
$$k^2 - Ch = Ap^2(A - C) + Bq^2(B - C),$$

et, par suite,

$$k^2 - Ah < 0, \quad k^2 - Ch > 0.$$

Au contraire, $k^2 - Bh$ se compose d'un terme positif et d'un terme négatif, de sorte que son signe n'est pas connu d'avance et que cette quantité peut devenir positive, négative ou nulle, suivant le choix particulier des données du problème. Il est cependant à remarquer que le signe de $k^2 - Bh$ serait également déterminé si le moment d'inertie moyen B devenait égal à A ou C, et enfin que les trois différences $k^2 - Ah$, $k^2 - Bh$, $k^2 - Ch$ seraient nulles dans le cas où l'on aurait $A = B = C$.

232. *Théorèmes de Poinsot.* — En se bornant à supposer que le moment résultant des forces extérieures par rapport au point fixe est toujours nul, Poinsot a fait ressortir un ensemble de propriétés fort remarquables du mouvement, et démontré divers théorèmes que nous pouvons donner maintenant comme des conséquences presque immédiates de faits déjà établis. Conservons le sens défini ci-dessus (nos 229 et 231) pour les notations l, δ, i, ω, I, h, k; nous avons trouvé, par application du théorème des forces vives, l'égalité

$$I\omega^2 = \text{const.} = h,$$

que nous pourrons écrire aussi sous la forme

$$\frac{\omega^2}{l^2} = h, \tag{11}$$

attendu que, suivant la définition même de l'ellipsoïde d'iner-

tie (n° 218), on a pris $l = \frac{1}{\sqrt{I}}$ ou $I = \frac{1}{l^2}$. D'un autre côté, l'invariabilité du moment résultant des quantités de mouvement conduit à la relation

$$(12) \qquad \frac{\omega}{l\delta} = k.$$

Cela posé, si l'on divise l'une par l'autre les deux équations précédentes, il vient

$$(13) \qquad \frac{\omega\delta}{l} = \frac{h}{k} \quad \text{ou} \quad \omega\cos i = \frac{h}{k};$$

donc :

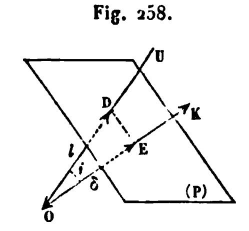
Théorème I. — *La composante de la vitesse angulaire instantanée, suivant l'axe du moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point fixe (ou suivant la normale au plan du maximum des aires décrites autour de ce point), a une valeur constante* $\frac{h}{k}$.

Maintenant on peut éliminer le rapport $\frac{\omega}{l}$ entre les équations (11) et (12); on trouve ainsi

$$(14) \qquad \delta = \frac{\sqrt{h}}{k} = \text{const.}$$

La distance δ entre le point fixe O (*fig.* 258) et le plan tangent (P) à l'ellipsoïde d'inertie du solide, pour le point D où il est rencontré par l'axe instantané de rotation OU, conserve donc une grandeur invariable. Or on sait déjà que la direction de ce plan tangent ne peut varier, car il est perpendiculaire à la droite fixe $\overline{OK} = k$, qui représente le moment résultant des quantités de mouvement par rapport à O; donc le plan (P) reste toujours le même, c'est-à-dire que :

Fig. 258.



Théorème II. — *Le plan tangent de l'ellipsoïde d'inertie pour le point fixe, mené à l'extrémité du rayon qui coïncide*

avec l'axe de la rotation instantanée, occupe une position fixe dans l'espace.

Enfin l'équation (11) exprime la constance du rapport $\frac{\omega}{l}$, et nous pouvons énoncer ce théorème :

Théorème III. — *La vitesse angulaire autour de l'axe instantané est dans un rapport constant $\sqrt{h}$ avec le rayon de l'ellipsoïde d'inertie dirigé suivant cet axe.*

L'ellipsoïde d'inertie pour le point O est donc, pendant toute la durée du mouvement, tangent à un plan fixe (P), et son déplacement élémentaire à chaque instant est, comme celui du solide auquel il appartient, une rotation autour d'un axe passant par le point de contact; nous pouvons donc dire, conformément à la définition du roulement donnée en Cinématique (n° 41), qu'il roule sur ce plan tangent. Ce n'est pas un roulement *simple,* parce que l'axe instantané de rotation OU, passant par le centre O de l'ellipsoïde, ne peut pas être contenu dans le plan tangent; le roulement est accompagné de pivotement, mais cela n'empêche pas le point de contact de se déplacer également sur les deux surfaces tangentes l'une à l'autre. Nous avons vu d'ailleurs (n° 41) qu'il se déplace nécessairement sur les deux, quand le roulement existe en réalité, de sorte que l'axe de rotation ne peut rester fixe ni dans le corps, ni dans l'espace, sauf une exception que nous allons indiquer.

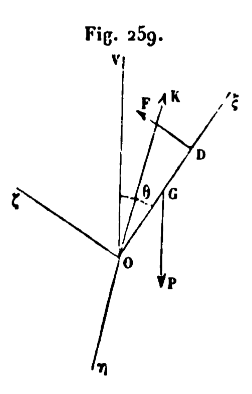
Lorsque l'axe instantané de rotation coïncide avec un des axes principaux de l'ellipsoïde (c'est-à-dire avec un axe principal d'inertie du solide pour le point fixe O), il est normal au plan tangent; par suite, le point de contact ne se déplace plus, et le mouvement se réduit alors à un pivotement qui persiste indéfiniment autour du même axe. En outre, puisque le rayon l ne varie pas, la vitesse angulaire ne varie pas non plus, et la rotation est uniforme.

233. *Mouvement d'un solide de révolution homogène, fixé par un point de son axe.* — Dans ce cas particulier, on pourrait encore suivre la méthode d'Euler ci-dessus développée; si l'axe de révolution était pris pour axe des x, on devrait seu-

lement supposer $B = C$ dans les équations obtenues au n° 230. Mais on peut aussi employer d'autres variables qui paraissent mieux appropriées au cas dont il s'agit et donnent au calcul plus d'élégance et de simplicité.

Soient O le point fixe (*fig.* 259), $O\xi$ l'axe de révolution du corps, mobile avec lui; OV une ligne fixe menée par le point O. Quand le corps se déplace, ce qui paraît tout d'abord le plus intéressant à suivre, ce sont les déplacements de l'axe, car la position de cette seule ligne donne déjà celle de l'ensemble du corps. Or la position de l'axe sera définie si l'on donne : 1° l'angle ψ dont le plan $VO\xi$ a tourné autour de OV à partir d'un plan fixe passant aussi par cette ligne; 2° l'angle θ de OV avec $O\xi$. En ajoutant la connaissance d'un troisième angle φ, celui dont le corps tourne autour de $O\xi$ pendant que cette droite se déplaçait, comme on vient de le dire, on aurait la définition complète du déplacement du corps. Quant à son mouvement élémentaire pendant un temps dt, il correspond aux trois différentielles $d\psi$, $d\theta$, $d\varphi$, qu'on peut regarder comme produites par trois rotations, avec les vitesses angulaires

Fig. 259.



$$\frac{d\psi}{dt} = \omega \text{ autour de OV,}$$

$$\frac{d\theta}{dt} \text{ autour de la perpendiculaire } O\eta \text{ au plan } VO\xi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega' \text{ autour de } O\xi.$$

Le mouvement du plan $VO\xi$ autour de OV se nomme *précession*, et la rotation autour de $O\eta$ se nomme *nutation*. Ces termes, empruntés à l'Astronomie, auraient ici la signification qu'on leur a donnée dans cette science, si $O\xi$ était l'axe de la Terre et OV la perpendiculaire au plan de l'écliptique. Quant à la rotation autour de $O\xi$, qu'il faut joindre aux deux précédentes, nous l'appellerons *rotation propre* du corps, dénomination dont on va bientôt comprendre le motif.

Prenons maintenant pour axes rectangulaires les lignes $O\xi$, $O\eta$ et une troisième ligne droite $O\zeta$ perpendiculaire à $O\xi$ dans le plan $VO\xi$. D'après une remarque faite à la fin du n° **218**, ces axes constituent un système de trois axes principaux d'inertie pour le point O; mais, contrairement à ce qui avait lieu dans la méthode d'Euler, ils se déplacent à la fois dans le corps et dans l'espace; leur mouvement est défini par la variation des angles ψ et θ, tandis que celui du solide comporte en outre la variation de φ. Comme on le voit, la rotation propre du corps est ce qui distingue son mouvement de celui des axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Si l'on cherche les composantes p, q, r de la vitesse angulaire instantanée du corps suivant les trois axes, on trouvera respectivement

$$p = \omega' + \omega\cos\theta, \quad q = \frac{d\theta}{dt}, \quad r = \omega\sin\theta.$$

Les axes mobiles auraient en moins la vitesse ω'; les composantes p', q', r' de leur rotation instantanée suivant $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ seraient donc

$$p' = \omega\cos\theta = r\cot\theta, \quad q' = q, \quad r' = \omega\sin\theta = r.$$

Soient encore A le moment d'inertie du solide relativement à $O\xi$; B le moment d'inertie pour tout axe perpendiculaire mené en O; $\overline{OK} = k$ l'axe représentatif du moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point O. Les composantes de cet axe ou les coordonnées de son extrémité K dans le système $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ seront (n° **229**)

$$\xi = Ap, \quad \eta = Bq, \quad \zeta = Br;$$

la vitesse relative du même point relativement aux axes aura pour composantes

$$\frac{d\xi}{dt} = A\frac{dp}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = B\frac{dq}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = B\frac{dr}{dt}.$$

Quant aux composantes de la vitesse d'entraînement v' du même point K, considéré comme lié aux axes mobiles, on

sait (nº 39) qu'elles ont pour valeurs

$$v'_\xi = q'\zeta - r'\eta = qBr - rBq = 0,$$
$$v'_\eta = r'\xi - p'\zeta = rAp - r\cot\theta Br = Apr - Br^2\cot\theta,$$
$$v'_\zeta = p'\eta - q'\xi = r\cot\theta . Bq - qAp = Bqr\cot\theta - Apq.$$

Si donc on égale les composantes de la vitesse absolue du point K suivant $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ respectivement aux sommes des moments L, N, Q des forces extérieures par rapport à ces mêmes droites, on aura

$$(15)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = L, \\ B\dfrac{dq}{dt} + Apr - Br^2\cot\theta = N, \\ B\dfrac{dr}{dt} + Bqr\cot\theta - Apq = Q. \end{cases}$$

Il faudrait encore joindre à ces trois équations les trois suivantes :

$$(16)\qquad p = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta,\quad q = \frac{d\theta}{dt},\quad r = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta,$$

et l'on aurait six équations différentielles simultanées qui détermineraient p, q, r, ψ, θ, φ en fonction du temps t, si toutefois L, N, Q étaient données en fonction de t, des inconnues et de leurs dérivées par rapport à t. Le problème consistant à trouver le mouvement du corps est donc réduit à une pure question d'analyse.

234. *Cas particulier d'une précession uniforme sans nutation, avec rotation propre uniforme.* — Après la rotation autour d'un axe fixe, le mouvement le plus simple qu'on puisse imaginer pour le solide considéré au nº 233 consisterait en une rotation uniforme autour de son axe de figure, pendant que celui-ci tournerait uniformément autour de OV, sans nutation. Cherchons les moments L, N, Q capables d'entretenir ce mouvement. On doit supposer ici, les notations restant celles du nº 233,

$$(17)\quad \theta = \text{const.},\quad q = 0,\quad \frac{d\psi}{dt} = \omega = \text{const.},\quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega' = \text{const.};$$

d'où l'on tire

$$p = \text{const.}, \quad r = \text{const.},$$

et par substitution dans les équations (15),

$$(18) \qquad L = 0, \quad Q = 0, \quad N = Apr - Br^2 \cot\theta.$$

Les équations (18), déduites de l'hypothèse exprimée par les équations (17), sont des conditions nécessaires pour la réalisation de cette hypothèse.

Réciproquement, si le moment résultant des forces extérieures satisfait aux conditions (18) et si q est nul à l'origine du temps, le mouvement du corps consistera en une rotation uniforme autour de son axe de figure, avec précession uniforme autour de OV, sans nutation, conformément aux équations (17). Les deux premières équations (15) donnent en effet

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad p = \text{const.}, \quad q = \text{const.} = 0.$$

En vertu de $Q = 0$, $q = 0$, la dernière équation (15) donne $\frac{dr}{dt} = 0$ ou $r = \text{const.}$; alors, q étant nul et p constant ainsi que r, les équations (16) montrent immédiatement que θ, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ restent aussi invariables.

Nous n'avons fait jusqu'à présent aucune hypothèse sur les forces extérieures, ni sur la direction de la ligne OV. Dorénavant nous supposerons le corps soumis à la pesanteur et la ligne OV verticale. Soit P le poids total, qui agit parallèlement à OV, au centre de gravité G situé sur $O\xi$, à la distance $\overline{OG} = a$ du point O. Supposons en outre une force F appliquée en un point D de $O\xi$, à la distance $\overline{OD} = l$, dans le plan vertical $VO\xi$ et parallèlement à $O\zeta$. Si aucune autre force extérieure n'agit (à part celles qui pourraient passer en O), nous aurons

$$L = 0, \quad Q = 0, \quad N = Pa\sin\theta - Fl,$$

et l'on voit que les conditions (18) seront satisfaites en posant seulement

$$Pa\sin\theta - Fl = Apr - Br^2\cot\theta.$$

Donc on pourrait, en appliquant au point D, parallèlement à $O\zeta$, la force F déterminée par cette relation, produire le mouvement particulier dont nous nous occupons, c'est-à-dire rendre invariables les valeurs de θ, p, r (ou de θ, ω, ω') qui existeraient à l'instant où commencerait l'action de cette force.

La force additionnelle F sera nulle, et les valeurs initiales de θ et des vitesses angulaires se conserveront sous la seule action du poids, quand elles vérifieront la relation

$$(19) \qquad Pa\sin\theta = Apr - Br^2\cot\theta.$$

On peut introduire dans cette relation, au lieu de p et r, la vitesse de précession ω et la vitesse ω' de la rotation propre du corps autour de son axe de figure; il suffit d'y faire $p = \omega' + \omega\cos\theta$, $r = \omega\sin\theta$, ce qui donne

$$A\omega\sin\theta(\omega' + \omega\cos\theta) - B\omega^2\sin\theta\cos\theta = Pa\sin\theta.$$

Nous laisserons de côté la solution $\sin\theta = 0$; dans ce cas l'axe $O\xi$ serait vertical et le mouvement se réduirait à une rotation uniforme $\omega + \omega'$ autour d'une droite fixe, sous l'action d'un moment nul, la droite fixe étant d'ailleurs axe principal d'inertie au centre de gravité. C'est un cas déjà connu (n° 224), et dans lequel il n'y a plus, à proprement parler, de précession. L'équation précédente, débarrassée du facteur $\sin\theta$ et ordonnée par rapport à ω, devient

$$(20) \qquad (A - B)\omega^2\cos\theta + A\omega\omega' - Pa = 0.$$

Pour chaque valeur de la rotation propre ω', il y a deux valeurs de ω fournies par l'équation (20), qui rendent le phénomène possible; ces valeurs sont

$$\omega_1 = \frac{-A\omega' + \sqrt{A^2\omega'^2 + 4Pa(A - B)\cos\theta}}{2(A - B)\cos\theta},$$

$$\omega_2 = \frac{-A\omega' - \sqrt{A^2\omega'^2 + 4Pa(A - B)\cos\theta}}{2(A - B)\cos\theta}.$$

Si ω' est très grand, le radical se remplace approximativement par

$$A\omega'\left[1 + \frac{2Pa(A - B)\cos\theta}{A^2\omega'^2}\right],$$

et les deux racines de l'équation (20) deviennent

$$\omega_1 = \frac{Pa}{A\omega'}, \quad \omega_2 = -\frac{A\omega'}{(A-B)\cos\theta} - \frac{Pa}{A\omega'};$$

l'une est très petite et indépendante de θ, l'autre est très grande et devient infinie pour $\theta = 90°$.

En donnant au corps, à l'origine du mouvement, les vitesses ω' et ω_1 (ou ω' et ω_2), θ reste constant, ainsi que la vitesse de précession et la vitesse propre ω' autour de l'axe de figure.

235. *Mouvement le plus général d'un solide de révolution pesant et homogène fixé par un point de son axe.* — On ne suppose aucune condition devant être remplie par les vitesses ω, ω', q à l'instant initial, mais on admet que l'action de la pesanteur soit la seule force directement appliquée au corps de révolution homogène, dont on s'est occupé aux nos 233 et 234. D'abord on a, en conservant les mêmes notations,

$$L = 0, \quad N = Pa\sin\theta, \quad Q = 0;$$

et les équations (15) deviennent

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & A\frac{dp}{dt} = 0, \\ & B\frac{dq}{dt} + Apr - Br^2\cot\theta = Pa\sin\theta, \\ & B\frac{dr}{dt} + Bqr\cot\theta - Apq = 0. \end{aligned} \right.$$

En vertu de la première de ces équations p est constant; la troisième multipliée par $\sin\theta$ peut s'écrire, eu égard à $p =$ const. et à $q = \frac{d\theta}{dt}$,

$$\frac{d}{dt}(Ap\cos\theta + Br\sin\theta) = 0;$$

donc on a, en désignant par θ_0 et r_0 les valeurs initiales de θ et de r pour $t = 0$,

$$(22) \quad Ap\cos\theta + Br\sin\theta = Ap\cos\theta_0 + Br_0\sin\theta_0,$$

ce qu'on aurait pu trouver aussi par l'application du troisième théorème général relativement à l'axe OV (n° 200). Le premier membre de l'équation (22) représente en effet la projection de $\overline{OK}$ sur OV à un instant quelconque, puisque c'est la somme des projections des composantes Ap, Bq, Br de cette droite; c'est donc aussi la somme des moments des quantités de mouvement du corps par rapport à OV. Or cette somme doit rester constante, car les poids des divers points matériels sont parallèles à OV et ont un moment nul relativement à cette droite (n° 103), tout comme les réactions du point fixe O qui complètent l'ensemble des forces extérieures.

Ajoutons ensuite la seconde et la troisième des équations (21), après les avoir respectivement multipliées par q et r; il viendra

$$B\frac{q\,dq + r\,dr}{dt} = Paq\sin\theta = Pa\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

d'où résulte, en nommant encore q_0 la valeur initiale de q,

$$(23)\qquad \frac{1}{2}B(q^2 + r^2 - q_0^2 - r_0^2) = Pa(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

équation que donnerait immédiatement le théorème des forces vives (n° 205). En effet, les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ étant des axes principaux d'inertie, auxquels correspondent les moments d'inertie A, B, B et les composantes p, q, r de la vitesse angulaire du corps, la force vive s'exprime (n° 231) par

$$Ap^2 + Bq^2 + Br^2 \quad \text{ou par} \quad Ap^2 + B(q^2 + r^2).$$

Comme p est constant, le premier terme ne varie pas, en sorte que le premier membre de l'équation (23) exprime le demi-accroissement de la force vive du corps. Le second membre représente, comme il est aisé de le constater, le travail du poids total appliqué au centre de gravité G, ou la somme des travaux des poids élémentaires (n° 153); l'égalité des deux membres résulte bien du théorème des forces vives.

De l'équation (22) on tire

$$(24)\qquad r = \frac{1}{B\sin\theta}[Ap(\cos\theta_0 - \cos\theta) + Br_0\sin\theta_0],$$

puis on a, par l'équation (23), après avoir remplacé r par sa valeur (24),

$$(25) \quad q = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} b_0^2 + r_0^2 + \frac{2Pa}{B}(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ \quad - \frac{1}{B^2 \sin^2\theta}[Ap(\cos\theta_0 - \cos\theta) + Br_0 \sin\theta_0]^2 \end{array} \right\}}.$$

Cette relation est de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta);$$

on en déduit par une quadrature

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{f(\theta)} = F(\theta) - F(\theta_0),$$

en représentant par $F(\theta)$ l'intégrale indéfinie de $\frac{d\theta}{f(\theta)}$. On connaît ainsi implicitement θ en fonction de t. Observons ensuite que les équations (24) et (25) déterminent r et q en fonction de θ et par suite en fonction de t; d'ailleurs p conserve toujours sa valeur initiale. Au moyen des relations (n° 233)

$$\omega = \frac{r}{\sin\theta}, \quad \omega' = p - \omega\cos\theta,$$

on aurait la vitesse de précession et la vitesse propre autour de l'axe de figure; enfin, au moyen des relations

$$\omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad \omega' = \frac{d\varphi}{dt},$$

on aurait les angles ψ et φ qui, conjointement avec θ, définissent la position du corps, savoir

$$\psi = \int \omega\, dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\omega\, d\theta}{f(\theta)}, \quad \varphi = \int \omega'\, dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\omega'\, d\theta}{f(\theta)}.$$

Le mouvement se trouve ainsi, par de simples quadratures, portant toujours sur des fonctions de θ connues sous forme finie et exprimables algébriquement au moyen de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ seulement.

La discussion de l'équation (25) conduit à quelques remarques intéressantes. Soit donné $q_0 > 0$; dans le commencement du mouvement $\frac{d\theta}{dt}$ est positif, le radical doit se prendre positivement dans l'équation (25) et θ va en croissant avec t. Mais θ ne peut pas croître jusqu'à la valeur π, car la quantité sous le radical, égale à q_0^2 pour $\theta = \theta_0$, deviendrait égale à $-\infty$ pour $\theta = \pi$, et $\frac{d\theta}{dt}$ passerait par des valeurs imaginaires, ce qui est absurde. Donc θ ne pourra croître au delà d'une certaine limite θ_1 comprise entre θ_0 et π, pour laquelle le radical passe par zéro. Arrivé à θ_1 l'angle θ ne pourra plus que rester constant ou décroître. S'il restait constant, q resterait toujours nul, r conserverait également une valeur r_1 déterminée par l'équation (24), et, dans tous les cas, p ne varie point; on arriverait donc à un état particulier de mouvement identique avec celui qu'on a étudié au n° 234, et par conséquent il faudrait que p, r_1, θ_1, Pa, A, B vérifiassent l'équation (19), ce qui en général ne se réalisera pas pour des données choisies au hasard. Sans nous occuper davantage de ce cas exceptionnel, admettons donc que θ va décroître à partir de l'époque où l'on aura $\theta = \theta_1$, et que par conséquent il faut à cet instant prendre négativement le radical de l'équation (25). La dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ repassera en ordre inverse par les valeurs qu'elle avait prises entre θ_0 et θ_1, mais avec un signe contraire; θ décroîtra donc d'une manière également symétrique, et en arrivant à $\theta = \theta_0$ la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ aura la valeur $-q_0$. A partir de là θ continue à diminuer, puisque sa dérivée est négative; mais, par une raison toute semblable à celle qu'on vient de donner pour la limite θ_1, il ne pourra franchir une limite θ_2 comprise entre θ_0 et zéro, pour laquelle le radical de l'équation (25) s'annulera de nouveau. Laissant encore de côté le cas singulier où θ pourrait conserver indéfiniment la valeur θ_2, on voit qu'à partir de l'instant où elle se produit $\frac{d\theta}{dt}$ change encore de signe, θ recommence à croître jusqu'à θ_1, puis décroît de θ_1 à θ_2, revient

de θ_2 à θ_1, et ainsi de suite indéfiniment. Il y a donc oscillation de l'axe de figure $O\xi$ entre deux angles θ_1, θ_2, racines de l'équation

$$q_0^2 + r_0^2 + \frac{2Pa}{B}(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \frac{1}{b^2\sin^2\theta}[Ap(\cos\theta_0 - \cos\theta) + Br_0\sin\theta_0]^2 = 0,$$

ces deux racines devant comprendre entre elles θ_0 et étant, parmi toutes celles de l'équation, celles qui sont les plus voisines de θ_0, tant au-dessus qu'au-dessous.

L'hypothèse $q_0 < 0$ se discuterait de la même manière. On constaterait que θ décroît d'abord jusqu'à la limite θ_2 ci-dessus trouvée, croît ensuite jusqu'à l'autre limite θ_1, puis décroît de nouveau jusqu'à θ_2, revient à θ_1, et ainsi de suite indéfiniment. En supposant la même valeur absolue à q_0, on retrouverait tout à fait le même mouvement que dans l'hypothèse $q_0 > 0$, avec cette seule différence que l'origine du temps aurait été déplacée et mise à l'instant où θ, après avoir atteint sa limite θ_1, serait revenu à θ_0 pour la première fois.

Supposons enfin $q_0 = 0$. Alors, si l'on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta) &= B^2r_0^2\sin^2\theta + 2BPa\sin^2\theta(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ &\quad - [Ap(\cos\theta_0 - \cos\theta) + Br_0\sin\theta_0]^2 \\ &= B^2r_0^2(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0) - 2BPa\sin^2\theta(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ &\quad - A^2p^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2 - 2ABpr_0\sin\theta_0(\cos\theta_0 - \cos\theta),\end{aligned}$$

l'équation (25) pourra s'écrire

$$q = \frac{1}{B\sin\theta}\sqrt{\mathcal{F}(\theta)}.$$

Par hypothèse q_0 est nul; donc $\mathcal{F}(\theta_0) = 0$, et pour des valeurs de θ très peu différentes de θ_0 qui se produiront tout d'abord, on aura, d'après la formule de Taylor,

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta_0) + (\theta - \theta_0)\mathcal{F}'(\theta_0) = (\theta - \theta_0)\mathcal{F}'(\theta_0),$$

d'où résulte

$$(26) \qquad q = \frac{1}{B\sin\theta_0}\sqrt{(\theta - \theta_0)\mathcal{F}'(\theta_0)}.$$

Or on tire de l'expression ci-dessus donnée de $\mathcal{F}(\theta)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(\theta) &= 2B^2r_0^2\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + 4BPa\sin\theta\cos\theta(\cos\theta_0 - \cos\theta) + 2BPa\sin^3\theta \\ &\quad + 2A^2p^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin\theta - 2ABpr_0\sin\theta_0\sin\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(\theta_0) &= 2B^2r_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0 + 2BPa\sin^3\theta_0 - 2ABpr_0\sin^2\theta_0 \\ &= 2B\sin^2\theta_0(Br_0^2\cot\theta_0 + Pa\sin\theta_0 - Apr_0).\end{aligned}$$

En imaginant que cette valeur soit reportée dans l'équation (26), on voit tout de suite que θ doit commencer par croître ou par décroître suivant que

$$(27) \qquad Br_0^2\cot\theta_0 + Pa\sin\theta_0 - Apr_0$$

est positif ou négatif, car autrement q deviendrait imaginaire, ce qui est impossible. Connaissant par là le signe des premières valeurs de $\frac{d\theta}{dt}$ ou q, on rentre dans l'un des cas précédemment étudiés $q_0 > 0$, $q_0 < 0$, lesquels répondent respectivement aux signes $+$ et $-$ de l'expression (27). Si cette expression s'annulait, on serait dans le cas singulier traité au n° 234, celui d'une précession et d'une rotation propre toutes deux uniformes, sans nutation, car l'équation (19) serait alors vérifiée; θ conserverait indéfiniment la valeur θ_0. On pourrait le prouver d'une autre manière, en constatant (ce que nous nous dispenserons de faire) que $\mathcal{F}''(\theta_0)$ est nécessairement négative quand $\mathcal{F}'(\theta_0)$ est nulle; comme, d'autre part, $\mathcal{F}(\theta)$ peut, dans les premiers temps à partir de l'époque où $\theta = \theta_0$, être remplacée par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta) &= \mathcal{F}(\theta_0) + (\theta - \theta_0)\mathcal{F}'(\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2\mathcal{F}''(\theta_0) \\ &= \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2\mathcal{F}''(\theta_0),\end{aligned}$$

il en résulte

$$q = \frac{\theta - \theta_0}{B\sin\theta_0}\sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{F}''(\theta_0)},$$

valeur imaginaire si θ diffère de θ_0.

Lorsque θ varie et oscille entre deux limites θ_1 et θ_2, on peut reconnaître que ces deux limites tendent à se rapprocher de

plus en plus, à mesure que p devient plus considérable. La condition pour que q soit réel, c'est-à-dire pour que le radical porte sur une quantité positive dans l'équation (25), peut, en effet, s'écrire

$$[\mathrm{A}p(\cos\theta_0 - \cos\theta) + \mathrm{B}r_0 \sin\theta_0]^2$$
$$< \mathrm{B}^2 \sin^2\theta \left[q_0^2 + r_0^2 + \frac{2\mathrm{P}a}{\mathrm{B}}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right];$$

il en résulte *a fortiori*

$$(28)\quad [\mathrm{A}p(\cos\theta_0 - \cos\theta) + \mathrm{B}r_0 \sin\theta_0]^2 < \mathrm{B}^2\left(q_0^2 + r_0^2 + \frac{4\mathrm{P}a}{\mathrm{B}}\right),$$

car on a nécessairement augmenté le second membre de la première inégalité en remplaçant dans le second membre $\sin^2\theta$ par 1 et $\cos\theta_0 - \cos\theta$ par 2, pourvu que, en outre, on considère le produit $\mathrm{P}a$ comme toujours positif, quelle que soit la position du centre de gravité G. Désignons maintenant par V, V′, V″ les valeurs absolues de

$$\mathrm{B}\sqrt{q_0^2 + r_0^2 + \frac{4\mathrm{P}a}{\mathrm{B}}},\quad \mathrm{A}p(\cos\theta_0 - \cos\theta),\quad \mathrm{B}r_0 \sin\theta_0.$$

Le premier membre de l'inégalité (28) est le carré d'une certaine quantité positive, qui peut avoir pour expression, suivant les cas,

$$V' + V'' \text{ ou } V' - V'' \text{ ou } V'' - V'.$$

Dans le premier cas, l'inégalité donnerait

$$V' + V'' < V \quad \text{ou} \quad V' < V - V'';$$

dans le second, elle donnerait

$$V' - V'' < V \quad \text{ou} \quad V' < V + V'';$$

dans le troisième, on aurait

$$V' < V''.$$

Donc, dans tous les cas, V′ ou $\mathrm{A}p(\cos\theta_0 - \cos\theta)$ a une limite finie, au plus égale à $V + V''$, et, par suite, la valeur absolue de $\cos\theta_0 - \cos\theta$ reste toujours inférieure à celle de la constante $V + V''$ divisée par $\mathrm{A}p$, quotient qui tend indéfiniment

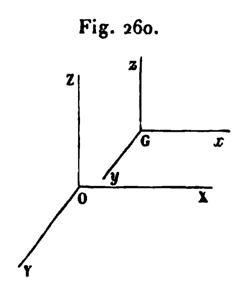
vers zéro quand p croît de plus en plus. Quand le cosinus varie peu, il en est de même de l'angle; donc θ varie peu dans le cas d'une grande valeur de p, et, pour l'œil d'un observateur, le corps semble se mouvoir sans nutation, avec des valeurs constantes de θ, r et p. On retombe donc en apparence dans le cas du n° 234.

§ IV. — Mouvement d'un solide libre, soumis à des forces quelconques.

236. *Solution générale du problème.* — Lorsqu'on connaît toutes les forces extérieures appliquées à un solide libre, le premier théorème général de la Dynamique (n° 198) permet déjà de déterminer le mouvement du centre de gravité du corps; on se rappelle, en effet, que ce point se meut comme s'il réunissait la masse totale M du système et s'il était sollicité par la résultante de translation des forces extérieures, de sorte que la question se réduit à trouver le mouvement d'un point matériel sous l'action de forces données. On sait mettre le problème en équation (n° 104), et sa solution ne comporte plus que des difficultés d'analyse.

Imaginons maintenant des axes de direction constante Gx, Gy, Gz (*fig.* 260), ayant toujours leur origine au centre de gravité G. Puisque le mouvement de ce point est désormais censé connu, on pourra retrouver à toute époque la position du point G relativement à des axes fixes OX, OY, OZ parallèles aux axes mobiles, et, par suite, la position du corps à l'époque dont il s'agit sera aussi parfaitement connue, si l'on parvient à trouver le déplacement qu'il a pris relativement au système Gx, Gy, Gz. Il ne s'agit donc plus que de déterminer le mouvement relatif du corps par rapport à des axes de direction constante passant au centre de gravité. Ce mouvement relatif ayant lieu autour du point fixe G, on voit qu'il y a possibilité de le déterminer (toujours sauf les difficultés d'ordre

Fig. 260.



purement analytique) par l'emploi de la méthode d'Euler (nº 230). Or les forces ne figurent dans cette méthode que par leurs moments relativement à des axes passant par le point G; d'autre part, on a déjà eu l'occasion de démontrer (nº 209) que, pour des axes menés par G, les forces apparentes à introduire, afin d'avoir le droit de traiter comme absolu le mouvement relatif dont il s'agit ici, ont une somme de moments constamment nulle. Donc ces forces disparaîtront d'elles-mêmes, et le mouvement s'effectuera autour du centre de gravité sous la seule action des forces extérieures réelles, comme autour d'un point véritablement fixe.

On voit, par conséquent, que le problème consistant à trouver le mouvement d'un solide libre, sous l'action de forces extérieures données, se ramène à deux problèmes déjà résolus.

237. *Forces équivalentes au point de vue du mouvement.* — Nous ajouterons encore une observation relativement aux systèmes de forces qu'on peut substituer les uns aux autres sans altérer le mouvement d'un solide. Supposons d'abord, pour fixer les idées, le cas d'un solide parfaitement libre. Le mouvement du centre de gravité est déterminé par la résultante de translation des forces extérieures, et le mouvement autour du centre de gravité par leur moment résultant relativement à ce point; ces deux mouvements composants déterminent eux-mêmes, comme on vient de le voir, le mouvement absolu du solide. Or les systèmes de forces, qu'on a nommés *équivalents* en Statique (nº 137), jouissent de la double propriété d'avoir même résultante de translation et même moment résultant relativement à un point quelconque; il y a, pour cela seulement, six conditions à remplir, savoir que les sommes algébriques de projections et de moments soient les mêmes dans les deux systèmes pour trois axes rectangulaires choisis comme on voudra. Si ces conditions sont remplies, les deux systèmes seront équivalents, non seulement au point de vue de l'équilibre d'un solide, mais encore à celui du mouvement qu'ils pourront lui communiquer.

Si le corps n'est pas libre, on pourra toujours le considérer comme tel, en tenant compte des forces *a priori* inconnues que peuvent exercer sur lui les obstacles opposés à son mou-

vement. Les équations du mouvement se poseront alors comme si le corps était libre; deux systèmes équivalents de forces y produiront encore les mêmes termes et, par conséquent, pourront se substituer l'un à l'autre sans altérer aucune des équations qui déterminent soit le mouvement du corps, soit les forces qu'il reçoit de la part des obstacles. On peut citer comme exemple le cas traité aux nos 222 et suivants d'un solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe; il est aisé de constater que les formules établies pour trouver son mouvement et les réactions des appuis ne contiennent que les sommes de projections des forces extérieures données sur trois axes rectangulaires, et les sommes de leurs moments relativement à ces mêmes axes.

238. *Mouvement pris par un solide libre animé d'une vitesse initiale, à la suite d'une ou plusieurs percussions simultanées; choc de deux solides animés de mouvements quelconques.* — Comme application des généralités qui précèdent, nous allons chercher la modification de mouvement produite sur un solide libre par une ou plusieurs percussions, dont toutes les actions sont renfermées dans un seul intervalle de temps θ extrêmement court. On peut d'ailleurs admettre que certaines percussions agissent seulement pendant une partie de la durée θ, cela est indifférent. On suppose donnée la position du corps, laquelle reste sensiblement invariable pendant toute la durée du phénomène considéré (no 195); on donne, en outre, le mouvement du solide au commencement de cette durée, lequel est défini par la vitesse V_0 du centre de gravité G (*fig.* 261) et par la vitesse angulaire ω_0 qui a lieu, au même instant, autour d'un certain axe GU_0 mené par le point G. Après le temps θ, quand les percussions auront cessé d'agir, V_0 et ω_0 seront devenus V_1 et ω_1, et l'axe de rotation se sera changé en GU_1. Il s'agit de trouver V_1, ω_1 et l'axe GU_1, en donnant, bien entendu, les forces de percussion ou tout au moins leurs impulsions totales pendant le temps θ, en position, grandeur, direction et sens; soient R_1 la résultante de translation

Fig. 261.

de ces impulsions totales, S_1 l'axe représentatif de leur moment résultant par rapport à G.

Afin de résoudre la question, nous appliquerons le théorème de d'Alembert modifié pour le cas des forces instantanées (n° 193), consistant en ce qu'il y a équilibre entre les quantités de mouvement perdues et les impulsions de ces forces. Soient d'abord les droites $\overline{GA_0}$, $\overline{GA_1}$ représentant en grandeur, direction et sens les quantités de mouvement MV_0, MV_1 qu'aurait la masse entière M condensée au centre de gravité G: la quantité de mouvement perdue par ce point idéal de masse M sera représentée par la droite $\overline{A_1A_0}$, et, puisqu'il se meut comme s'il était soumis à l'impulsion R_1, A_1A_0 est égale et contraire à R_1. Pour construire $\overline{GA_1}$, il suffira donc de porter au bout de la droite connue $\overline{GA_0}$ une longueur égale et parallèle à R_1 et de même sens; ayant obtenu $\overline{GA_1}$, on connaîtra par là même $V_1 = \frac{\overline{GA_1}}{M}$.

Imaginons maintenant, portées sur les axes de rotation, les longueurs représentatives $\overline{GU_0} = \omega_0$, $\overline{GU_1} = \omega_1$. La rotation perdue est représentée par la ligne $\overline{GU}$, second côté d'un parallélogramme GU_1U_0U qui a $\overline{GU_0}$ comme diagonale et $\overline{GU_1}$ comme premier côté; nommons ω cette rotation perdue. Les quantités de mouvement perdues dans le mouvement autour du centre de gravité G répondent à cette rotation ω; leur moment résultant par rapport à G est représenté (n° 229) par un axe k perpendiculaire au plan tangent mené à l'ellipsoïde central d'inertie, en son point de rencontre avec GU; la grandeur de cet axe est $\frac{\omega}{l\delta}$ ou $\frac{\omega}{l^2 \cos i}$, en nommant l le rayon vecteur de l'ellipsoïde suivant GU, δ la distance de G au plan tangent et i l'angle aigu de ces deux lignes. Or l'axe k est connu, puisqu'il est égal et directement opposé à la droite donnée S_1. Pour construire $\overline{GU}$, nous mènerons donc à l'ellipsoïde un plan tangent perpendiculaire à S_1 et nous joindrons le point de contact avec G; cette construction nous donne la droite indéfinie autour de laquelle se fait la rotation $\omega = \overline{GU}$, et, de plus, elle fait connaître l et δ. On en déduit la valeur absolue de ω, puisque $\frac{\omega}{l\delta}$ ou $\frac{\omega}{l^2 \cos i}$ est

égal à S_1 changé de sens. Connaissant ω ou $\overline{GU}$, on pourrait construire le triangle GUU_0, d'où l'on déduirait $\overline{GU_1}$ ou ω_1, ligne égale et parallèle à $\overline{UU_0}$; la rotation finale ω_1 se trouverait ainsi déterminée par son axe représentatif.

Toutefois il reste à indiquer dans quel sens on doit porter, suivant la direction de la droite indéfinie GU, la valeur absolue ci-dessus trouvée pour la vitesse angulaire ω. A cet effet, on remarquera d'une manière générale que, si une rotation ω autour d'une droite Ox donne lieu à des quantités de mouvement ayant un moment résultant k relativement au point O, la projection de k sur Ox représente le moment total des mêmes quantités de mouvement par rapport à Ox, lequel est toujours de même sens que la rotation ω. Il en résulte que l'axe représentatif k et celui de la rotation ω font nécessairement un angle aigu. Or ici k est égal et contraire à S_1, ligne donnée; donc l'axe représentatif $\overline{GU}$ de ω fait un angle obtus avec cette ligne S_1, ce qui achève de le déterminer, puisqu'on a déjà sa grandeur.

Considérons le cas particulier où les percussions se réduisent à une seule force agissant suivant une droite déterminée (D), qui passe à la distance r du centre de gravité G. Alors l'impulsion R_1 sera celle de cette force, le moment S_1 aura son axe perpendiculaire au plan mené par G et (D), et sa valeur sera $R_1 r$. Les équations qui déterminent la vitesse u gagnée dans sa translation commune avec G et la vitesse angulaire w gagnée dans sa rotation autour de ce point, c'est-à-dire les vitesses $\frac{\overline{A_1A_0}}{M}$ et ω changées de sens, deviennent

$$Mu = R_1, \quad \frac{w}{l^2 \cos i} = R_1 r = Mur.$$

L'axe des rotations w est le diamètre conjugué du plan G(D), dans l'ellipsoïde central d'inertie; il fait l'angle i avec la normale à ce plan. En nommant ρ le rayon de giration du solide autour de cet axe, on aurait, conformément à la définition de l'ellipsoïde d'inertie (n° 218), $M\rho^2 = \frac{1}{l^2}$, et, par suite,

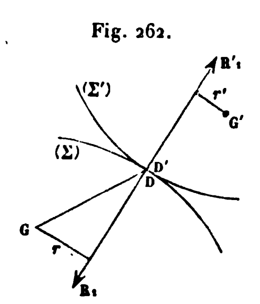
$$w = \frac{ur \cos i}{\rho^2}.$$

On peut encore, en vue d'une question que nous allons bientôt traiter, décomposer cette rotation en deux, l'une autour de la normale au plan G(D), l'autre autour d'un axe contenu dans ce plan; les rotations composantes seraient

$$w\cos i = \frac{ur\cos^2 i}{\rho^2} \quad \text{et} \quad w\sin i = \frac{ur\sin i\cos i}{\rho^2}.$$

Il n'est pas difficile maintenant de déterminer l'impulsion totale R_1 que reçoit un solide soumis au choc d'un autre solide, quand tous deux ont des mouvements donnés à l'époque t_0 où le choc va commencer, ce qui permet de déterminer ensuite la modification de mouvement produite par le choc. Pour résoudre cette question, nous admettons l'hypothèse simplificative d'un frottement nul; nous commencerons, en outre, par supposer les corps dénués d'élasticité. A l'époque t_0, les deux solides (Σ), (Σ') se touchent par le point (D, D') de leurs surfaces limitatives (*fig.* 262); ces points D et D', actuellement confondus, ont des vitesses connues répondant aux mouvements acquis des deux corps, et nous nommons v_0, v'_0 ces vitesses respectives, évaluées en projection sur la normale commune, dans le sens positif $D'R'_1$. Pour qu'il y ait choc, la condition nécessaire et suffisante est que la différence algébrique $v_0 - v'_0$ soit positive, car alors le point D du solide (Σ) tendrait à pénétrer dans l'intérieur de (Σ'); nous admettrons que cette condition est remplie. Cela posé, nous voyons d'abord que de l'impulsion R_1 agissant en D sur le corps Σ, suivant la normale commune, naissent: 1° la vitesse $u = \frac{R_1}{m}$ gagnée par tous les points du corps; 2° la rotation gagnée $w = \frac{Mur\cos i}{\rho^2}$, qui a lieu autour d'un axe passant en G, et que nous imaginons remplacée par ses composantes $w\sin i$, $w\cos i$, comme on vient de le dire. Par suite, v_0 va se modifier en raison de ces mouvements. La vitesse u est parallèle à R_1 et donne une projection $-u$ sur $D'R'_1$; la composante $w\sin i$ produit en D une vi-

Fig. 262.



tesse perpendiculaire au plan GMR_1 dont la projection est nulle, et $w\cos i$ produit au même point une vitesse $w\cos i\,\overline{GD}$, qui a pour projection $-w\cos i\,\overline{GD}\cos DGR$ ou $-\dfrac{ur^2\cos^2 i}{\rho^2}$.

La nouvelle valeur v_1, prise par v_0 à la fin du choc, sera donc

$$v_1 = v_0 - u\left(1 + \frac{r^2\cos^2 i}{\rho^2}\right).$$

Pareillement on établirait que la vitesse v'_0 devient, après le choc,

$$v'_1 = v'_0 + u'\left(1 + \frac{r'^2\cos^2 i'}{\rho'^2}\right),$$

en désignant par des lettres accentuées les quantités analogues à v_1, u, r, ρ, i, qui se rapportent au corps (Σ'). Pour que le choc soit terminé, il faut (n° 215) que ces nouvelles valeurs v_1, v'_1 soient égales, c'est-à-dire que

$$v_0 - v'_0 = u\left(1 + \frac{r^2\cos^2 i}{\rho^2}\right) + u'\left(1 + \frac{r'^2\cos^2 i'}{\rho'^2}\right);$$

d'ailleurs l'égalité des actions mutuelles (n° 95) donne

$$R_1 = R'_1 \quad \text{ou} \quad Mu = M'u',$$

R'_1 et M' étant de même l'impulsion reçue par le second corps et sa masse. On trouve alors par l'élimination de u'

$$R_1 = Mu = M'u' = \frac{MM'(v_0 - v'_0)}{M'\left(1 + \dfrac{r^2\cos^2 i}{\rho^2}\right) + M\left(1 + \dfrac{r'^2\cos^2 i'}{\rho'^2}\right)}.$$

L'impulsion R_1 étant ainsi déterminée, on connaît par là même les vitesses gagnées u, w, u', w', et l'on en conclurait sans peine le mouvement de chaque corps après la fin du choc, en composant son mouvement initial avec celui que le choc lui a fait gagner.

Si l'on supposait l'élasticité parfaite, au lieu de la supposer nulle, la période de compression serait suivie d'une période de dilatation symétrique, dans laquelle l'action mutuelle repasserait par les mêmes valeurs, en ordre inverse et après les mêmes intervalles de temps. La valeur de R_1 se trouverait

donc doublée, et il en serait de même pour les vitesses gagnées u, w, u', w'.

Nous avons eu pour but principal, dans ce Chapitre, d'exposer les théories générales formant le corps de doctrine qui constitue la Dynamique spéciale des solides; nous en avons fait seulement quelques applications, sans autre but que de bien faire comprendre la théorie et sans les multiplier beaucoup, par crainte de nuire à l'enchaînement des idées dans l'exposition de la théorie générale.

Dans le Chapitre suivant, nous allons étudier une série plus étendue d'applications nouvelles, dont les unes seront données simplement à titre d'exercice et les autres en raison de l'intérêt qu'elles peuvent avoir dans la Mécanique pratique.

CHAPITRE TROISIÈME.

APPLICATIONS DE LA DYNAMIQUE SPÉCIALE DES SOLIDES.

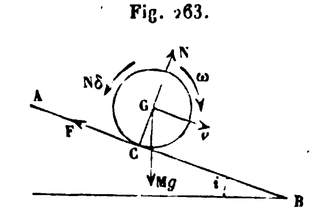
---

§ I. — Problèmes théoriques divers.

239. *Roulement d'un cylindre circulaire horizontal, suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné.* — Supposons un cylindre circulaire homogène; le centre de gravité est au milieu de l'axe de figure, et la section droite passant par ce point partage le corps en deux moitiés symétriques.

Quand un cylindre roule sur un plan, ses génératrices conservent une direction constante; si donc l'axe est d'abord horizontal, il le sera toujours, et les génératrices viendront successivement coïncider avec les horizontales du plan.

Fig. 263.



Prenons pour plan de la figure le plan de la section droite du cylindre passant au centre de gravité G (*fig.* 263), et considérons d'abord le cas du mouvement descendant. Soient désignés par

i l'angle du plan incliné avec le plan horizontal;
δ la distance caractéristique de la résistance au roulement (n° 169), eu égard à la nature du plan et du corps;
M la masse de ce corps;
Mg son poids;
v la vitesse de G, parallèle à la ligne de plus grande pente AB;
ω la vitesse angulaire autour de l'axe du cylindre dans son mouvement autour de son centre de gravité;
a le rayon du cylindre;
k son rayon de giration relativement à son axe de figure;

N, F les composantes normale et tangentielle de la réaction du plan.

Ces forces doivent être, par raison de symétrie, contenues dans le plan de la figure.

Puisque le cylindre roule sur le plan, par hypothèse, le point de contact C doit avoir une vitesse nulle; or cette vitesse résulte de la composition d'une vitesse d'entraînement v avec une vitesse relative ωa, de même direction, mais de sens contraire. Donc

$$v = a\omega. \tag{1}$$

L'application du premier théorème général (nº 198) donne ensuite

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin i - F, \tag{2}$$

$$0 = Mg\cos i - N. \tag{3}$$

Le mouvement autour du centre de gravité est une rotation autour d'un axe fixe dans le corps; on a le droit de le considérer comme absolument fixe (nº 236), sans avoir à tenir compte d'aucune force apparente. Les forces extérieures réelles sont : 1º le poids Mg; 2º la réaction tangentielle F; 3º la réaction normale N, appliquée à la distance δ en avant du point de contact c (nº 169), qu'on peut transporter parallèlement à elle-même en ce point, à la condition de lui joindre un couple $N\delta$ de sens contraire à la rotation ω. Cela posé, l'application du théorème de l'accélération angulaire (nº 222) à ce mouvement autour de l'axe G conduit à l'équation

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = Fa - N\delta, \tag{4}$$

ce qui complète le nombre des équations nécessaires pour déterminer v, ω, N, F. L'élimination de cette dernière inconnue entre l'équation (4) et l'équation (2), où l'on aura remplacé $\frac{dv}{dt}$ par $a\frac{d\omega}{dt}$, donne d'abord

$$M(k^2 + a^2)\frac{d\omega}{dt} = Mga\sin i - N\delta;$$

d'où l'on déduit, en mettant pour N sa valeur tirée de (3) et résolvant,

$$(5)\qquad a\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} = g\frac{\sin i - \frac{\delta}{a}\cos i}{1 + \frac{k^2}{a^2}}.$$

Si le corps glissait sans frottement sur le plan incliné, son accélération s'obtiendrait par l'équation (2), en y faisant $F = 0$, et serait $g\sin i$; on voit que dans le cas du roulement l'accélération du centre de gravité devient moindre, car $g\sin i$ se trouve multiplié par le facteur $1 - \frac{\delta}{a}\cot i$ inférieur à 1, et divisé par le facteur $1 + \frac{k^2}{a^2}$ qui, au contraire, dépasse l'unité. La remarque subsiste même dans le cas limite où l'on pourrait négliger la résistance au roulement et faire $\delta = 0$.

L'accélération $\frac{dv}{dt}$ du centre de gravité ou l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ autour du centre de gravité est constante, d'après l'équation (5); les deux mouvements sont donc uniformément accélérés.

L'équation (3) nous a fourni la valeur de la réaction normale N; complétons le calcul en cherchant celle de la réaction tangentielle F. Nous tirons de (2)

$$F = M\left(g\sin i - \frac{dv}{dt}\right)$$

et, en substituant la valeur (5) de $\frac{dv}{dt}$,

$$(6)\quad F = Mg\sin i\left(1 - \frac{1 - \frac{\delta}{a}\cot i}{1 + \frac{k^2}{a^2}}\right) = Mg\sin i\,\frac{k^2 + a\delta\cot i}{k^2 + a^2}.$$

Or, d'après la théorie du frottement (n° 167), la réaction tangentielle du plan ne peut pas dépasser la limite qui aurait lieu dans le cas du glissement, c'est-à-dire fN ou $fMg\cos i$,

si l'on nomme f le coefficient de frottement du cylindre sur le plan incliné. Donc il faut, pour que le roulement puisse exister comme on l'a supposé *a priori*, qu'on ait

$$(7)\quad \begin{cases} f\cos i > \sin i\,\dfrac{k^2 + a\delta\cot i}{k^2 + a^2} \\ \text{ou bien} \\ [f(k^2 + a^2) - a\delta]\cot i > k^2. \end{cases}$$

Pour que cette inégalité soit satisfaite, il faut d'abord que f soit supérieur à $\dfrac{a\delta}{k^2 + a^2}$ et, cela étant, que $\operatorname{tang} i$ n'atteigne pas la valeur $f\left(1 + \dfrac{a^2}{k^2}\right) - \dfrac{a\delta}{k^2}$. En termes généraux, mais moins précis, on peut dire que le coefficient de frottement ne doit pas être trop petit ni l'inclinaison du plan trop grande.

Si la condition (7) du roulement n'était pas remplie, le glissement se produirait et F prendrait la valeur limite $f\mathrm{M}g\cos i$. Les équations du mouvement seraient alors

$$\mathrm{M}\frac{dv}{dt} = \mathrm{M}g\sin i - f\mathrm{M}g\cos i$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = g\sin i - f\cos i, \quad 0 = \mathrm{M}g\cos i - \mathrm{N},$$

$$\mathrm{M}k^2\frac{d\omega}{dt} = fa\mathrm{M}g\cos i - \mathrm{M}g\delta\cos i$$

ou

$$k^2\frac{d\omega}{dt} = g\cos i(fa - \delta);$$

on les établirait de même par l'application de la méthode générale indiquée au n° 237. Ces équations suffisent pour déterminer les trois inconnues v, ω et N. On constate encore que $\dfrac{dv}{dt}$ et $\dfrac{d\omega}{dt}$ sont constants, de sorte que les mouvements du centre de gravité et autour de ce point sont uniformément accélérés.

Considérons encore le cas du roulement ascendant. Les vitesses v et ω ont changé de sens, ainsi que le moment $\mathrm{N}\delta$;

nous supposons, sauf vérification ultérieure, que la force inconnue F conserve le sien.

Les équations du mouvement s'obtiennent par une méthode toute pareille à celle qu'on a employée dans le cas de la descente; elles deviennent

$$v = a\omega,$$

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg\sin i + F,$$

$$o = N - Mg\cos i,$$

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = -Fa - N\delta,$$

et l'on en tire bien facilement

$$\frac{dv}{dt} = a\frac{d\omega}{dt} = -g\frac{\sin i + \frac{\delta}{a}\cos i}{1 + \frac{k^2}{a^2}},$$

$$N = Mg\cos i,$$

$$F = Mg\sin i\frac{k^2 - a\delta\cot i}{k^2 + a^2}.$$

Le sens de la force F n'est pas absolument déterminé *a priori,* car son expression peut devenir négative, et alors le sens deviendrait opposé à celui qui est marqué sur la figure; la force serait descendante. Dans tous les cas il faut, pour qu'il y ait roulement, que la valeur absolue de F soit inférieure à $fMg\cos i$.

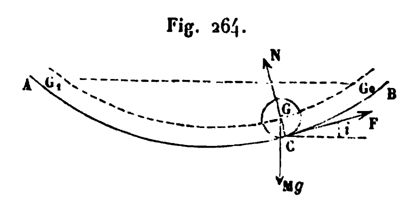
Si l'on nomme v_0 la valeur initiale de la vitesse v, la vitesse du centre de gravité aussi bien que la vitesse angulaire s'annuleront au bout d'un temps exprimé par $\frac{v_0}{g\sin i}\cdot\frac{1 + \frac{k^2}{a^2}}{1 + \frac{\delta}{a}\cot i}$, après quoi le mouvement devient descendant et suit les lois trouvées dans le premier cas.

Il n'y aurait rien à changer aux calculs précédents, si l'on substituait au cylindre un autre corps de révolution homogène, tel qu'une sphère ou un ellipsoïde, symétrique par rap-

port à un équateur passant par le centre de figure ou de gravité, et roulant suivant une ligne de plus grande pente du plan incliné, de manière que son axe restât toujours horizontal. Il faudrait seulement, bien entendu, adopter la valeur de k correspondant à la figure du solide.

240. *Oscillations d'une sphère pesante, roulant à l'intérieur d'un cylindre horizontal.* — Soit AB (*fig.* 264) la section droite d'un cylindre horizontal fixe, à l'intérieur duquel roule, parallèlement au plan de cette section droite, une

Fig. 264.



sphère pesante ayant son centre projeté en G; la sphère étant supposée homogène, le centre de gravité se confond avec ce point et décrit une courbe G_0G_1, parallèle à AB, à une distance égale au rayon a de la sphère. Le mouvement de la sphère peut toujours, suivant la méthode générale du n° 236, se décomposer en une translation égale au déplacement du centre de gravité et une rotation autour de l'axe horizontal mené par ce point. Il s'agit, comme dans le problème précédent, de déterminer les deux mouvements composants, la réaction qui s'exerce au point de contact et la condition pour que le roulement puisse avoir lieu. Pour plus de simplicité, on admettra que la résistance au roulement puisse être négligée, et l'on fera la distance caractéristique $\delta = 0$; on conservera les notations du n° 239, et l'on nommera de plus

ρ le rayon de courbure de la trajectoire G_0G_1 pour le point G;

y la hauteur verticale dont le point G est descendu au-dessous de sa position initiale G_0, répondant à $t = 0$, où sa vitesse initiale sera supposée nulle;

x le déplacement horizontal correspondant à y.

On a d'abord, comme conséquence de l'hypothèse du roule-

ment,

$$v = a\omega; \tag{1}$$

puis on a les équations du mouvement du centre de gravité et autour de ce point :

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin i - F, \tag{2}$$

$$M\frac{v^2}{\rho} = -Mg\cos i + N, \tag{3}$$

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = Fa. \tag{4}$$

Si l'on joignait à ces relations

$$\operatorname{tang} i = \frac{dy}{dx}, \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \quad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

et l'équation $y = F(x)$ de la courbe donnée G_0G_1, on aurait le nombre voulu d'équations pour déterminer v, ω, x, y, i, ρ, N, F en fonction du temps. Mais, sans entreprendre un pareil calcul, on arrive simplement, par le procédé qui suit, à se faire une idée nette du mouvement. En éliminant F et ω entre les équations (1), (2) et (4), il vient

$$\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\frac{dv}{dt} = g\sin i; \tag{5}$$

multipliant ensuite cette équation par $v\,dt = ds$ et observant que $ds\sin i = dy$, nous trouvons

$$\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)v\,dv = g\,dy$$

ou, en intégrant entre G_0 et G,

$$\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)v^2 = 2gy. \tag{6}$$

L'équation (6) aurait pu se déduire directement du théorème des forces vives (n° 205). D'après un théorème établi au

n° 210, la force vive de la sphère a pour valeur $Mv^2 + Mk^2\omega^2$, soit $Mv^2\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)$, eu égard à l'équation (1); c'est aussi la valeur de son accroissement depuis la position G_0 du centre de gravité, puisque la valeur correspondante de v était nulle. Le travail de la pesanteur est Mgy (n° 153); donc

$$\frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) = Mgy,$$

ce qui, sauf le facteur $\frac{1}{2}M$, reproduit identiquement l'équation (6). On retrouverait encore la même équation dans le mouvement d'un point pesant le long de la courbe G_0G_1, à la condition que l'accélération g due à la pesanteur fût diminuée dans le rapport $\frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}}$. Cette considération donne une idée nette du mouvement du centre de gravité; il va exécuter une série indéfinie d'oscillations entre le point de départ G_0 et le point G_1 situé à la même hauteur de l'autre côté du point le plus bas. Ce sera un mouvement de pendule simple (n° 121), si la section droite AB est un cercle, et le temps T d'une oscillation aura pour valeur

$$T = \pi\sqrt{\frac{\rho\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)}{g}}.$$

Un point isolé descendant d'une hauteur y, sans vitesse initiale, le long d'une courbe sans frottement, acquiert une vitesse dont le carré est $2gy$; ici le point G acquiert une vitesse moindre, dont le carré n'est plus que $\frac{2gy}{1 + \frac{k^2}{a^2}}$. Cela tient à ce que le travail de la pesanteur est employé partiellement à augmenter la force vive dans le mouvement autour du centre de gravité; ou, si l'on veut, cela tient à la force F qui, transportée au point G, tend à retarder sa descente. La valeur de cette force F se trouve par l'élimination de $\frac{dv}{dt}$ entre

les équations (2) et (5); elle est

$$(7)\qquad F = Mg\sin i\left(1 - \frac{a^2}{a^2+k^2}\right) = Mg\sin i\,\frac{k^2}{a^2+k^2}.$$

Quant à la condition du roulement, elle serait toujours $F < fN$, c'est-à-dire, en vertu des équations (3) et (7),

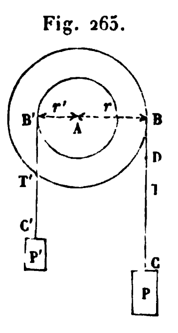
$$\frac{k^2\sin i}{k^2+a^2} < f\left(\cos i + \frac{v^2}{\rho g}\right).$$

Les points où cette condition risque le plus de ne pas être satisfaite (au moins quand l'inclinaison de la courbe G_0G_1 est toujours croissante en s'éloignant du point le plus bas) sont les points d'écart maximum G_0 ou G_1, car $\sin i$ devient alors le plus grand possible, pendant qu'au contraire $\cos i$ prend sa plus petite valeur et que v^2 s'annule. Si donc on nomme i' le plus grand des deux angles aigus que les tangentes en G_0 et G_1 font avec l'horizontale, il suffira de vérifier qu'on a

$$f > \frac{k^2\tan g\, i'}{k^2+a^2}.$$

241. *Mouvement d'un treuil horizontal soumis à deux poids, en tenant compte du frottement des tourillons.* — Nous supposons que le treuil soit bien *centré*, c'est-à-dire que son centre de gravité se trouve sur l'axe de rotation projeté en A (*fig.* 265); nous supposons de plus que l'axe A soit axe principal d'inertie en tous ses points (n° 220). Dans ces conditions, on sait (n°s 223 et 224) que les forces d'inertie ont une résultante de translation nulle et des sommes de moments nulles relativement à deux axes rectangulaires menés par un point quelconque de l'axe A; elles se réduisent donc à un couple contenu dans un plan perpendiculaire à cette dernière droite.

Fig. 265.



Maintenant désignons par

P un poids moteur agissant, par l'intermédiaire d'un cordon

parfaitement flexible, sur une poulie ou un tambour de rayon $\overline{AB} = r$, et déterminant le mouvement du treuil dans le sens de son action;

P′ un poids résistant qui agit de même sur une poulie de rayon r';

a le rayon de giration du treuil relativement à l'axe A;

Π son poids;

ρ le rayon des deux tourillons, f le coefficient de leur frottement sur les coussinets, $f_1 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ le sinus de l'angle de ce frottement;

T, T′ les tensions des cordons BC, B′C′ aux points d'attache C, C′;

ω la vitesse angulaire du treuil.

L'accélération du poids P sera $r\frac{d\omega}{dt}$, d'où résulte l'équation

$$(1)\qquad \frac{P}{g} r \frac{d\omega}{dt} = P - T,$$

obtenue par la considération du mouvement que prend le centre de gravité du poids P; de même le mouvement vertical de P′ conduit à

$$(2)\qquad \frac{P'}{g} r' \frac{d\omega}{dt} = T' - P'.$$

Remarquons ensuite que la tension T ne varie pas dans toute la longueur du cordon BC, si la masse est supposée négligeable; car alors on peut négliger les poids et les forces d'inertie des parties qui le composent, de manière qu'une portion, telle que DC, doit être considérée comme en équilibre, conformément au principe de d'Alembert (n° 193), sous la seule influence des tensions en ses points extrêmes. Donc la tension T en C est aussi la tension en un point quelconque D et notamment au point B où le cordon se détache de sa poulie. Le même raisonnement pouvant se répéter pour le cordon B′C′, on voit que le treuil est soumis en B et B′ aux forces T et T′, résultant de sa liaison avec les poids P et P′.

D'après le principe de d'Alembert, le treuil est en équilibre sous l'action de ses forces d'inertie et des forces extérieures réelles, qui sont : 1° T et T', 2° son poids Π, 3° les réactions des coussinets. Comme les forces d'inertie ne donnent lieu qu'à un couple situé dans un plan perpendiculaire à l'axe, on peut transporter ce couple dans un autre plan parallèle au sien et passant par l'un des deux appuis, et la théorie du treuil donnée dans la Statique (n[os] 179 et 180) montre qu'il n'a aucune influence sur les réactions de ceux-ci. Les forces T, T' et Π étant verticales et descendantes, les réactions seront aussi verticales, auront une somme $T + T' + \Pi$ et produiront des frottements dont le moment total par rapport à l'axe A, en sens contraire du mouvement, sera $f_1\rho(T + T' + \Pi)$. Donc on aura, par application du théorème sur l'accélération angulaire d'un solide autour d'un axe fixe (n° 222)

$$\frac{\Pi a^2}{g}\frac{d\omega}{dt} = Tr - T'r' - f_1\rho(T + T' + \Pi). \tag{3}$$

Les équations (1), (2) et (3) déterminent $\frac{d\omega}{dt}$, T et T'; elles donnent pour ces trois inconnues des valeurs indépendantes du temps. Ainsi les tensions T, T' ne varient pas pendant la durée du mouvement, lequel est uniformément varié, aussi bien pour les poids P et P' que pour le treuil. On tire d'abord des équations (1) et (2)

$$T = P\left(1 - \frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt}\right), \quad T' = P'\left(1 + \frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt}\right),$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), donnent

$$\frac{\Pi a^2}{g}\frac{d\omega}{dt} = Pr\left(1 - \frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt}\right) - P'r'\left(1 + \frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt}\right)$$
$$- f_1\rho\left(\Pi + P + P' - \frac{Pr}{g}\frac{d\omega}{dt} + \frac{P'r'}{g}\frac{d\omega}{dt}\right)$$

et par suite

$$\frac{1}{g}[\Pi a^2 + Pr^2 + P'r'^2 + f_1\rho(P'r' - Pr)]\frac{d\omega}{dt}$$
$$= Pr - P'r' - f_1\rho(\Pi + P + P').$$

Connaissant ainsi $\frac{d\omega}{dt}$, on en déduira facilement les tensions T, T', ainsi que les accélérations $r\frac{d\omega}{dt}$, $r'\frac{d\omega}{dt}$ des deux poids P, P'.

Exemple particulier. — Supposons d'abord un poids P en C', et de l'autre côté, en C, mettons un poids égal augmenté d'une surcharge p; soient, de plus,

$$r' = r, \quad a^2 = 0,8\,r^2, \quad f_1\rho = 0,01\,r.$$

La dernière formule donne alors

$$\frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt} = \frac{0,99p - 0,01(\Pi + 2P)}{0,8\Pi + 2P + 0,99p}.$$

Si l'on fait encore $\Pi = P = 4p$, il vient

$$\frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt} = 0,07137.$$

Avec ces données, on voit que l'accélération $r\frac{d\omega}{dt}$ du poids P serait réduite à $0,07137g$ ou environ $\frac{1}{14}$ de celle que prend un corps tombant librement suivant une verticale. Le raisonnement qu'on donne habituellement dans les Traités élémentaires de Physique, au sujet de la machine d'Atwood, conduirait à poser

$$\frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{2P + p} = \frac{1}{9} = 0,11111.$$

Ce raisonnement consiste à dire que la force p, capable de donner l'accélération g à la masse du poids p, doit donner le mouvement à la masse du poids total $2P + p$, et que, par conséquent, l'accélération se trouvera réduite dans le rapport des masses; cela est inexact, même dans l'hypothèse d'un frottement nul, en ce qu'on néglige la masse du treuil. Quand on fait $f = 0$, le produit $f_1\rho$ devient nul, au lieu de prendre la valeur $0,01\,r$ ci-dessus admise; on trouve alors

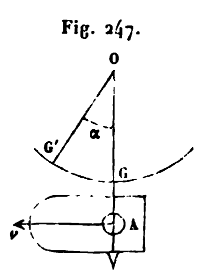
$$\frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{2P + p + 0,8\Pi}$$

ou bien, avec les rapports que nous avons attribués à Π, P et p,

$$\frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{12,2} = 0,08197.$$

242. *Pendule balistique.* — Le pendule balistique est un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe horizontal O (*fig.* 266); il présente une cavité dans laquelle se trouve du sable tassé, maintenu par une feuille de plomb. Le pendule, d'abord en repos, reçoit le choc d'un projectile A qui, lancé perpendiculairement au plan vertical de l'axe O, entre dans le sable et reste uni au pendule après le choc. L'observation du mouvement pris par les deux corps réunis à la suite du choc permet, comme on va le voir, de déterminer la vitesse que possédait le projectile à l'instant où le choc a commencé.

Fig. 247.



Appliquons d'abord à l'ensemble des deux corps le théorème des moments des quantités de mouvement (n° 200) pendant la durée du choc, en prenant l'axe de rotation pour axe des moments. A l'instant initial, la verticale menée par le centre de gravité du pendule rencontrait l'axe, puisque le pendule était en équilibre; il en était à peu près de même pour la verticale menée par le centre de gravité du projectile, dont le poids est d'ailleurs comparativement petit; en outre, le déplacement des deux corps est pour ainsi dire nul pendant la très courte durée θ du phénomène. Donc le moment total des poids est très petit, et l'on peut dire *a fortiori* la même chose du moment de leur impulsion, qui contient en outre un facteur comparable à θ. On peut supposer aussi qu'on s'est arrangé pour rendre négligeables les frottements sur l'axe. Alors le moment total des impulsions est sensiblement nul, et le théorème cité nous montre que la somme des moments des quantités de mouvement ne varie pas pendant le choc; c'est ce qu'exprime l'équation

$$(1) \qquad (I + \mu b^2)\omega = \mu v b.$$

dans laquelle on désigne par

I le moment d'inertie du pendule seul, relativement à son axe de rotation O;

μ la masse du projectile, qu'on assimile à un simple point, son diamètre étant supposé assez petit;

v sa vitesse;

b la distance entre la ligne parcourue par son centre et l'axe O;

ω la vitesse angulaire de l'ensemble quand le choc est terminé et que les deux corps ont pris un mouvement commun.

L'équation (1) permet de calculer v au moyen de ω. Afin de trouver la valeur de cette inconnue auxiliaire, nous appliquerons le théorème des forces vives (n° 205) au mouvement qui suit la fin du choc. Le pendule et le projectile réunis vont osciller en vertu de la vitesse initiale ω; le centre de gravité G du pendule, situé d'abord sur une verticale passant par l'axe, s'en écarte, arrive au maximum d'écart en G' et commence ensuite à revenir en arrière, le rayon $\overline{OG} = a$ du cercle parcouru par lui ayant décrit l'angle $GOG' = \alpha$. La vitesse angulaire est nulle pour la position OG', de sorte que la force vive a diminué, depuis la fin du choc, de $\omega^2(I + \mu b^2)$; cette quantité doit égaler le double du travail de la pesanteur changé de signe, ce qui donne, en nommant M la masse du pendule et remarquant que le centre du projectile décrit simultanément un arc compris entre les mêmes rayons extrêmes OG et OG',

$$(2) \qquad \omega^2(I + \mu b^2) = 2g(1 - \cos\alpha)(Ma + \mu b).$$

On tire des équations (1) et (2)

$$\omega = \frac{\mu v b}{I + \mu b^2} = 2 \sin\frac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{g(Ma + \mu b)}{I + \mu b^2}},$$

d'où résulte

$$(3) \qquad v = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\mu b} \sqrt{g(Ma + \mu b)(I + \mu b^2)}.$$

Toutes les quantités qui entrent dans le second membre de cette formule peuvent s'obtenir par des mesures directes; par conséquent, on a le moyen de calculer la vitesse v. Les

masses μ et M se mesurent par des pesées; I et a se déduisent de l'expérience, comme on l'a dit ailleurs (n° 228). Pour mesurer α, le pendule est muni à sa partie inférieure d'une pointe qui trace un sillon dans une couche de cire molle, ou encore d'une saillie qui chasse devant elle un curseur léger, mobile, à frottement doux sur un arc de cercle gradué, et qui l'abandonne en arrivant au maximum d'écart.

L'appareil de suspension du pendule consiste en un couteau analogue à ceux d'une balance. Pour qu'il ne se détériore pas rapidement par l'usage et aussi pour que les forces de percussion ne produisent pas, sur les appuis, des efforts de même ordre de grandeur que ces forces, il est nécessaire que le projectile suive une ligne telle que le choc ne se fasse pas sentir sur l'axe. A cet effet, on doit satisfaire aux conditions suivantes (n° 227): 1° l'axe O doit être axe principal d'inertie du pendule; 2° la direction de la vitesse v (qui est celle du choc) doit être perpendiculaire au plan passant par l'axe et par le centre de gravité G; 3° la ligne suivie par le centre du projectile doit passer par le centre de percussion du pendule. D'après ce que nous avons dit en commençant au sujet de v, la seconde condition est déjà remplie. On remplit la première et la troisième en établissant le pendule de manière qu'il ait un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe O, renfermant dans ce plan la trajectoire du centre du projectile et prenant enfin la distance b égale à $\frac{I}{Ma}$, longueur du pendule simple synchrone du pendule balistique (n° 228).

Dans le cas où, comme cela est désirable, on aurait rempli ces conditions avec assez d'exactitude, on pourrait remplacer I par Mab dans l'équation (3), qui devient alors

$$(4) \qquad v = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\left(1+\frac{Ma}{\mu b}\right)\sqrt{bg}.$$

D'un autre côté, la longueur b pourrait se déduire du temps T des petites oscillations du pendule, car on aurait

$$T = \pi\sqrt{\frac{b}{g}}, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{gT^2}{\pi^2};$$

en portant cette dernière valeur dans l'équation (4), on aurait

finalement

$$v = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{gT}{\pi} + \frac{\pi M a}{\mu T} \right). \tag{5}$$

Il est à remarquer que la longueur $\frac{I}{Ma}$ du pendule simple équivalent ne change point par l'adjonction de la masse μ, à la distance $b = \frac{I}{Ma}$ de l'axe. On a, en effet, pour cette longueur b', après la réunion des deux corps,

$$b' = \frac{I + \mu b^2}{Ma + \mu b} = \frac{Mab + \mu b^2}{Ma + \mu b} = b.$$

On aura donc la faculté d'observer le temps T soit avant, soit après la réunion du projectile au pendule. Si l'on en faisait la mesure dans les deux cas, on aurait, dans la coïncidence plus ou moins exacte des valeurs obtenues, le moyen de vérifier si l'on a bien frappé le pendule au centre de percussion.

243. *Gyroscope.* — Cet appareil consiste en un solide de révolution pesant et homogène, qu'on assujettit à tourner autour d'un point fixe O pris sur son axe de figure Oξ (*fig.* 267), après lui avoir imprimé une rotation très rapide p autour de cet axe. Les rotations ayant le sens indiqué dans la théorie générale (n^{os} **233** à **235**), on se rappelle qu'on a trouvé une valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ qui, eu égard aux conditions particulières,

Fig. 267.

$$q_0 = 0, \quad r_0 = 0,$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{B^2 \sin^2\theta}} [2BPa \sin^2\theta - A^2 p^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)];$$

on en tire immédiatement

$$dt = \frac{B \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)[2BPa \sin^2\theta - A^2 p^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)]}}.$$

On sait, en outre, que si p est très grand, l'angle θ varie très peu; on pourra donc poser

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité très petite. Par suite, si l'on néglige ε^2 et les puissances supérieures, il vient

$$d\theta = d\varepsilon, \quad \sin\theta = \sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0, \quad \cos\theta = \cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0$$

et aussi

$$dt = \frac{B(\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0)\,d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\sin\theta_0[2BPa(\sin^2\theta_0 + 2\varepsilon\sin\theta_0\cos\theta_0) - A^2p^2\varepsilon\sin\theta_0]}}.$$

On peut encore négliger, au numérateur du second membre, $\varepsilon\cos\theta_0$ devant $\sin\theta_0$; dans le facteur entre crochets au dénominateur, on peut aussi négliger $4BPa\,\varepsilon\sin\theta_0\cos\theta_0$ devant $A^2p^2\varepsilon\sin\theta_0$, à cause de la grandeur de p. Il vient alors

$$dt = \frac{B\,d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(2BPa\sin\theta_0 - A^2p^2\varepsilon)}},$$

ou bien, en posant $\varepsilon_1 = \dfrac{2BPa\sin\theta_0}{A^2p^2}$,

$$(1) \qquad \frac{Ap}{B}\,dt = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}}.$$

Afin d'intégrer le second membre, on l'écrit sous la forme

$$\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}} = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2}{4} - \left(\dfrac{\varepsilon_1}{2} - \varepsilon\right)^2}} = -\frac{d\left(1 - \dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2}};$$

l'équation (1) s'intègre alors immédiatement, et l'on a, puisque p est invariable,

$$(2) \qquad \frac{Apt}{B} = \arccos\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1}\right),$$

sans constante, si le temps est compté à partir de l'époque où l'on avait $\theta = \theta_0$, $\varepsilon = 0$, et si l'on convient de prendre alors

arc cos 1 = o. De l'équation (2) on tire

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}\left(1 - \cos\frac{Apt}{B}\right),$$

ce qui fait connaître ε et $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ en fonction du temps. On a ensuite, avec le même ordre d'approximation,

$$(4) \qquad q = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{Ap\varepsilon_1}{2B}\sin\frac{Apt}{B} = \frac{Pa\sin\theta_0}{Ap}\sin\frac{Apt}{B},$$

$$(5) \qquad r = \frac{Ap(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{B\sin\theta} = \frac{Ap\varepsilon\sin\theta_0}{B\sin\theta} = \frac{Ap\varepsilon}{B}$$

$$= \frac{Ap\varepsilon_1}{2B}\left(1 - \cos\frac{Apt}{B}\right) = \frac{Pa\sin\theta_0}{Ap}\left(1 - \cos\frac{Apt}{B}\right).$$

Il est facile ensuite d'avoir les deux autres angles φ et ψ qui, conjointement avec θ, déterminent la position du corps (n° 233); il suffit d'employer les équations

$$p = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta, \quad r = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta.$$

On déduit de là, en remplaçant θ par $\theta_0 + \varepsilon$, r par sa valeur (5), et continuant à ne conserver que les termes les plus influents,

$$(6) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{Ap\varepsilon}{B\sin\theta_0} = \frac{Pa}{Ap}\left(1 - \cos\frac{Apt}{B}\right),$$

$$(7) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = p - \frac{Ap\varepsilon\cos\theta_0}{B\sin\theta_0} = p - \frac{Pa\cos\theta_0}{Ap}\left(1 - \cos\frac{Apt}{B}\right);$$

puis l'intégration donne, si l'on commence à compter les angles ψ et φ à partir de la position initiale du corps, répondant à $t = 0$,

$$(8) \qquad \psi = \frac{Pa}{Ap}\left(t - \frac{B}{Ap}\sin\frac{Apt}{B}\right),$$

$$(9) \qquad \varphi = \left(p - \frac{Pa\cos\theta_0}{Ap}\right)t - \frac{BPa\cos\theta_0}{A^2p^2}\sin\frac{Apt}{B}.$$

En raison de la grande valeur qu'on attribue à p, les expres-

sions (8) et (9) de ψ et φ pourraient se réduire simplement à

$$(10) \qquad \psi = \frac{Pa}{Ap}t, \quad \varphi = \left(p - \frac{Pa\cos\theta_0}{Ap}\right)t.$$

La partie négligée, toujours très petite, passerait périodiquement du positif au négatif, par suite du facteur $\sin\frac{Apt}{B}$ qu'elle contient; la durée d'une période complète serait $\frac{2\pi B}{Ap}$, temps au bout duquel l'angle $\frac{Apt}{B}$ aurait augmenté de 2π et aurait repris le même sinus. L'angle ε varie aussi périodiquement avec le temps et la durée de sa période est la même. Or les écarts négligés dans ψ et φ sont, aussi bien que ε, imperceptibles pour l'œil d'un observateur; il ne saisit qu'une valeur constante de θ, et des valeurs de ψ et φ croissant proportionnellement au temps, avec des vitesses angulaires $\frac{Pa}{Ap}$ et $p - \frac{Pa\cos\theta_0}{Ap}$, conformément aux équations (10). Le mouvement lui semble donc être celui qu'on a étudié au n° 234, c'est-à-dire un mouvement de précession uniforme, sans nutation, avec rotation propre également uniforme. Toutefois l'influence des termes négligés se manifeste encore par une espèce de trépidation dans l'appareil, laquelle sera d'autant plus sensible que p sera moins considérable.

La vitesse moyenne de précession $\frac{Pa}{Ap}$, spontanément réalisée dans le gyroscope, coïncide très approximativement avec la plus petite des deux vitesses qu'on a trouvées au n° 234 comme compatibles avec une vitesse propre ω' donnée; on a, en effet, ici $\omega' = p - \frac{Pa\cos\theta_0}{Ap}$, quantité très peu différente de p, et, par suite, $\frac{Pa}{Ap}$ diffère très peu de $\frac{Pa}{A\omega'}$.

L'appareil nommé *balance gyroscopique* se compose: 1° d'un gyroscope tournant autour de $O\xi$, comme celui dont on vient de s'occuper; 2° d'un poids P' suspendu par un crochet en un point H de $O\xi$, à la distance $\overline{OH} = a'$ du point fixe O. Il dif-

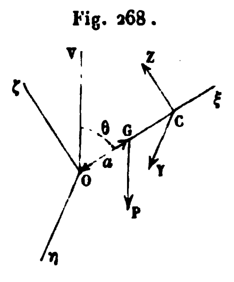
fère du précédent par cette circonstance que le poids P′ ne participe pas à la rotation propre du gyroscope autour de $O\xi$, et, par conséquent, les mêmes calculs ne sont plus immédiatement applicables.

Sans essayer de refaire une théorie complète pour cette nouvelle disposition, nous regarderons comme établi par l'expérience que le centre de gravité du poids P′ décrit la même courbe que le point H, et que cette courbe est à très peu près un cercle horizontal, de rayon $a' \sin\theta$, uniformément parcouru, comme cela aurait lieu dans le cas du gyroscope. Il résulte de là que l'action exercée en H sur le poids P′ se compose d'une force verticale ascendante P′ et d'une force centripète $\frac{P'}{g} a' \sin\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$. Réciproquement, le poids P′ exerce en H, sur le gyroscope auquel il est lié, une force ayant des composantes égales et de sens contraires. Cette force n'a pas de moment relativement aux axes $O\xi$ et $O\zeta$, parce qu'elle est contenue dans leur plan, mais elle a, relativement à $O\eta$, un moment $P'a' \sin\theta$, en sens contraire du moment $Pa \sin\theta$ produit par le poids P. Dès lors, si l'on recommençait les calculs du gyroscope en tenant compte de ce moment $P'a' \sin\theta$, on se trouverait tout simplement conduit à remplacer Pa par $Pa - P'a'$ dans les formules que nous avons trouvées; notamment la valeur $\frac{Pa}{Ap}$ de la vitesse de précession deviendrait $\frac{Pa - P'a'}{Ap}$. Cette vitesse conserverait le même sens avec une valeur moindre, tant que le point H serait pris à l'opposé du centre de gravité G, mais à une distance a' inférieure à $\frac{Pa}{P'}$. Pour $a' = \frac{Pa}{P'}$ la vitesse de précession s'annulerait, puis elle changerait de sens quand a' dépasserait cette limite. Dans le cas où H serait placé du même côté que G, a' devrait être considéré comme négatif; on aurait alors une vitesse de précession dans le sens primitif et avec une valeur plus grande.

Afin de soumettre à l'expérience ces prévisions théoriques, on a soin de rendre le point d'attache de P′ mobile le long de l'axe, dans une certaine étendue.

244. *Force à exercer sur l'axe d'un gyroscope pour le déplacer.* — Soit donné un solide de révolution pesant et homogène, fixé par un point O de son axe (*fig.* 268), et supposons qu'on veuille modifier son mouvement acquis, au moyen d'une force appliquée en C sur l'axe, à la distance $\overline{OC} = l$ du point O. Conservons les notations déjà employées et connues (n° 233 à 235 et 243); nommons en outre Y et Z les composantes de la force parallèlement à $O\eta$ et $O\zeta$ (il serait inutile de mettre une composante suivant $O\xi$, car elle passerait par O et ne changerait rien au mouvement). On aura, par application des formules (15) du n° 233,

Fig. 268.



$$A\frac{dp}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \quad p = \text{const.},$$

$$B\frac{dq}{dt} + Apr - Br^2 \cot\theta = Pa\sin\theta - Zl,$$

$$B\frac{dr}{dt} + Bqr\cot\theta - Apq = Yl.$$

La première équation nous apprend que p reste constant, après comme avant l'application d'une nouvelle force au point C. Les deux autres feront connaître les composantes Y, Z nécessaires pour produire des accélérations angulaires $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, si l'on se donne l'angle θ et les vitesses antérieurement acquises p, q, r; on en tire

$$Y = \frac{1}{l}\left(-Apq + Bqr\cot\theta + B\frac{dr}{dt}\right),$$

$$Z = \frac{1}{l}\left(-Apr + Br^2\cot\theta - B\frac{dq}{dt} + Pa\sin\theta\right).$$

Dans les expériences sur le gyroscope, on donne habituellement à p une grande valeur, d'où résultent au contraire des valeurs très petites (n° 243) pour q et r; si nous admettons en outre une valeur modérée pour $\cot\theta$, ainsi que pour

les accélérations angulaires à produire, les parties principales de Y et Z seront $-\frac{Apq}{l}$ et $-\frac{Apr}{l}$. On arrive alors à cette conséquence que l'effort à exercer dépend bien plus du mouvement acquis que du changement à lui faire subir. En outre, la direction de l'effort est parallèle à l'axe de la rotation résultante de q et de r, puisque $\frac{Y}{Z} = \frac{q}{r}$, ou, en d'autres termes, elle est perpendiculaire à la vitesse actuelle du point C, uniquement due à cette rotation résultante. Il faut donc agir perpendiculairement à la vitesse acquise du point C, et non pas dans le sens où l'on veut l'entraîner, ni dans le sens contraire à son déplacement actuel; cela produit une sensation bizarre sur l'expérimentateur qui exerce l'effort avec la main.

Exemple. — On tient l'axe dans la main en C, et la rotation p existe d'abord seule. L'effort qu'on exerce alors est simplement égal à l'effort $\frac{Pa\sin\theta}{l}$ qui aurait lieu dans l'état d'équilibre, car on a

$$q = 0,\quad r = 0,\quad \frac{dr}{dt} = 0,\quad \frac{dq}{dt} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$Y = 0,\quad Z = \frac{Pa\sin\theta}{l}.$$

Supposons maintenant qu'on veuille faire naître une précession $\frac{d\psi}{dt}$, en conservant $q = 0$ et θ constant; alors r n'est plus nul, mais égal à $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$ (n° 233), et l'on a rigoureusement à chaque instant

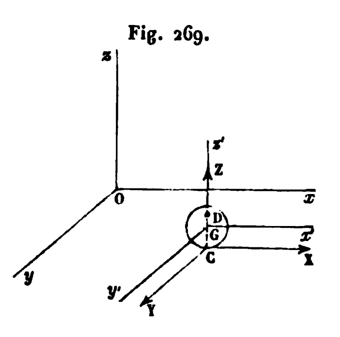
$$Y = \frac{B}{l}\frac{dr}{dt},\quad Z = \frac{1}{l}(-Apr + Br^2\cot\theta + Pa\sin\theta).$$

Si l'on ne cherche pas à augmenter rapidement r et $\frac{d\psi}{dt}$, on voit que la partie principale de la force sera $-\frac{Apr}{l}$ ou $-\frac{Ap}{l}\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$, dès que le mouvement de précession, primi-

tivement nul, aura pris une vitesse appréciable. Cette partie principale est une force située dans le plan VOξ et parallèle à Oζ; le déplacement imprimé au point C est au contraire horizontal et perpendiculaire à ce même plan. La réaction éprouvée par la main, force égale et de sens contraire, s'exprime par $\frac{\mathrm{A}p}{l}\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$; elle est dans le sens Oζ et tend à soulever la main, si les rotations p et $\frac{d\psi}{dt}$ se produisent dans le sens positif, pour des observateurs couchés suivant Oξ ou OV et regardant le point O; d'ailleurs elle change de sens avec chacune de ces deux rotations, de sorte qu'elle revient à son sens primitif lorsque le changement de sens porte sur les deux rotations à la fois.

245. *Mouvement d'une sphère homogène pesante sur un plan horizontal, eu égard au frottement.* — On suppose une sphère pesante placée sur un plan horizontal, et animée d'un mouvement initial tel que son point de contact doive glisser sur le plan d'appui; on demande de déterminer le mouvement ultérieur qui va se produire, en tenant compte du frottement exercé par le plan. A cet effet, prenons trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz (*fig.* 269), dont le dernier aura une direction verticale ascendante; imaginons en outre par le centre de figure et de gravité G de la sphère trois axes mobiles Gx', Gy', Gz' parallèles aux premiers. Le mouvement de la sphère est composé du mouvement de ces axes Gx', Gy', Gz' et d'une rotation autour de G; ce mouvement s'effectue sous l'influence des vitesses initiales et des forces extérieures appliquées à la sphère, qui sont : 1° son poids Mg, 2° la réaction du plan horizontal, que nous remplaçons par ses composantes X, Y, Z parallèles aux axes Nommons encore

Fig. 269.



a, b les composantes, suivant Gx' et Gy', de la vitesse du

point G (la composante suivant Gz' n'existe pas, puisque G se trouve à une hauteur constante au-dessus du plan horizontal d'appui);

p, q, r les composantes, suivant Gx', Gy', Gz', de la vitesse angulaire autour de l'axe instantané de rotation passant en G;

ρ le rayon de la sphère;

k son rayon de giration relativement à l'un quelconque de ses diamètres;

f le coefficient du frottement de la sphère sur le plan.

Le théorème sur le mouvement du centre de gravité (n° 198) donne d'abord

$$M\frac{da}{dt} = X, \tag{1}$$

$$M\frac{db}{dt} = Y, \tag{2}$$

$$0 = Z - Mg; \tag{3}$$

puis on a, par application du troisième théorème général relativement aux axes mobiles (n° 209),

$$Mk^2\frac{dp}{dt} = Y\rho, \tag{4}$$

$$Mk^2\frac{dq}{dt} = -X\rho, \tag{5}$$

$$Mk^2\frac{dr}{dt} = 0. \tag{6}$$

En effet, pour établir l'équation (4), par exemple, on remarquera que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à Gx' (ligne qui est axe principal d'inertie en tous ses points) s'exprime, à un instant quelconque, par Mk^2p (n° 229); que par suite son accroissement $Mk^2\,dp$ doit être égal au moment $Y\rho\,dt$ de l'impulsion élémentaire. Les équations (5) et (6) se démontreraient de la même manière.

Les six équations précédentes renferment huit inconnues, savoir : a, b, p, q, r, X, Y, Z. Pour avoir les deux équations qui manquent, il faut tenir compte des lois du frottement (n° 167). D'abord le rapport entre la composante tangentielle

$\sqrt{X^2+Y^2}$ de la réaction du plan et sa composante normale Z est égal au coefficient de frottement f; donc

(7) $$\sqrt{X^2+Y^2}=fZ.$$

Secondement la force $\sqrt{X^2+Y^2}$ est directement opposée à la vitesse du point C par lequel la sphère touche le plan; cette vitesse résulte du double mouvement ci-dessus indiqué et a pour composantes

Suivant Ox................. $a-q\rho$,
Suivant Oy................. $b+p\rho$;

on a donc

(8) $$\frac{X}{Y}=\frac{a-q\rho}{b+p\rho},$$

ce qui complète le nombre d'équations nécessaire.

Divisons maintenant l'une par l'autre les équations (1) et (2) d'une part, et les équations (5) et (4) d'autre part. On trouve ainsi

$$\frac{X}{Y}=\frac{da}{db},\quad \frac{X}{Y}=\frac{-dq}{dp}=\frac{-\rho\, dq}{\rho\, dp}.$$

Par suite on a aussi

$$\frac{X}{Y}=\frac{da-\rho\, dq}{db+\rho\, dp}=\frac{d(a-q\rho)}{d(b+p\rho)}$$

et, en vertu de (8),

$$\frac{d(a-q\rho)}{d(b+p\rho)}=\frac{a-q\rho}{b+p\rho}.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{d(a-q\rho)}{a-q\rho}-\frac{d(b+p\rho)}{b+p\rho}=0$$

ou, en intégrant,

$$\mathrm{L}\frac{a-q\rho}{b+p\rho}=\text{const.};$$

donc le rapport $\frac{a-q\rho}{b+p\rho}$ est constant ainsi que son égal $\frac{X}{Y}$;

donc le frottement total $\sqrt{X^2+Y^2}$ est constant en direction. D'un autre côté, il l'est aussi en grandeur, car les équations (3) et (7) donnent, par l'élimination de Z,

$$\sqrt{X^2+Y^2}=f\mathrm{M}g.$$

Comme les forces verticales Z et Mg se font équilibre, ce frottement est en définitive la seule force extérieure du système; on voit par conséquent que le centre de gravité G doit décrire une parabole, puisqu'il se meut (nº 198) comme un point matériel isolé, soumis à une force de direction et d'intensité constantes. La parabole peut d'ailleurs dégénérer en ligne droite, quand la vitesse initiale a la direction de la force.

Afin de simplifier les calculs, nous admettrons que l'axe des x a été choisi perpendiculaire à cette direction et l'axe des y parallèle, dans le sens de la vitesse de glissement initiale, résultante des valeurs initiales de $a-q\rho$ et de $b+p\rho$, lesquelles sont censées données. Si l'on conserve pour les coordonnées et composantes relatives à ces nouveaux axes les mêmes notations que ci-dessus, il faudra faire

$$X=0,\quad Y=-f\mathrm{M}g,$$

et les équations du mouvement deviendront

$$(9)\qquad \frac{da}{dt}=0,\quad \frac{db}{dt}=-fg,$$

$$(10)\qquad k^2\frac{dp}{dt}=-fg\rho,\quad \frac{dq}{dt}=0,\quad \frac{dr}{dt}=0.$$

D'après ces équations, on voit d'abord que les trois vitesses a, q, r conservent des valeurs constantes. Il est à remarquer que deux de ces constantes, a et q, ne sont pas indépendantes l'une de l'autre; l'axe des x ayant été pris perpendiculaire à la direction de la vitesse de glissement, celle-ci se réduit à sa composante $b+p\rho$, et l'on a nécessairement $a-q\rho=0$.

Désignons par x_1, y_1 les coordonnées du centre de gra-

vité G et par b_0 la valeur initiale de b; les équations (9) pourront s'écrire

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=-fg,$$

et, si l'on prend pour origine des axes coordonnés la position initiale de G (ce qui revient à supposer nulles les valeurs initiales de x_1 et y_1), on aura, par deux intégrations successives,

$$(11) \qquad x_1=at, \quad y_1=b_0t-\frac{1}{2}fgt^2.$$

L'élimination du temps entre les deux dernières équations conduirait à l'équation de la trajectoire du point G projetée en vraie grandeur sur le plan des xy; on trouverait ainsi

$$(12) \qquad y_1=\frac{b_0x_1}{a}-\frac{fgx_1^2}{2a^2}.$$

La première équation (10) donnerait ensuite, en nommant p_0 la valeur initiale de p,

$$(13) \qquad p=p_0-\frac{fg\rho t}{k^2},$$

ce qui achève la détermination du mouvement, autant du moins qu'il ne changera pas de nature par suite de la suppression du frottement au point de contact C. Examinons donc maintenant si ce dernier fait ne pourrait pas se produire au bout d'un certain temps.

On a déjà vu que la composante $a-q\rho$ de la vitesse de glissement est toujours nulle; la seconde composante $b+p\rho$ ou $\frac{dy_1}{dt}+p\rho$ s'annulera elle-même après un temps t' qui doit vérifier l'équation

$$b_0-fgt'+\rho\left(p_0-\frac{fg\rho t'}{k^2}\right)=0,$$

d'où résulte

$$t'=\frac{b_0+\rho p_0}{fg\left(1+\frac{\rho^2}{k^2}\right)}.$$

A cette époque, le centre de gravité serait dans la position définie par les coordonnées

$$x'_1 = at', \quad y'_1 = b_0 t' - \frac{1}{2} f g t'^2;$$

les vitesses a, b, p, q, r auraient également des valeurs connues, et leur ensemble donnerait nécessairement lieu à une rotation autour d'un axe horizontal passant par la position contemporaine du point de contact, puisque ce point est alors sans vitesse. Dans le temps qui suit l'époque t', l'hypothèse du glissement avec la résistance constante $f\mathrm{M}g$ deviendrait inadmissible, parce que la vitesse de glissement $b + p\rho$ changerait de signe après avoir passé par zéro, et deviendrait ainsi de même sens que le frottement, ce qui ne peut avoir lieu. Au contraire, l'hypothèse du roulement devient possible, car le mouvement à l'époque t' est une rotation autour d'un axe passant par le point de contact, dont la vitesse est alors nulle; à cet instant il y a roulement, et rien ne s'oppose à la continuation du même phénomène. On pourrait, il est vrai, supposer un changement de sens dans le frottement; mais la première hypothèse semble plus naturelle, parce qu'il en résulte (comme on va le voir bientôt) un changement moins considérable dans la réaction du plan, laquelle sera simplement réduite à zéro, au lieu de changer brusquement de sens, en conservant sa grandeur; d'ailleurs cette hypothèse est plus conforme à l'expérience.

Supposons donc l'existence du roulement à partir de l'époque t' et déterminons-en les circonstances, en admettant, pour plus de simplicité, qu'on puisse négliger la résistance au roulement (n° 169). Lorsqu'une sphère pesante et homogène roule sur un plan horizontal, il n'y a aucune force extérieure à la fois horizontale et perpendiculaire à la vitesse actuelle du centre de gravité et de figure; donc ce point se meut en ligne droite. On prouve de plus qu'il a une vitesse constante et que la réaction du plan se réduit en conséquence à la composante verticale $\mathrm{Z} = \mathrm{M}g$. En effet, les équations numérotées de (1) à (6) subsistent sans modification dans le cas actuel, parce qu'on les a établies sans hypothèse particulière sur la loi de la réaction exercée en C; on en tire,

par l'élimination de X entre (1) et (5) et par celle de Y entre (2) et (4),

$$(14)\qquad \frac{da}{dt}+\frac{k^2}{\rho}\frac{dq}{dt}=0,\quad \frac{db}{dt}-\frac{k^2}{\rho}\frac{dp}{dt}=0.$$

Or, s'il y a roulement, il faut exprimer que la vitesse du point de contact C est nulle, ce qui donne

$$(15)\qquad a-q\rho=0,\quad b+p\rho=0;$$

les valeurs de q et p tirées de ces dernières relations étant transportées dans les équations (14), on trouve, après suppression du facteur $1+\frac{k^2}{\rho^2}$,

$$\frac{da}{dt}=0,\quad \frac{db}{dt}=0,$$

d'où il résulte, en vertu de (1) et (2),

$$X=0,\quad Y=0.$$

Les composantes a et b sont donc bien constantes, et la réaction horizontale du plan est bien nulle, ce qui démontre le théorème énoncé.

En reprenant les axes employés pour établir les équations (9) et (10), on a vu qu'à l'époque t' la vitesse du centre de gravité avait pour composantes

$$a \text{ et } b_0-fgt'$$

ou encore

$$q\rho \text{ et } \frac{\rho(\rho b_0-k^2p_0)}{k^2+\rho^2}.$$

La résultante de ces deux vitesses, qui doit demeurer constante pendant la suite du temps, peut, suivant les grandeurs et les signes de q, p_0 et b_0, faire un angle quelconque avec la vitesse primitivement donnée au centre de gravité, quand le glissement a commencé, laquelle a pour composantes $q\rho$ et b_0. Il peut donc arriver qu'après l'époque t' la sphère continue à s'avancer dans le sens de l'impulsion primitive, ou qu'elle rétrograde en sens contraire, ou enfin qu'elle prenne une direction intermédiaire quelconque.

Si l'on considère, sur la verticale CG, un point défini par

la coordonnée $z = \rho + h$, les composantes de sa vitesse seront

$$a + qh \text{ et } b - ph;$$

dans l'hypothèse du roulement, les équations (15) ayant lieu, ces expressions se transforment en

$$a\left(1 + \frac{h}{\rho}\right),\ b\left(1 + \frac{h}{\rho}\right),$$

et, comme a et b ne varient pas, on voit que la vitesse est également constante pour tous les points de la sphère qui arrivent successivement sur CG, à une hauteur déterminée au-dessus de C. On peut prouver qu'il en est de même dans le cas du glissement, mais seulement pour un point particulier de CG. L'intégration des équations (14) donne en effet

$$a + \frac{k^2}{\rho} q = \text{const.},\quad b - \frac{k^2}{\rho} p = \text{const.},$$

et ces expressions sont justement celles des vitesses composantes du point D de CG défini par $h = \frac{k^2}{\rho}$; les points de la sphère qui passeront successivement par la position D y arriveront donc avec une vitesse constante. On remarquera que le point D est le centre d'oscillation (nº 228) du pendule composé qu'on obtiendrait en suspendant la sphère à l'une quelconque des horizontales passant par le point C.

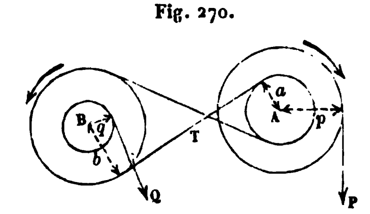
§ II. — Actions mutuelles des corps tournants, dans le mouvement varié; théorie des volants.

246. *Observations préliminaires.* — On rencontre fréquemment, dans les ateliers où s'effectuent des opérations mécaniques, une série de corps solides, assimilables à des treuils, qui tournent autour d'axes parallèles et sont rendus solidaires par des engrenages ou des courroies sans fin. Un de ces treuils, pris isolément, supporte d'abord une force motrice ou résistante directement appliquée et, en second lieu, une ou plusieurs forces provenant de sa liaison avec les autres treuils; ces dernières forces sont, comme les premières,

tantôt motrices, tantôt résistantes. Elles ne sont point connues *a priori*, et leur détermination offre une certaine utilité pratique. Le constructeur doit évidemment les prendre en considération quand il fixe les épaisseurs à donner aux dents d'engrenage et aux courroies pour que ces organes résistent convenablement à la rupture; de plus, quand il s'agit de courroies, il faut éviter qu'elles ne glissent sur leurs tambours ou poulies de support, et l'étude de leurs tensions est utile à ce point de vue.

247. *Action mutuelle de deux treuils isolés.* — Supposons d'abord le cas particulier de deux treuils seulement, l'un A soumis à une force motrice P, l'autre B soumis à une force résistante Q (*fig.* 270). Le mouvement se transmet de A à B

Fig. 270.



par une courroie sans fin, dont les deux moitiés ont des tensions inégales T′ et T″; au point de vue du mouvement produit, les choses se passent comme si la différence $T = T' - T''$ agissait suivant la direction de la partie la plus tendue. On pourrait supposer aussi que la transmission se fait par roues d'engrenages; T représenterait alors la composante normale de leur action réciproque. Le frottement étant censé négligeable, on aurait le même calcul à faire dans les deux cas pour déterminer T. Voici ce calcul.

Soient

ω et ϖ les vitesses angulaires de A et B;
p et q les bras de levier des forces P et Q;
a et b les rayons des poulies sur lesquelles passe la courroie sans fin ou les bras de levier de T dans les deux systèmes;
I et J les moments d'inertie des deux treuils autour de leurs axes respectifs.

On aura (nº 222)

$$I\frac{d\omega}{dt} = Pp - Ta, \quad J\frac{d\varpi}{dt} = Tb - Qq;$$

en vertu de la manière dont se fait la transmission de mouvement, on a aussi

$$a\omega = b\varpi,$$

l'élimination de ω et ϖ entre ces trois équations donne alors

$$\frac{a}{I}(Pp - Ta) = \frac{b}{J}(Tb - Qq),$$

relation d'où l'on pourrait tirer la valeur de T. Pour en simplifier l'expression algébrique, nous poserons

$$I = Ma^2, \quad J = Nb^2, \quad Pp = P_1 a, \quad Qq = Q_1 b;$$

M et N désigneront ainsi des masses fictives qui, distribuées respectivement sur des anneaux de rayons a et b, auraient des moments d'inertie égaux à ceux des deux treuils; de même P_1 et Q_1 sont des forces qui, appliquées sur les bras de levier a et b, ont des moments égaux à ceux de P et Q. Il vient alors, par la substitution de ces valeurs dans l'équation en T,

$$\frac{P_1 - T}{M} = \frac{T - Q_1}{N},$$

d'où résulte

(1) $$T = \frac{MQ_1 + NP_1}{M + N}.$$

Dans l'état de mouvement uniforme, les accélérations angulaires $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$ sont nulles; par suite,

$$Pp - Ta = 0, \quad Tb - Qq = 0$$

ou bien

(2) $$T = P_1 = Q_1.$$

Les deux forces P_1 et Q_1 sont alors égales entre elles et à la force T. Lorsque, à défaut de l'uniformité, il existe des périodes au bout desquelles les vitesses redeviennent les mêmes,

la valeur moyenne de l'accélération angulaire est nulle dans une de ces périodes, et, par suite, on peut admettre que les relations (2) ont encore lieu entre les valeurs moyennes de P_1, Q_1 et T. Mais, dans l'intervalle d'une période, chacune des trois forces peut varier, et, comme la relation (1) reste toujours satisfaite, leurs variations simultanées ΔP_1, ΔQ_1, ΔT doivent vérifier l'équation

$$\Delta T = \frac{M\,\Delta Q_1 + N\,\Delta P_1}{M + N}.$$

Supposons, par exemple, le cas particulier où la force P_1 serait constante, pendant que Q_1 passerait par des états de grandeur variables, en subissant des écarts ΔQ_1 autour de sa valeur moyenne $Q_1 = P_1$. La force T subirait alors des écarts correspondants ΔT autour de sa moyenne $T = P_1$, et l'on aurait

$$(3) \qquad \Delta T = \frac{M\,\Delta Q_1}{M + N} = \frac{\Delta Q_1}{1 + \frac{N}{M}}.$$

On voit que ΔT sera une petite fraction de ΔQ_1 si la masse N est grande relativement à M. Dans le cas où P_1 serait la force variable, on verrait de même que ΔT serait petit relativement à ΔP_1 si l'on a donné une grande valeur au rapport $\frac{M}{N}$; en général, on peut donc dire que, si une seule des deux forces P_1 et Q_1 est variable, on rend la force T sensiblement constante, en donnant une grande masse à celui des deux treuils dont la force est sujette à des changements d'intensité.

Dans la pratique, il est utile que les variations des forces P_1 ou Q_1 ne se fassent pas beaucoup sentir dans la transmission de mouvement d'un treuil à l'autre, ou, en d'autres termes, ne produisent dans T que de petites variations ΔT. Les épaisseurs des dents d'engrenages ou des courroies doivent, en effet, se déterminer d'après le maximum et non d'après la moyenne des efforts à supporter; et, d'un autre côté, l'augmentation des épaisseurs entraîne celle des pertes de travail par le frottement des dents (en raison de ce que le pas devient plus grand) ou par la raideur des courroies. D'ailleurs un choc

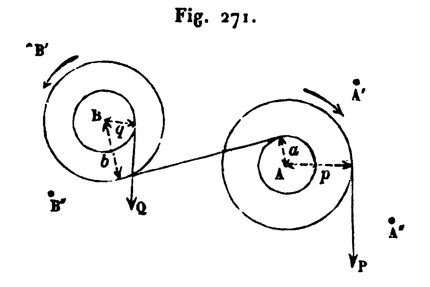
non prévu pourrait causer la rupture des dents d'un engrenage, s'il avait pour conséquence de rendre ΔT trop grand; dans le cas des courroies, on sait aussi (nº 191) qu'une trop grande différence des tensions T' et T'' peut amener des glissements de la courroie sur ses poulies de support, et alors la transmission ne fonctionne plus régulièrement. Par toutes ces raisons, on voit qu'il est bon de faire en sorte que T varie peu; le treuil soumis à la force variable doit donc être établi avec une grande masse en comparaison de l'autre. Si la masse qu'on est conduit à lui donner, d'après les convenances de la construction, n'est pas par elle-même suffisante, on l'augmente au moyen d'un anneau métallique circulaire, dont le plan moyen est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est placé sur celui-ci; c'est ce qu'on nomme un *volant*.

Le changement de sens de l'action mutuelle aurait aussi des inconvénients pour les engrenages. Comme les dents en contact ne peuvent que se presser mutuellement, puisque aucune adhérence n'existe entre elles, le changement dont il s'agit n'est réalisable que si le contact d'une dent actuellement en prise passe d'une face à la face opposée; mais, en vertu du *jeu* qu'on laisse toujours aux dents (nº 49, *f*), elles ne se touchent plus pendant ce passage, et un choc se produit à l'instant où le contact se rétablit de nouveau, ce qui aurait des inconvénients, tant au point de vue des pertes de travail (nº 215) qu'à celui de la conservation des appareils. Il faut donc s'arranger pour empêcher ces changements de sens.

Dans le cas où l'on considère seulement deux treuils soumis à des forces P et Q de sens invariable, l'une motrice, l'autre résistante, la formule (1) donne toujours pour T une valeur de même signe; cette force est toujours, comme on l'a supposé dans le calcul précédent, résistante pour le treuil soumis à la force motrice, et motrice pour celui qui subit la résistance. Son sens reste donc toujours le même. Mais il pourrait en être différemment si P et Q étaient des forces tantôt motrices, tantôt résistantes, passant du positif au négatif, ou encore s'il y avait plus de deux treuils communiquant entre eux par courroies ou engrenages. Cette dernière partie de la proposition résulte de la généralisation qui va être donnée maintenant à la formule (1).

248. *Action mutuelle de deux treuils dont chacun communique avec plusieurs autres.* — On considère encore deux treuils A et B (*fig.* 271) qui communiquent entre eux par courroie ou par engrenage, mais qui font chacun partie d'un système plus étendu. Le treuil A est précédé d'une série de treuils A′, A″, ..., dont chacun communique avec lui directement ou par l'intermédiaire des autres; la vitesse angulaire

Fig. 271.



de A étant ω, celles de A′, A″, ... sont respectivement $k'\omega$, $k''\omega$, ..., en désignant par k', k'', ... des rapports déterminés et connus *a priori*. Nous appelons encore

$$I, I', I'', \ldots, \quad P, P', P'', \ldots, \quad p, p', p'', \ldots$$

1° les moments d'inertie de ces treuils A, A′, A″, ... par rapport à leurs axes de rotation respectifs; 2° les forces qui leur sont directement appliquées, auxquelles on aura soin de donner le signe + ou le signe — suivant qu'elles seront motrices ou résistantes; 3° les distances de chacune de ces forces à l'axe du treuil correspondant. Supposons pareillement que le treuil B communique avec une série d'autres treuils B′, B″, ..., et soient

$$J, J', J'', \ldots, \quad Q, Q', Q'', \ldots, \quad q, q', q'', \ldots, \quad w, l'w, l''w, \ldots$$

1° les moments d'inertie des treuils B, B′, B″, ... par rapport à leurs axes respectifs; 2° les forces directement appliquées à chacun d'eux, affectées du signe + ou du signe —, selon qu'elles seront résistantes ou motrices; 3° leurs distances aux axes de leurs treuils; 4° les vitesses angulaires de ceux-ci, vitesses dont on connaît les rapports l', l'', ... à la première.

Désignons enfin par T l'action mutuelle des treuils A et B, définie comme au n° 247, et par a et b les distances de cette action aux axes A et B.

La force vive du premier système A, A′, A″, ... a pour valeur

$$\omega^2(I + k'^2 I' + k''^2 I'' + \ldots),$$

et on peut la représenter par $Ma^2\omega^2$, si l'on définit la masse M par l'équation

$$(4) \qquad Ma^2 = I + k'^2 I' + k''^2 I'' + \ldots;$$

la masse fictive M serait celle d'un anneau circulaire de rayon a, qui, tournant dans son plan avec la vitesse angulaire ω autour de son centre, aurait une force vive égale à celle du système A, A′, A″, ... De même, si l'on pose

$$(5) \qquad Nb^2 = J + l'^2 J' + l''^2 J'' + \ldots,$$

la force vive du système B, B′, B″, ... s'exprimera par $Nb^2\varpi^2$, et sera la même que si un anneau circulaire de masse N et de rayon b tournait dans son plan, autour de son centre, avec la vitesse angulaire ϖ. Les travaux élémentaires des forces directement appliquées aux deux systèmes s'expriment par

$$\omega\, dt(Pp + P'p'k' + P''p''k'' + \ldots),$$
$$-\varpi\, dt(Qq + Q'q'l' + Q''q''l'' + \ldots),$$

ou simplement par $P_1 a\omega\, dt$, $-Q_1 b\varpi\, dt$, si l'on pose, pour définir P_1 et Q_1, les égalités

$$(6) \qquad P_1 a = Pp + P'p'k' + P''p''k'' + \ldots,$$
$$(7) \qquad Q_1 b = Qq + Q'q'l' + Q''q''l'' + \ldots;$$

P_1 et Q_1 seront alors des forces fictives qui, appliquées tangentiellement à des poulies de rayon a et b, la première sur le treuil A, la seconde sur le treuil B, feraient des travaux élémentaires respectivement égaux à ceux des deux systèmes de forces P, P′, P″, ..., Q, Q′, Q″, ...

Cela posé, on a, par l'application du théorème des forces vives (n° 205) successivement aux deux systèmes de treuils, pour un déplacement infiniment petit,

$$Ma^2\omega\, d\omega = (P_1 - T)a\omega\, dt, \quad Nb^2\varpi\, d\varpi = (T - Q_1)b\varpi\, dt$$

ou, sous une autre forme,

$$a\frac{d\omega}{dt}=\frac{P_1-T}{M},\quad b\frac{dw}{dt}=\frac{T-Q_1}{N}.$$

Or on a, en vertu de la liaison des treuils A et B,

$$a\omega=bw,\quad \text{d'où résulte}\quad a\frac{d\omega}{dt}=b\frac{dw}{dt};$$

donc aussi

$$\frac{P_1-T}{M}=\frac{T-Q_1}{N},$$

et finalement

$$T=\frac{MQ_1+NP_1}{M+N}. \tag{8}$$

Cette formule donnerait la formule (1) comme cas particulier; elle la reproduit identiquement, sauf que les notations M, N, P_1, Q_1 ont reçu une définition plus générale, qui permet d'appliquer la formule quel que soit le nombre des treuils en communication les uns avec les autres.

Si le groupe P, P′, P″, ... ne contient que des forces mouvantes et si toutes les forces Q, Q′, Q″, ... sont des résistances, P_1 et Q_1 auront nécessairement le signe +, et la formule (8) ne pourra que donner T positif; la force T aura donc le sens qu'on lui a supposé dans le calcul précédent, c'est-à-dire qu'elle sera motrice pour B et résistante pour A. Mais si, au contraire, l'un au moins des deux groupes comprend à la fois des forces motrices et des résistances, et que ces forces aient des intensités variables, il pourra se faire, à certains instants, que P_1 ou Q_1 devienne négatif et que le même changement ait lieu pour T. L'action mutuelle changerait alors de sens, ce qui entraînerait les inconvénients déjà signalés plus haut (nº 247). On pourrait d'ailleurs les éviter en prenant M suffisamment grand lorsque P_1 seul varie beaucoup, ou en augmentant N si les variations notables affectent seulement la valeur de Q_1.

249. *Emploi des volants pour régulariser la vitesse des corps tournants.* — On a vu (nºs 247 et 248) qu'un volant convenablement placé a pour effet de régulariser l'action mutuelle de

deux corps tournants, quand l'un d'eux est soumis à une force variable. Les volants peuvent encore produire un effet d'un autre genre, pour lequel ils sont fréquemment employés; ils fournissent un moyen de resserrer les limites entre lesquelles varie la vitesse d'un corps tournant, isolé ou faisant partie d'un système de treuils liés entre eux par courroies ou par engrenages. Considérons, en effet, un système de treuils composé d'un treuil principal O, communiquant avec d'autres treuils O', O'', ...; les vitesses angulaires sont ω pour le treuil O, $k'\omega$, $k''\omega$, ... pour les autres; les moments d'inertie correspondants, pris pour chaque treuil relativement à son axe, sont I, I', I'', ... Si la vitesse ω avait pour valeur ω_0 à l'instant initial et si $\mathfrak{T}$ représente la somme des travaux de toutes les forces du système pendant que la vitesse angulaire a passé de ω_0 à ω, l'équation des forces vives sera

$$\frac{1}{2}MR^2(\omega^2 - \omega_0^2) = \mathfrak{T},$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$MR^2 = I + k'^2 I' + k''^2 I'' + \ldots.$$

On voit par là que, pour des valeurs déterminées du travail $\mathfrak{T}$, les différences $\omega^2 - \omega_0^2$ deviendront aussi petites qu'on le voudra, en prenant MR^2 suffisamment grand, et par conséquent il en sera de même pour les variations de vitesse angulaire $\omega - \omega_0$. Dans le cas où le moment d'inertie réduit MR^2 n'est pas assez grand par lui-même, en raison des dimensions qu'exige la construction des treuils, on l'augmente au moyen d'un *volant* en forme d'anneau solide, placé perpendiculairement à l'un des axes concentriques avec lui.

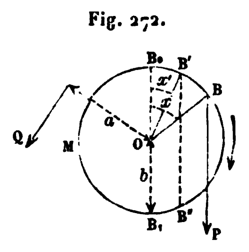
Comme ce volant ne produit de l'effet, au point de vue qui nous occupe actuellement, que par un terme de la forme $k_1^2 I_1$ introduit dans l'expression de MR^2, on voit qu'on a intérêt, pour diminuer sa masse autant que possible : 1° à lui donner un grand rayon, ce qui tend à augmenter I_1 à égalité de masse; 2° à le placer sur celui des treuils qui tourne le plus vite, ce qui accroîtrait k_1. A ce double point de vue, il y a des limites imposées par les difficultés de construction et les considérations relatives à la solidité du volant. D'un autre côté, il ne

faut pas oublier que le volant doit fonctionner aussi comme régulateur des actions mutuelles; pour ce motif, on le place assez ordinairement sur le treuil qui reçoit les forces les plus variables (nos 247 et 248), sauf à lui donner, s'il le faut, une masse plus considérable, afin de compenser la diminution de sa vitesse.

250. *Exemples particuliers concernant les volants employés comme régulateurs de vitesse.* — Après ces indications générales et sommaires, nous allons étudier et discuter en détail un certain nombre de cas particuliers qu'on rencontre fréquemment dans la pratique, lesquels feront comprendre, par analogie, ce qu'on aurait à faire dans d'autres circonstances.

Premier exemple : *Manivelle simple, à simple effet.* — Un treuil tournant autour de l'axe O (*fig.* 272) est mis en mouvement par une force P de direction et d'intensité constantes, appliquée en B à l'extrémité de la manivelle OB; mais cette force n'agit que pendant le passage du point mort B_0 au point mort B_1, et cesse d'agir pendant que le bouton B parcourt la demi-circonférence $B_1 M B_0$. Le treuil O est en communication avec d'autres treuils O′, O″, ..., et l'on pose, comme ci-dessus (n° 249),

Fig. 272.



$$MR^2 = I + k'^2 I' + k''^2 I'' + \dots$$

pour définir le moment d'inertie réduit MR^2. On suppose que tous ces treuils supportent des résistances constantes, dont le travail total est à chaque instant égal à celui d'une force constante Q agissant sur le treuil principal O, à la distance constante a de l'axe de rotation. Cette force Q est censée comprendre toutes les résistances quelles qu'elles soient, même celles qui proviendraient du frottement ou autres causes quelconques. Cela posé, on demande :

1° La condition pour que le mouvement du treuil O redevienne périodiquement le même à chaque tour;

2° Cette condition étant remplie, quelles sont les positions

de OB auxquelles répondent les vitesses angulaires maximum et minimum ;

3° La condition pour que la différence entre la plus grande et la plus petite vitesse angulaire soit une fraction donnée $\frac{1}{n}$ de leur moyenne arithmétique.

Pendant un tour complet du treuil O, les travaux moteur et résistant sont respectivement $2Pb$ et $2\pi Qa$; si l'on pose

$$\text{(1)} \qquad \frac{Qa}{Pb} = \frac{1}{\pi},$$

la somme algébrique $2Pb - 2\pi Qa$ s'annulera, de sorte que la force vive totale du système et, par suite, la vitesse angulaire ω du treuil redeviendront, à la fin du tour, les mêmes qu'au commencement. Dans les tours suivants, les mêmes quantités de travail moteur ou résistant se reproduiront, en passant par les mêmes grandeurs successives; donc la force vive et la vitesse angulaire reprendront la même série de valeurs que dans le premier tour; donc, enfin, l'équation (1) suffit pour assurer la périodicité du mouvement. D'ailleurs elle est nécessaire; car, si la somme algébrique $2Pb - 2\pi Qa$ avait une valeur différente de zéro, la force vive varierait d'une quantité constante à chaque tour du treuil principal.

Afin d'avoir les positions pour lesquelles il se produit un maximum ou un minimum de la vitesse angulaire ω, on remarquera que, dans ces positions, $d\omega$ s'annule; que, par suite, la différentielle $MR^2\omega\, d\omega$ de la demi-force vive s'annule aussi et qu'il en est de même du travail élémentaire

$$(Pb \sin x - Qa)dx.$$

On posera donc

$$\text{(2)} \qquad Pb \sin x - Qa = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \frac{Qa}{Pb} = \frac{1}{\pi}.$$

On tire de cette équation deux valeurs de l'angle x inférieures à la demi-circonférence, savoir :

$$x' = 0,1031\pi \quad \text{répondant à } 18^\circ 33',6,$$

et le supplément

$$x'' = \pi - x \quad \text{répondant à } 161^\circ 26',4.$$

Soient B′ et B″ les deux positions du bouton B de la manivelle qui sont définies par ces deux valeurs. La première donne le minimum, car, dans le parcours B_0B', le travail élémentaire $(Pb\sin x - Qa)dx$ est resté constamment négatif et la force vive a dû toujours diminuer, tandis que, après le passage de B′ et jusqu'à B″, le facteur $Pb\sin x - Qa$ ayant changé de signe, la force vive a toujours augmenté; donc la vitesse diminue jusqu'à B′ pour croître au delà, ce qui montre bien qu'elle passe par un minimum en B′. Elle augmente ensuite, comme on vient de le voir, jusqu'à B″, puis elle diminue, parce que $Pb\sin x$ redevient inférieur à Qa; donc le maximum se produit en B″ pour $x = x''$. Il n'y a d'ailleurs ni maximum, ni minimum dans la seconde moitié du tour; car, la force motrice étant supprimée, la vitesse décroît constamment dans le parcours B_1MB_0.

Reste la troisième partie de la question. Nous la résoudrons en appliquant d'abord le théorème des forces vives pendant le parcours de l'angle $x'' - x'$, ce qui donne, en désignant par ω'' et ω' les vitesses angulaires répondant à x'' et x',

$$\frac{1}{2}MR^2(\omega''^2 - \omega'^2) = 2Pb\cos x' - Qa(\pi - 2x')$$
$$= 2Pb\left(\cos x' - \frac{\pi - 2x'}{2\pi}\right) = 0{,}5521 \times 2Pb.$$

Or on a identiquement

$$\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) = \frac{1}{2}(\omega'' + \omega')(\omega'' - \omega');$$

si l'on nomme w la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}(\omega'' + \omega')$, la condition relative à la différence des vitesses angulaires maximum et minimum s'exprime par l'égalité $\omega'' - \omega' = \frac{w}{n}$, d'où résulte

$$\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) = \frac{w^2}{n}$$

et aussi

$$(2) \qquad MR^2\frac{w^2}{n} = 0{,}5521 \times 2Pb.$$

L'équation (2) détermine le moment d'inertie réduit MR^2,

quand on donne la vitesse moyenne w, la fraction $\frac{1}{n}$, dite *coefficient de régularisation,* et le travail $2Pb$ fourni par le moteur, dans chaque tour du treuil principal; la même équation ferait connaître $\frac{1}{n}$, si l'on donnait MR^2, w et $2Pb$.

Si le moment d'inertie réduit MR^2 dépassait déjà, en vertu de ce qui est nécessaire pour la bonne construction des treuils, la valeur déduite de l'équation (2), on obtiendrait, sans l'emploi d'aucun volant, une régularisation supérieure à celle que représente le coefficient donné $\frac{1}{n}$, car $\frac{1}{n}$ est en raison inverse de MR^2, toutes choses égales d'ailleurs. Dans le cas contraire, on compléterait MR^2 par l'adjonction d'un volant. On placerait ce volant sur le treuil O, le seul qui soit soumis à une force variable. La puissance P n'agit, en effet, que pendant la moitié de chaque tour, et même, pendant cette moitié, si on la transformait en une force P_1 appliquée sur un bras de levier constant, comme on l'a fait dans les calculs sur les actions mutuelles des corps tournants, P_1 varierait proportionnellement à $\sin x$.

La détermination ci-dessus donnée du volant suppose connue la vitesse angulaire moyenne $w = \frac{1}{2}(\omega'' + \omega')$. Dans la pratique, on préfère se donner une quantité plus facile à observer, qui est le nombre N de tours du treuil O par minute. Le temps d'un tour étant $\frac{60}{N}$ secondes, on a

$$2\pi = \int_0^{\frac{60}{N}} \omega\, dt;$$

d'où l'on tire, puisque ω est toujours compris entre les limites ω' et ω'',

$$2\pi > \frac{60}{N}\omega', \quad 2\pi < \frac{60}{N}\omega''.$$

Or les équations de définition

$$w = \frac{1}{2}(\omega'' + \omega'), \quad \omega'' - \omega' = \frac{w}{n}$$

donnent

$$\omega'' = w\left(1 + \frac{1}{2n}\right), \quad \omega' = w\left(1 - \frac{1}{2n}\right);$$

on en conclut bien facilement

$$w > \frac{\pi N}{30} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}}, \quad w < \frac{\pi N}{30} \frac{1}{1 - \frac{1}{2n}}.$$

Comme ces deux limites de w ont un rapport très rapproché de l'unité lorsque n est un peu grand, on peut adopter, sans avoir à craindre une erreur relative notable, la valeur intermédiaire

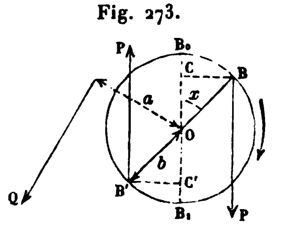
$$w = \frac{\pi N}{30}.$$

Le nombre n est fixé d'après l'expérience acquise des constructeurs, suivant la destination des machines mues par le treuil principal. Dans les filatures on prend communément n de 35 à 40, et de 50 à 60 s'il s'agit de fabriquer des fils très fins; c'est là qu'il faut la plus grande régularité. Dans les autres cas on pourra prendre n plus petit, de 20 à 25 par exemple.

Les détails que nous avons donnés sur ce premier cas particulier restent en grande partie applicables dans les exemples suivants. Nous pourrons donc traiter ceux-ci plus brièvement et nous borner à signaler ce qui les distingue du précédent.

Deuxième exemple : *Manivelle simple à double effet.* — La force P, après avoir accompagné son point d'application B (*fig.* 273) de B_0 à B_1, en conservant toujours même grandeur, même direction et même sens, l'accompagne encore dans la demi-circonférence $B_1B'B_0$ qui complète le tour, en conservant sa direction et sa grandeur, mais changeant brusquement de sens à partir de B_1, de manière à rester toujours force mouvante. Rien n'est d'ailleurs changé aux données du premier exemple, et l'on demande de résoudre les mêmes questions.

Fig. 273.



Le travail moteur se trouvant doublé à chaque tour, la condition de périodicité devient $4Pb = 2\pi Qa$, soit

$$\frac{Qa}{Pb} = \frac{2}{\pi}. \tag{3}$$

En vertu de cette dernière équation, le travail total $2Pb - \pi Qa$ accompli pendant le demi-tour B_0BB_1 est nul, de sorte que la vitesse est la même en B_1 qu'en B_0. Plus généralement on peut dire qu'elle est la même pour deux positions quelconques B et B′ diamétralement opposées. En effet, le travail moteur pendant le demi-tour BB_1B' a pour valeur

$$P(\overline{CB_1} + \overline{B_1C'}) = P(\overline{CB_1} + \overline{B_0C}) = 2Pb,$$

et le travail résistant est toujours πQa pour un demi-tour quelconque; la somme algébrique $2Pb - \pi Qa$ de ces deux travaux est donc nulle, ce qui démontre la proposition énoncée. Ainsi donc, par cela même que le mouvement est périodique par tour entier, il l'est aussi par demi-tour, et il suffit de considérer ce qui se passe dans le parcours de l'arc B_0BB_1.

Les positions auxquelles répondent les vitesses maximum et minimum sont encore données par l'équation

$$Pb\sin x - Qa = 0;$$

d'où résulte, eu égard à (3),

$$\sin x = \frac{2}{\pi}.$$

Cette dernière équation fournit deux valeurs supplémentaires

$$x' = 0{,}2215\pi \quad \text{répondant à} \quad 39^\circ 52',4,$$
$$x'' = \pi - x' \quad \text{répondant à} \quad 140^\circ\ 7',6,$$

et l'on prouverait par le même raisonnement que le minimum a lieu pour la première, le maximum pour la seconde.

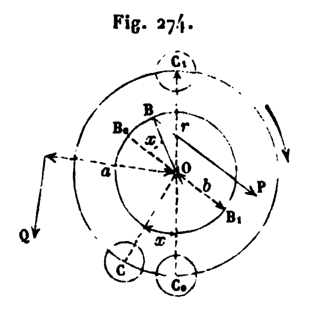
Enfin l'application du théorème des forces vives entre les positions définies par x' et x'' conduirait à l'équation

$$MR^2\frac{w^2}{n} = 2Pb\cos x' - Qa(\pi - 2x')$$
$$= 4Pb\left(\frac{1}{2}\cos x' - \frac{1}{2} + \frac{x'}{\pi}\right) = 0{,}1052 \times 4Pb.$$

On voit que, à égalité de travail moteur dans chaque tour, de vitesse moyenne et de coefficient $\frac{1}{n}$, le moment d'inertie MR^2 est diminué dans le rapport de 0,5521 à 0,1052 (ou environ de 5,25 à 1), quand on remplace la manivelle à simple effet par la manivelle à double effet.

TROISIÈME EXEMPLE : *Manivelle à simple effet, avec contrepoids.* — La force motrice P sera supposée n'agir que pendant le parcours du demi-cercle B_0BB_1 (*fig.* 274); mais à l'instant où son point d'application B passe au point mort B_0, un contrepoids C, invariablement lié au treuil O, se trouve en C_0, au point le plus bas du cercle qu'il décrit; de plus on choisit le poids C et son bras de levier r, de manière qu'on ait $Cr = \frac{1}{2}Pb$. Après le parcours d'un angle x inférieur à la demi-circonférence, à partir des positions B_0 et C_0, le travail des deux forces Q et C sera

Fig. 274.



$$Pb(1 - \cos x) - Cr(1 - \cos x) \text{ ou bien } \frac{1}{2}Pb(1 - \cos x);$$

lorsque x atteindra la valeur π, la puissance P cessera d'agir, mais le contrepoids C sera dans la position C_1, diamétralement opposée à C_0, et si le système tourne, à partir de là, d'un angle x variable entre zéro et π, le travail fourni par le contrepoids deviendra moteur et sa valeur sera

$$Cr(1 - \cos x) \text{ ou bien } \frac{1}{2}Pb(1 - \cos x).$$

Les choses se passeront donc, pendant chaque tour du treuil, comme si le système de la force P et du contrepoids était remplacé par une force $\frac{1}{2}P$ agissant au point B pendant la totalité du tour, et changeant de sens au passage de chaque point mort, de manière à rester toujours motrice. On rentre

donc ainsi dans le cas de la manivelle à double effet. La condition de périodicité serait

$$4 \times \frac{1}{2} P b = 2\pi Q a \quad \text{ou} \quad \frac{Qa}{Pb} = \frac{1}{\pi};$$

les positions pour lesquelles la vitesse angulaire passerait par un maximum ou un minimum seraient définies, pour le premier demi-tour, par les mêmes angles x'' et x' que dans l'exemple précédent, ces angles étant comptés à partir de OB_0; enfin le moment d'inertie MR^2 se calculerait par l'équation

$$MR^2 \frac{\omega^2}{n} = 0{,}1052 \times 4 \frac{Pb}{2} = 0{,}1052 \times 2Pb.$$

Le contrepoids aurait donc pour effet de réduire à 0,1052 le coefficient 0,5521 applicable dans le cas de la manivelle à simple effet; de plus il compterait dans le moment d'inertie MR^2 pour une valeur égale à $\frac{Cr^2}{g} = \frac{Pbr}{2g}$.

Si l'on continuait à désigner par MR^2 le moment d'inertie réduit des treuils, sans y comprendre ce nouveau terme, la dernière équation devrait s'écrire

$$\left(MR^2 + \frac{Pbr}{2g}\right)\frac{\omega^2}{n} = 0{,}1052 \times 2Pb,$$

et l'on en tirerait

$$MR^2 \frac{\omega^2}{n} = \left(0{,}1052 - \frac{\omega^2 r}{4gn}\right) 2Pb.$$

QUATRIÈME EXEMPLE : *Deux manivelles rectangulaires à double effet.* — Le treuil O (*fig.* 275) est mis en mouvement par deux manivelles à angle droit OB, OB′ sollicitées chacune par une force P constante en intensité et en direction, mais changeant brusquement de sens quand son point d'application B ou B′ vient passer par l'un des points morts B_0, B_2. Rien n'est d'ailleurs changé aux données ni aux questions à résoudre indiquées dans le premier exemple.

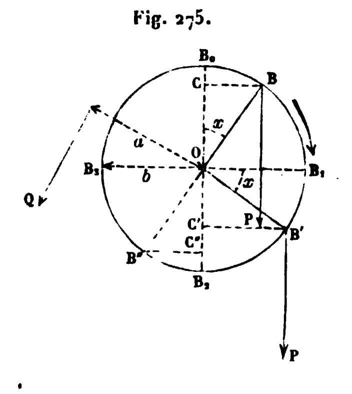
Pendant un tour entier le travail moteur est $4Pb$ pour

chacune des deux manivelles, soit en tout $8Pb$; le travail résistant dans le même intervalle a pour valeur $2\pi Qa$. Il faut donc, pour que la vitesse redevienne la même après l'accomplissement d'un tour, qu'on ait

$$(4) \qquad 8Pb = 2\pi Qa \quad \text{ou} \quad \frac{Qa}{Pb} = \frac{4}{\pi}.$$

Si cette condition est remplie, on peut facilement reconnaître que le travail moteur sera égal au travail résistant, pour un quart de tour compté à partir d'une origine quelconque, et que, par conséquent, le mouvement est périodique par quart de tour. En effet supposons que la première manivelle passe de la position OB à la position perpendiculaire OB', et que simultanément la seconde manivelle passe de OB' à OB'', sur le prolongement de OB; le travail moteur pendant ce quart de tour sera

Fig. 275.



$$P(\overline{CC'} + \overline{C'B_2} + \overline{B_2C''}) \text{ ou } P(\overline{CC'} + \overline{C'B_2} + \overline{B_0C}) \text{ ou enfin } 2Pb,$$

et le travail résistant aura une valeur $\frac{1}{2}\pi Qa$, égale à $2Pb$ d'après l'équation (4). Ainsi la somme algébrique des travaux des forces est nulle pendant que le treuil O décrit un angle droit à partir d'une position quelconque, et par conséquent la vitesse angulaire se retrouve la même à la fin de ce parcours qu'à son commencement.

Le mouvement étant périodique par quart de tour, il suffit de considérer ce qui se passe pendant que l'angle x, décrit par OB à partir de OB_0, varie de zéro à un quadrant. Lorsqu'on aura

$$[Pb(\sin x + \cos x) - Qa]\, dx = 0,$$

le travail élémentaire s'annulera et par conséquent la vitesse angulaire passera par un maximum ou un minimum. Cette

équation peut s'écrire, eu égard à (4),

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{\pi}. \tag{5}$$

pour en avoir simplement les racines, on posera

$$x = \frac{\pi}{4} + y,$$

$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos y + \sin y), \quad \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos y - \sin y),$$

valeurs qui, portées dans l'équation (5), donneront

$$\sqrt{2}\cos y = \frac{4}{\pi} \quad \text{ou} \quad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

On satisfait à cette dernière équation en prenant

$$y = \pm\, 0{,}1433\pi,$$

ce qui conduit à deux valeurs correspondantes de x, savoir :

$$x' = 0{,}1067\pi \quad \text{répondant à } 19^\circ\, 12',0,$$

$$x'' = \frac{\pi}{2} - x' \quad \text{répondant à } 70^\circ\, 48',0,$$

les seules admissibles entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Si l'on forme ensuite la dérivée

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x + \cos x - \frac{4}{\pi}\right) = \cos x - \sin x,$$

on constate qu'elle est positive pour $x = x'$ et négative pour $x = x''$; donc le travail élémentaire s'annule pour ces deux valeurs, en passant du négatif au positif aux environs de $x = x'$, et du positif au négatif aux environs de $x = x''$, puisqu'il est croissant dans le premier cas et décroissant dans le second. Donc la vitesse angulaire, d'abord décroissante avant $x = x'$, commence à croître après; donc x' répond à un minimum. Et de même la vitesse angulaire, qui croissait avant $x = x'$, devient décroissante après; donc x'' répond à un maximum.

On déterminera enfin le moment d'inertie MR^2 nécessaire

pour obtenir une régularisation donnée, en appliquant le théorème des forces vives dans le passage du système de la position définie par $x = x'$ à la position définie par $x = x''$, ce qui donne

$$\mathrm{MR}^2 \frac{w^2}{n} = \mathrm{P}b(\cos x' - \cos x'' + \sin x'' - \sin x') - \mathrm{Q}a(x'' - x'),$$

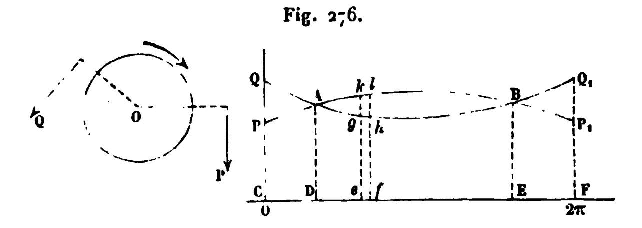
ou bien, en vertu de l'équation (4) et de la relation $x'' = \frac{\pi}{2} - x'$,

$$\mathrm{MR}^2 \frac{w^2}{n} = 2\mathrm{P}b(\cos x' - \sin x') - \frac{4\mathrm{P}b}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 2x'\right)$$
$$= 8\mathrm{P}b\left(\frac{\cos x' - \sin x'}{4} - \frac{1}{4} + \frac{x'}{\pi}\right) = 0,0106 \times 8\mathrm{P}b.$$

A égalité de vitesse moyenne w, de coefficient n et de travail moteur développé dans chaque tour du treuil O, le moment d'inertie MR^2 devient environ 52 fois moindre que dans le premier exemple, car il est réduit dans le rapport des coefficients numériques 0,5521 et 0,0106.

251. *Généralisation des exemples précédents.* — On suppose toujours, comme aux nos 249 et 250, un système composé d'un treuil principal O (*fig.* 276), en communication directe

Fig. 276.



ou indirecte, par courroies ou en engrenages, avec divers autres treuils; une puissance P agit sur le treuil O, et des résistances sans cesse équivalentes, quant au travail total produit, à une force Q agissant sur le treuil principal, se trouvent distribuées d'une manière quelconque sur l'ensemble des corps tournants. Les angles x décrits par le treuil principal O étant pris pour abscisses, on construit deux

courbes ayant pour ordonnées les moments de la puissance P et de la résistance Q relativement à l'axe de ce treuil; ces moments pourront varier suivant une loi quelconque, mais toutefois en repassant périodiquement par les mêmes valeurs après chaque révolution autour de O. Si $PABP_1$ et $QABQ_1$ sont ces deux courbes entre $x = 0$ et $x = 2\pi$, on aura donc d'abord $\overline{CP} = \overline{FP_1}$, $\overline{CQ} = \overline{FQ_1}$, et il sera inutile de les continuer plus loin, puisqu'elles se reproduiraient toujours les mêmes. Cela posé, voici comment on peut résoudre les trois questions que nous avons abordées dans les exemples du n° 250.

Pour que le mouvement soit périodique, il faut et il suffit que dans chaque tour le travail moteur soit égal au travail résistant. Or, si l'on mène deux ordonnées infiniment voisines *egk*, *fhl*, on voit qu'on a, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\text{aire } efkl = \overline{ef}.\overline{ek} = dx\,\mathfrak{M}_0 P,$$
$$\text{aire } efgh = \overline{ef}.\overline{eg} = dx\,\mathfrak{M}_0 Q;$$

ces aires représentent donc respectivement les travaux élémentaires de la puissance P et de la résistance Q (n° 102), d'où il suit que les travaux finis des mêmes forces pendant un tour sont représentés par les aires totales $PABP_1FC$ et $QABQ_1FC$. La condition de périodicité se traduit donc par celle de l'équivalence entre ces deux aires. En se rappelant qu'il y a égalité entre les ordonnées finales $\overline{FP_1}$, $\overline{FQ_1}$ et les ordonnées initiales $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$, on en conclut que les deux courbes doivent se couper un nombre pair de fois dans l'intervalle CF, sauf le cas exceptionnel d'une coïncidence exacte dans toute leur étendue.

Aux points d'intersection des deux courbes, tels que A et B, les travaux élémentaires moteur et résistant sont égaux en valeur absolue et leur somme algébrique devient nulle. Il en est de même pour la différentielle de la demi-force vive; donc celle-ci et par suite la vitesse angulaire passent par un maximum ou un minimum, pour la position du treuil que définit toute abscisse, telle que $\overline{CD}$ ou $\overline{CE}$, d'un point d'intersection. On distingue facilement les maxima des minima par

la situation des courbes dans le voisinage de ces points. Ainsi l'intersection A répond à un minimum, parce que, avant ce point, le travail élémentaire de la résistance est prédominant, tandis que, après, c'est le travail moteur élémentaire qui l'emporte, de sorte que, dans la position définie par l'abscisse $\overline{CD}$, la force vive et la vitesse angulaire cessent de décroître pour commencer à croître. De même un maximum répond au point B, parce qu'en ce point le travail élémentaire passe du positif au négatif.

Si les courbes se coupaient un plus grand nombre de fois, le même moyen ferait toujours reconnaître les maxima et les minima; seulement on serait obligé, pour être en mesure de déterminer le volant, de chercher à quelles positions répondent le plus grand des maxima et le plus petit des minima. Pour y arriver, nous appliquerons le théorème des forces vives entre la position initiale répondant à l'origine C et une position quelconque répondant à l'abscisse $\overline{Ce}$. En appelant ω la vitesse angulaire du treuil O, MR^2 son moment d'inertie réduit (n° 249), ω_0 la valeur initiale de ω pour $x = 0$, nous aurons

$$\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0^2 + \text{aire}\,\mathrm{PA}ke\mathrm{C} - \text{aire}\,\mathrm{QA}ge\mathrm{C},$$

d'où il suit que la plus grande valeur de ω^2 (et partant de ω) répond à celle de la différence $\mathrm{PA}ke\mathrm{C} - \mathrm{QA}ge\mathrm{C}$; il suffira donc de calculer cette différence pour les diverses abscisses, telles que $\overline{CE}$, qui donnent des maxima, et la plus grande des différences ainsi trouvées fera connaître la position du plus grand maximum de vitesse. Un moyen tout semblable fera trouver celle du minimum qui est algébriquement le plus petit.

Maintenant, pour déterminer le moment d'inertie MR^2, répondant à un coefficient de régularisation donnée $\frac{1}{n}$, on appliquera le théorème des forces vives dans l'intervalle, désormais connu, entre le plus grand maximum et le plus petit minimum de vitesse, ou inversement. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait seulement deux intersections A et B.

Dans ce cas on trouvera, comme au n° 250,

$$\mathrm{MR}^2\frac{\omega^2}{n} = \text{aire } \mathrm{A}k\mathrm{B}g\mathrm{A};$$

mais, afin de ne pas avoir à tenir compte, dans un calcul numérique, des échelles adoptées pour les abscisses x et les ordonnées $\overline{eg}$ ou $\overline{ek}$, il est mieux d'exprimer autrement le second membre de l'équation, c'est-à-dire la somme algébrique des travaux des forces dans l'intervalle DE. Quelles que soient les échelles, il existe toujours un rapport invariable entre les travaux représentés et leurs aires représentatives; donc, en désignant par $\mathfrak{T}$ le travail de P pour un tour entier, par τ le travail qui figure dans la dernière équation, par A et a les aires correspondantes $\mathrm{PABP_1FC}$, $\mathrm{A}k\mathrm{B}g\mathrm{A}$, mesurées sur le dessin avec telle unité de surface qu'on voudra, on peut poser la proportion

$$\frac{\tau}{a} = \frac{\mathfrak{T}}{\mathrm{A}}, \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{a}{\mathrm{A}}\mathfrak{T}$$

et par suite

$$\mathrm{MR}^2\frac{\omega^2}{n} = \frac{a}{\mathrm{A}}\mathfrak{T}.$$

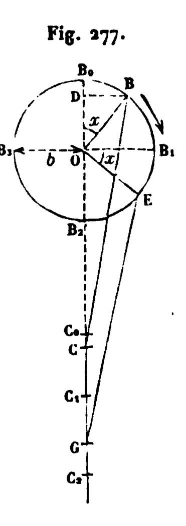
Cette dernière équation détermine MR^2 quand les autres quantités sont données.

Dans le cas de maxima et minima multiples, l'aire a pourrait se composer de plusieurs segments analogues à $\mathrm{A}k\mathrm{B}g\mathrm{A}$. Il est bien évident qu'on devrait les compter avec un signe ou avec le signe contraire, suivant que la courbe $\mathrm{PP_1}$ serait au-dessus ou au-dessous de la courbe $\mathrm{QQ_1}$, car on a toujours besoin d'avoir la différence entre le travail moteur et le travail résistant dans l'intervalle considéré. Cette différence serait positive si l'on était passé d'un minimum à un maximum, négative dans le cas contraire; mais ce serait toujours sa valeur absolue qu'il faudrait égaler à $\mathrm{MR}^2\frac{\omega^2}{n}$.

252. *Observations sur l'influence de l'obliquité des bielles.* — Dans les divers problèmes traités au n° 250, nous avons

toujours calculé le travail de la force P comme si elle avait une grandeur et une direction constantes. Pratiquement cela n'est pas tout à fait exact. Soient OB (*fig.* 277) la manivelle et O son centre; une bielle BC, de longueur $m.\overline{OB}$ ou mb, s'articule en B avec OB et en C avec une tige guidée, dont l'axe de figure passe par le centre O. C'est suivant cet axe de figure qu'agit la force constante P. Lorsqu'on suppose le rapport m infini, les déplacements de C sont identiques à ceux de la projection D du point B, et le travail de P est le même que si cette force agissait en B. Mais cela n'est plus vrai qu'approximativement quand on prend, suivant l'usage, $m=5$ ou 6; voici alors comment on pourrait avoir la valeur exacte du travail de P.

Fig. 277.



Le triangle BOC donne, quel que soit l'angle $BOB_0 = x$,

$$m^2 b^2 = \overline{OC}^2 + b^2 + 2\overline{OC}.b\cos x,$$

équation d'où l'on tire

$$\overline{OC} = -b\cos x + b\sqrt{m^2 - \sin^2 x}.$$

Si C_0 et C_2 sont les positions extrêmes du point C, répondant aux positions OB_0 et OB_2 de la manivelle, on a

$$\overline{OC_0} = (m-1)b, \quad \overline{OC_2} = (m+1)b$$

et par suite

$$\overline{CC_0} = \overline{OC} - \overline{OC_0} = b(1 - \cos x - m + \sqrt{m^2 - \sin^2 x}),$$
$$\overline{CC_2} = \overline{OC_2} - \overline{OC} = b(1 + \cos x + m - \sqrt{m^2 - \sin^2 x}).$$

Ces formules permettent de calculer le travail de P, depuis $x = 0$ jusqu'à une valeur quelconque de cet angle. On trouve, dans le cas d'une manivelle à double effet,

De $x = 0$ à $x = \pi$.... $P \times \overline{CC_0} = Pb(1 - \cos x - m + \sqrt{m^2 - \sin^2 x})$,

De $x = \pi$ à $x = 2\pi$... $P(2b + \overline{CC_2}) = Pb(3 + \cos x + m - \sqrt{m^2 - \sin^2 x})$.

La première expression subsisterait dans le cas d'une manivelle à simple effet; la seconde devrait se remplacer par la constante $2Pb$.

Dans le cas où il y aurait une seconde manivelle à double effet, placée à 90° en avant de la première, sa longueur $\overline{OE}$ et celle de sa bielle EG étant encore b et mb, on aurait

$$\begin{aligned}\overline{OG} &= -b\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+b\sqrt{m^2-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\\ &= b\sin x + b\sqrt{m^2-\cos^2 x}\end{aligned}$$

et, si C_1 est la position de C pour $x=\frac{\pi}{2}$ ou celle de G pour $x=0$,

$$\overline{OC_1} = b\sqrt{m^2-1}.$$

Par suite, le travail de la seconde force P, appliquée en G, s'exprimerait ainsi :

De $x=0$ à $x=\frac{\pi}{2}$.... $P\times\overline{C_1G} = Pb\left(\sin x+\sqrt{m^2-\cos^2 x}-\sqrt{m^2-1}\right)$,

De $x=\frac{\pi}{2}$ à $x=\frac{3\pi}{2}$... $\begin{cases} P(\overline{C_1C_2}+\overline{C_2G}) = P(\overline{OC_2}-\overline{OC_1}+\overline{OC_2}-\overline{OG}) \\ = Pb(2m+2-\sqrt{m^2-1}-\sin x-\sqrt{m^2-\cos^2 x}),\end{cases}$

De $x=\frac{3\pi}{2}$ à $x=2\pi$.... $\begin{cases} P(\overline{C_1C_2}+\overline{C_2C_0}+\overline{C_0G}) \\ = P(\overline{OC_2}-\overline{OC_1}+2b+\overline{OG}-\overline{OC_0}) \\ = Pb(4-\sqrt{m^2-1}+\sin x+\sqrt{m^2-\cos^2 x}).\end{cases}$

Avec ces diverses expressions on pourrait former celles du travail moteur total, produit de $x=0$ jusqu'à une valeur quelconque de cet angle; le travail dû à une résistance constante Q, agissant à la distance a de l'axe O, serait toujours $-Qax$ entre les mêmes limites.

Cela posé, il n'est pas difficile de résoudre numériquement, pour chaque valeur de m, par exemple pour $m=5$, les trois questions abordées dans les exemples du n° 250, concernant les manivelles à simple ou à double effet. Voici à quels résultats on arrive finalement :

1° La condition de périodicité après chaque tour complet reste la même que dans le cas d'une bielle infinie, mais la

subdivision de la période en demi-tours ou quarts de tour n'est pas conservée;

2° Les coefficients numériques 0,5521 et 0,1052 relatifs aux cas d'une manivelle unique à simple ou à double effet ne subissent qu'une assez petite altération, car ils sont remplacés par les nombres 0,5531 et 0,1289; mais il n'en est pas de même dans le cas des deux manivelles rectangulaires à double effet, car le coefficient 0,0106 doit être remplacé par 0,03575, nombre 3,37 fois plus grand.

Nous complétons ces renseignements en indiquant les angles auxquels répondent les plus grands maxima et les plus petits minima de vitesse angulaire.

Manivelle simple à simple effet.

Minimum pour $x = 0,1276\pi$, soit 22°57',9,
Maximum pour $x = 0,9140\pi$, soit 164°31',3.

Manivelle simple à double effet.

Minimum pour $x = 0,2634\pi$, soit 47°24',8,
Maximum pour $x = 1,7366\pi$, soit 312°55',2.

Deux manivelles rectangulaires à double effet.

Minimum pour $x = 0,1067\pi$, soit 19°12',0,
Maximum pour $x = 1,3933\pi$, soit 250°48',0.

Ces angles ne sont pas déterminés avec une exactitude rigoureuse, parce qu'on a employé dans leur recherche une expression simplifiée du travail des forces P, en remplaçant les radicaux $\sqrt{m^2-\sin^2 x}$, $\sqrt{m^2-\cos^2 x}$, $\sqrt{m^2-1}$ par les valeurs approximatives $m-\dfrac{\sin^2 x}{2m}$, $m-\dfrac{\cos^2 x}{2m}$, $m-\dfrac{1}{2m}$. Il en est résulté sur les angles dont il s'agit des erreurs pouvant s'élever à quelques minutes; mais cela n'a pas d'importance pour le calcul du travail des forces dans l'intervalle du minimum au maximum, lequel sert de base à la détermination du volant. Le travail compté à partir de $x=0$ ne diffère en effet de la demi-force vive que par une constante égale à la demi-force vive initiale, en sorte qu'il devient maximum ou minimum en même temps que la vitesse angulaire; et l'on

sait d'autre part qu'une fonction varie très peu aux environs de ses maxima et minima.

§ III. — Des régulateurs, freins et modérateurs.

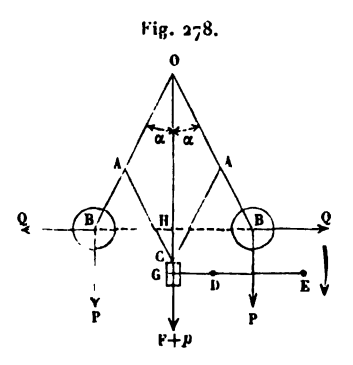
253. *Observations générales sur les régulateurs.* — Par l'emploi des volants on s'est proposé, au § II ci-avant, de rendre peu sensibles les variations de vitesse angulaire d'un arbre tournant soumis à des forces dont le travail était déterminé et connu, toujours avec cette condition que dans chaque tour le travail moteur total était égal au travail résistant total et que les travaux élémentaires repassaient périodiquement par les mêmes valeurs. Mais il arrive souvent que les résistances sont variables, parce que dans une usine on n'a pas toujours à faire exactement les mêmes opérations; d'un autre côté, le travail moteur peut éprouver aussi des variations accidentelles. Il est bon alors d'avoir à sa disposition un appareil qui puisse agir sur la source même du travail moteur et permette d'en dépenser juste la quantité nécessaire pour contrebalancer, à chaque tour de l'arbre principal, le travail des résistances; car autrement la vitesse finirait par s'anéantir, ou bien au contraire irait toujours en augmentant, suivant qu'il y aurait défaut ou excès de travail moteur. L'appareil dont il s'agit, et dont le rôle est bien différent, comme on voit, de celui d'un volant, se nomme un *régulateur;* tantôt il est à la disposition du conducteur ou surveillant de la machine, tantôt il est automatique, c'est-à-dire mis en mouvement par la machine même.

Il n'entre pas dans le programme de notre Cours de décrire tous les appareils de ce genre et d'indiquer les circonstances où l'on pourrait en faire usage; nous devons nous borner à quelques exemples.

254. *Régulateur de Watt.* — Le régulateur de Watt, nommé aussi *régulateur à force centrifuge* ou *régulateur à boules,* consiste essentiellement : 1° en deux tiges OB, OB (*fig.* 278), articulées en O sur un arbre vertical OC; 2° en deux tiges AC, AC articulées en C sur un manchon mobile le

long de l'arbre, et en A avec les tiges OB; 3° en deux boules pesantes B, B placées à l'extrémité inférieure des tiges OB. La figure du système est symétrique par rapport à l'axe vertical OC. Supposons maintenant que l'arbre OC reçoive son mouvement au moyen d'une courroie sans fin ou d'un engrenage qui le met en communication avec l'arbre principal d'une machine à vapeur ou avec l'arbre d'une roue hydraulique, par exemple. Pour une certaine vitesse angulaire de cet arbre, à laquelle correspond une vitesse angulaire ω autour de OC, on observe que les boules restent en équilibre relatif, la figure AOAC tournant autour de OC sans se déformer, et les boules conservant toujours le même angle d'écart α; en outre, le manchon n'a aucune tendance à monter ni à descendre et n'exerce pas de pression sur une fourchette EDG qui l'embrasse et qui est mobile autour d'un axe D, dans un sens ou dans l'autre. Si la vitesse augmente, les boules tendent à s'écarter de la verticale; mais, comme la fourchette oppose une certaine résistance à ce mouvement, il ne se produit qu'à l'instant où l'augmentation de vitesse devient suffisante pour vaincre cette résistance. Alors les boules font tourner le levier DE dans le sens de la flèche. Dans le cas d'une diminution suffisante de la vitesse, les boules se rapprochent au contraire de OC et font tourner DE en sens inverse. On profite de ces mouvements imprimés à DE pour diminuer le travail moteur dans le premier cas et pour l'augmenter dans le second. Par exemple, s'il s'agit d'une machine à vapeur, l'abaissement de E diminuera la quantité de vapeur admise dans le cylindre, ou, s'il s'agit d'une roue hydraulique, il diminuera l'ouverture par laquelle l'eau arrive sur la roue; l'effet contraire résulterait du relèvement du point E. On voit, par conséquent, que la vitesse angulaire autour de OC ne peut pas s'écarter au delà de certaines limites, de la valeur ω qui correspond au régime normal de la ma-

Fig. 278.



chine, sans faire naître une cause qui agit en sens contraire de ces écarts et tend à les annuler.

Après ces indications sommaires, faisons une théorie un peu plus détaillée, et cherchons notamment entre quelles limites peut varier la vitesse autour de OC sans que l'angle α éprouve aucun changement, c'est-à-dire sans troubler l'équilibre relatif de la figure AOAC par rapport à l'arbre OC. Nommons

ω la vitesse angulaire de cet arbre, qu'on suppose constante à l'instant considéré;
P le poids d'une boule;
p celui du manchon;
F la pression descendante que la fourchette du levier EDG exerce sur le manchon;
a, b, c, les longueurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AC}$.

Suivant le principe de d'Alembert (n° 193) ou suivant la théorie de l'équilibre relatif (n° 209), l'équilibre doit exister entre les poids des diverses parties du système OABCBAO, la force F et les forces d'inertie centrifuges répondant à la rotation uniforme ω, eu égard aux liaisons entre des parties de ce système entre elles et avec l'arbre OC qui supporte le tout. Si l'on suppose négligeables les masses des tiges, les poids se réduisent à ceux des boules et du manchon, et les forces centrifuges à deux forces horizontales Q passant par les points B et ayant pour intensité $\frac{P}{g}\omega^2 b \sin\alpha$ (n°s 223 et 226). Les forces centrifuges de chaque boule ont en effet une résultante unique, parce que l'axe de rotation est axe principal d'inertie d'une boule, pour le point où il perce le plan horizontal de symétrie mené par les centres B; d'autre part, la résultante se trouve dans ce plan et doit être parallèle à HB; enfin son point d'application (le centre de percussion) est sur cette ligne; donc la résultante agit bien suivant HB.

Maintenant, si l'on conçoit un mouvement virtuel compatible avec les liaisons, le théorème du travail virtuel (n° 131) fournit, dans l'hypothèse de frottements négligeables, la condition d'équilibre

$$2P\delta\overline{OH} + \frac{2P}{g}\omega^2 b \sin\alpha\,\delta\overline{BH} + (F+p)\,\delta\overline{OC} = 0.$$

La figure donne en outre les relations

$$\overline{\mathrm{OH}} = b\cos\alpha,\quad \overline{\mathrm{BH}} = b\sin\alpha,\quad \overline{\mathrm{OC}} = a\cos\alpha + \sqrt{c^2 - a^2\sin^2\alpha};$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\delta\overline{\mathrm{OH}} &= -\,b\sin\alpha\,\delta\alpha,\\ \delta\overline{\mathrm{BH}} &= \quad b\cos\alpha\,\delta\alpha,\\ \delta\overline{\mathrm{OC}} &= -\,a\sin\alpha\,\delta\alpha - \frac{a^2\sin\alpha\cos\alpha\,\delta\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\alpha}}.\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation d'équilibre, celle-ci devient, après suppression du facteur $\sin\alpha\,\delta\alpha$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &-2\mathrm{P}b + \frac{2\mathrm{P}}{g}\omega^2 b^2\cos\alpha\\ &\qquad - a(\mathrm{F}+p)\left(1 + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\alpha}}\right) = 0;\end{aligned}\right.$$

c'est la condition d'équilibre sous forme finie, en laissant de côté la solution évidemment irréalisable qui répondrait à $\alpha = 0$.

Si, dans l'équation (1), on fait $\mathrm{F} = 0$, on obtiendra la relation entre la vitesse de régime $\omega = \varpi$ et l'angle α correspondant, puisque, avec cette vitesse, il ne doit se produire aucune pression réciproque entre le manchon et la fourchette; cette relation résolue par rapport à ϖ^2 sera

$$(2)\qquad \varpi^2 = \frac{g}{b\cos\alpha}\left[1 + \frac{pa}{2\mathrm{P}b}\left(1 + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\alpha}}\right)\right].$$

On peut tirer de là ϖ quand on se donne α, et réciproquement. Pour avoir la plus grande valeur de ω compatible avec l'équilibre relatif et une valeur donnée de α, on devra faire F égal à sa valeur limite F_1, au delà de laquelle le manchon commencerait à monter malgré la résistance opposée par le levier. Nommant ω_1 cette limite de ω, on aura

$$(3)\quad \omega_1^2 = \frac{g}{b\cos\alpha}\left[1 + \frac{a(p+\mathrm{F}_1)}{2\mathrm{P}b}\left(1 + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\alpha}}\right)\right].$$

Si l'on voulait trouver, au contraire, la plus petite valeur ω_2 de ω, en dessous de laquelle il y aurait nécessairement descente du manchon, dans l'hypothèse où la même force F_1 devrait être employée pour déplacer le levier dans un sens ou dans l'autre, il suffirait de remplacer F_1 par $-F_1$ dans le second membre de l'équation (3), ce qui donnerait

$$(4)\quad \omega_2^2 = \frac{g}{b\cos\alpha}\left[1 + \frac{a(p-F_1)}{2Pb}\left(1 + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\alpha}}\right)\right].$$

Il est bon que ω_2 ne soit pas très inférieur à ω_1, car l'appareil serait peu sensible et remplirait mal son but s'il permettait une grande variation de vitesse sans sortir de l'équilibre relatif, et, par conséquent, sans déplacer le levier EDG. On s'imposera donc la condition

$$(5)\qquad \omega_1 - \omega_2 = \frac{w}{n},$$

n désignant un nombre suffisamment grand, mais cependant inférieur à celui qui a servi de base au calcul du volant (nos 250 et 251), afin que les boules ne se dérangent pas pendant la marche régulière de la machine. L'élimination de ω_1, ω_2 et w entre les quatre dernières équations fera ressortir une condition à remplir dans l'établissement du régulateur. Afin de la faire simplement, nous remarquerons que les vitesses limites ω_1 et ω_2 sont peu différentes en vertu de la condition (5), et qu'elles comprennent w dans leur intervalle, car les équations (2), (3), (4) donnent

$$\omega_1^2 > w^2 > \omega_2^2;$$

on peut donc poser sans grande erreur

$$\omega_1 + \omega_2 = 2w,$$

relation qui, multipliée membre à membre par (5), conduit à

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{2w^2}{n}.$$

Substituons, dans cette dernière équation, les valeurs (2),

(3) et (4) de ω^2, ω_1^2 et ω_2^2; on trouvera

$$\frac{F_1 a}{2Pb}\left(1+\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2-a^2\sin^2\alpha}}\right) = \frac{1}{n}\left[1+\frac{pa}{2Pb}\left(1+\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2-a^2\sin^2\alpha}}\right)\right]$$

ou bien, sous une autre forme,

$$\frac{a(nF_1-p)}{2Pb}\left(1+\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2-a^2\sin^2\alpha}}\right)=1. \tag{6}$$

Dans le régulateur à force centrifuge tel que Watt l'avait conçu, le poids p avait peu d'importance. En le supposant négligeable, la condition (6) deviendrait

$$\frac{F_1 a}{2Pb}\left(1+\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{c^2-a^2\sin^2\alpha}}\right)=\frac{1}{n},$$

et l'on pourrait y satisfaire en disposant convenablement du poids P des boules. Aujourd'hui, les constructeurs donnent souvent, au contraire, une grande valeur au poids p, sans cependant dépasser nF_1; de plus, on fait $c=a$. La condition (6) devient alors

$$(nF_1-p)a=Pb;$$

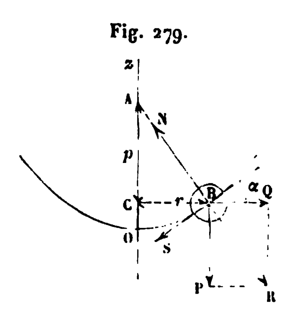
on y satisfait par un choix convenable des poids P et p. On voit que le premier pourra être petit si p se rapproche de nF_1.

Faisons observer que, si ω prend une valeur supérieure à ω_1 ou inférieure à ω_2, l'équilibre relatif est rompu, mais qu'il tend à se rétablir avec une valeur différente de α. Cette valeur se calculerait au moyen de l'équation (3) dans le premier cas, et de l'équation (4) dans le second, en y mettant, au lieu des limites ω_1 ou ω_2, la valeur qu'on attribuerait à la vitesse angulaire.

253. *Régulateur parabolique; régulateur à tiges croisées de Farcot.* — On a fait au régulateur de Watt un reproche que voici. Supposons qu'il y ait, pendant un certain temps, inégalité entre les travaux moteur et résistant, et que la prédominance appartienne au premier, par exemple. Alors la vi-

tesse de rotation ω augmentera de plus en plus et dépassera ω_1; les boules s'écarteront, feront baisser l'extrémité E du levier EDG (*fig.* 278) et diminueront la quantité de travail moteur arrivant à la machine; par suite, la vitesse ω diminuera aussi, les boules ne pourront pas se maintenir dans leur nouvelle position, redescendront vers leur point de départ et déferont ce qu'elles avaient fait en montant. Le travail moteur deviendra donc de nouveau prédominant, et les mêmes choses recommenceront comme la première fois, de sorte que l'appareil serait dans un état perpétuel d'oscillation et d'instabilité. On serait arrivé à la même conclusion en supposant au début un excès de travail résistant.

Fig. 279.



Avant d'indiquer comment on a essayé de corriger ce défaut, nous résoudrons deux questions préliminaires : 1° Supposons une courbe plane OM (*fig.* 279) de forme invariable, tournant uniformément avec une vitesse angulaire w autour de la verticale Oz contenue dans son plan. Quelle doit être la figure de OM, pour qu'une boule pesante B, dont le centre de gravité est assujetti à décrire cette courbe, reste en équilibre relatif, quelque position qu'on lui ait primitivement donnée, sans vitesse relative initiale?

L'équilibre doit exister entre le poids P de la boule, la réaction N de la courbe (dirigée normalement, dans l'hypothèse d'un frottement négligeable) et la force centrifuge $Q = \frac{P}{g} w^2 r$, force fictive à prendre en compte, parce qu'il ne s'agit ici que d'un équilibre relatif (n° 209). Donc les forces P et Q donneront une résultante R égale et contraire à N, et, de plus, cette dernière force sera, comme P et Q, contenue dans le plan de la courbe. Les triangles semblables ACB, BPR donnent ensuite la proportion

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PR}} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{r} = \frac{P}{\frac{P}{g} w^2 r};$$

d'où résulte

$$p = \frac{g}{w^2}.$$

Donc la sous-normale de la courbe est constante; donc cette courbe est une parabole ayant un paramètre égal à $\frac{g}{w^2}$ et son sommet situé sur l'axe de rotation.

2° Si l'on donne à la courbe OM une vitesse angulaire ω différente de w, quelle force S faudra-t-il appliquer au centre de gravité de la boule, suivant la tangente BS, afin de maintenir l'équilibre relatif? Cette force doit avoir la grandeur nécessaire pour que la résultante de S, P et $\frac{P}{g}\omega^2 r$ soit encore normale à la courbe; donc la somme algébrique des projections de ces forces sur la tangente est nulle, et l'on a, en nommant α l'angle SBC,

$$S = \frac{P}{g}\omega^2 r \cos\alpha - P\sin\alpha = P\sin\alpha\left(\frac{\omega^2 r}{g\tang\alpha} - 1\right)$$

ou bien, attendu que $r = p\tang\alpha = \frac{g}{w^2}\tang\alpha$,

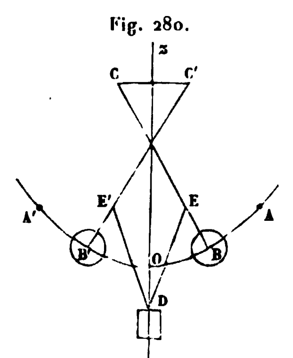
$$S = P\sin\alpha\left(\frac{\omega^2}{w^2} - 1\right).$$

On voit que S s'annule pour $\omega = w$, et que cette force a un sens conforme ou opposé à celui qu'indique la figure, suivant que ω est supérieur ou inférieur à w; on voit en outre que cette force est proportionnelle à P, toutes choses égales d'ailleurs, de sorte qu'on peut lui faire prendre telle valeur qu'on voudra, en disposant convenablement du poids de la boule.

Ces préliminaires étant établis, supposons que la courbe OB reçoive son mouvement de rotation par sa liaison, au moyen de courroies sans fin ou d'engrenages, avec l'arbre principal d'une machine. On conçoit que la boule soit capable, quand la vitesse angulaire atteindra une valeur trop supérieure à w, de vaincre la résistance opposée à son ascension le long de OM par un certain mécanisme, qui remplacerait le levier EDG du régulateur de Watt (*fig.* 278), et qu'alors ce mécanisme

agisse pour diminuer le travail moteur fourni à la machine. De même, si la vitesse angulaire descendait trop au-dessous de w, la boule descendrait malgré la résistance opposée par le même mécanisme, qui agirait alors en sens contraire et ferait arriver à la machine une plus grande quantité de travail moteur. Les choses se passeraient donc, sous ce rapport, comme dans le régulateur de Watt. Mais il y aurait, du moins à ce qu'il semble au premier abord, une différence importante : la boule, après avoir augmenté ou diminué le travail moteur et ramené en conséquence la vitesse angulaire de la courbe à sa valeur normale w, n'aurait plus de tendance à se déplacer le long de la courbe et pourrait demeurer en équilibre relatif dans la nouvelle position qu'elle aurait prise, puisque toutes les positions sont pour elle des positions d'équilibre dès que la vitesse angulaire prend la valeur w. On a cru avoir ainsi trouvé un moyen de corriger le défaut signalé tout à l'heure dans le régulateur de Watt; mais c'était une erreur que la pratique n'a pas tardé à faire reconnaître. Pour que la boule pût rester en repos relatif dans une nouvelle position prise par elle, à l'instant où la vitesse angulaire repasse par la valeur w après s'en être écartée, il faudrait que la vitesse relative de la boule fût nulle au même instant; or cette coïncidence ne se produira pas en général, la boule continuera de se déplacer, quoique la vitesse angulaire soit égale à w, et l'on aura des oscillations comme dans le premier cas. Il semble même résulter de l'expérience que les régulateurs paraboliques auraient le désavantage sous ce rapport.

Fig. 280.



Il est difficile d'établir une boule pesante dont le centre de gravité glisse le long d'une parabole sans frottement appréciable. Voici comment M. Farcot a résolu approximativement le problème. Soit OA (*fig.* 280) la position utile de la parabole, d'un côté de l'axe Oz; on lui substitue le cercle osculateur en son milieu B, et l'on assujettit la boule à décrire ce cercle en la liant à une tige BC, qui s'articule avec l'arbre

tournant Oz au point C, centre de courbure de la parabole pour le point B. On fait la même chose pour la moitié symétrique de la parabole, et on lie la boule B′ à la tige B′C′, qui s'articule au point C′ symétrique de C. Puis on relie les tiges BC, B′C′ avec le manchon D par deux tiges symétriques DE, DE′, articulées à leurs deux extrémités. Le manchon glisse le long de l'axe et agit, comme dans le régulateur de Watt, sur la fourchette d'un levier dont l'autre extrémité communique avec les appareils qui augmentent ou diminuent l'arrivée du travail moteur à la machine.

On a ainsi le *régulateur à tiges croisées* ou *régulateur Farcot.*

256. *Des freins et modérateurs.* — Lorsque l'économie du travail moteur n'est pas à prendre en considération et que ce travail est en excès à un instant donné, il arrive fréquemment qu'on s'arrange pour anéantir purement et simplement la partie surabondante, sans se préoccuper de l'emmagasiner et de la mettre en réserve pour un usage ultérieur. Pour cela, on crée une résistance accessoire, dont l'effet vient en aide à celui de la résistance principale, c'est-à-dire de la résistance en vue de laquelle la machine a été construite.

Le frein à lame flexible (nº 186) fournit un premier exemple d'un appareil de ce genre. Il permet de modérer et, au besoin, d'annuler la vitesse d'un treuil tournant, en faisant naître, sur une poulie concentrique à son axe, un frottement dont on peut augmenter l'intensité jusqu'à une certaine limite. Afin de montrer, dans un cas particulier simple, comment on pourrait calculer les effets de ce frein, supposons le treuil sans communication avec d'autres treuils et soumis à deux moments constants, l'un Pp moteur et l'autre Qq résistant, le second moindre que le premier. Quand on fait intervenir le frein, on produit un moment résistant Rr, également supposé invariable, dont on sait calculer l'intensité (nº 186); ce moment ajouté à Qq rendra les résistances prédominantes, et le mouvement se ralentira. Dans cette hypothèse, on demande le temps T nécessaire pour anéantir la vitesse angulaire ω_0 du treuil, acquise antérieurement à l'époque où le frein commence son action.

Nommons ω la vitesse angulaire, pour une époque t quelconque pendant l'action du frein, et I le moment d'inertie du treuil relativement à son axe; on aura (nº 222)

$$I\frac{d\omega}{dt} = Pp - Qq - Rr$$

ou, en désignant par $-a$ le quotient constant et négatif $\frac{Pp - Qq - Rr}{I}$,

$$\frac{d\omega}{dt} = -a.$$

De là résulte par l'intégration, quand on commence à compter le temps depuis l'instant où ω était égal à ω_0,

$$\omega = \omega_0 - at;$$

donc la vitesse deviendra nulle au bout du temps T donné par l'équation

$$\omega_0 - aT = 0, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{\omega_0}{a}.$$

Lorsque la vitesse est anéantie, le glissement n'existe plus; il n'est pas non plus sur le point de naître, parce que la différence $Pp - Qq$ qui tend maintenant à entraîner le treuil est inférieure au moment Rr que donneraient les forces de frottement, si le glissement était produit ou sur le point de commencer. Donc il y aura équilibre stable, et le moment résistant dû au contact de la poulie avec la lame du frein sera réduit à $Pp - Qq$.

On peut encore se demander quel a été l'angle θ décrit par le treuil autour de son axe pendant le temps T. Si l'on nomme θ celui qui répond au temps quelconque $t < T$, on aura

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_0 - at;$$

d'où l'on tire, en intégrant depuis $t = 0$, $\theta = 0$,

$$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}at^2.$$

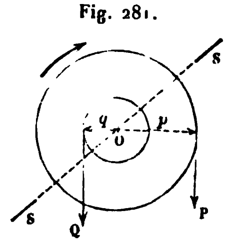
Faisant enfin $t = T = \frac{\omega_0}{a}$, on trouve

$$\theta = \frac{\omega_0^2}{2a}.$$

Au lieu de laisser agir le moment Rr des forces de frottement jusqu'à l'anéantissement de la vitesse, on pourrait aussi desserrer le frein dès que le treuil est suffisamment ralenti, et ne lui faire produire qu'un moment égal et contraire à $Pp - Qq$, ce qui rendrait alors le mouvement uniforme.

Comme second exemple d'appareils du même genre, nous citerons le modérateur à ailettes. Nous considérons encore, pour plus de simplicité, un treuil O (*fig.* 281) soumis à deux moments constants Pp, Qq, le premier moteur et de grandeur supérieure au second, qui agit comme résistance. Dans ces conditions, la vitesse angulaire tendrait à croître indéfiniment. Afin d'empêcher cette accélération indéfinie, on munit le treuil d'ailettes planes S, contenues dans des plans passant par l'axe et deux à deux diamétralement opposées; en général, il y en a deux ou quatre. Ces ailettes éprouvent une résistance à leur mouvement dans l'air, et l'on peut admettre, d'après l'expérience, que leur ensemble donne naissance à un couple résistant proportionnel au carré de la vitesse angulaire. Si donc on conserve le sens des notations I et ω de l'exemple précédent et qu'on nomme, de plus, b une quantité constante pour le système donné d'un treuil avec ses ailettes, on aura (n° 222)

Fig. 281.



$$I\frac{d\omega}{dt} = Pp - Qq - b\omega^2$$

ou bien, en posant encore $Pp - Qq = aI$ et $b = \frac{aI}{c^2}$,

$$\frac{d\omega}{dt} = a\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right).$$

D'après cette équation, il est clair que a représente l'accélération angulaire du treuil marchant dans le vide, et c la vitesse

angulaire pour laquelle le moment $b\omega^2$ produit par la résistance de l'air deviendrait égal à $Pp - Qq$.

On tire de là

$$\frac{d\omega}{c^2 - \omega^2} = \frac{a\,dt}{c^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{d\omega}{c + \omega} + \frac{d\omega}{c - \omega} = \frac{2a\,dt}{c};$$

l'intégration est alors immédiatement possible, et elle donne

$$\mathrm{L}\frac{c + \omega}{c - \omega} = \frac{2at}{c} + \text{const.}$$

La constante sera nulle, si l'on suppose qu'à l'époque où l'on commence à compter le temps, le treuil vient d'être abandonné, sans vitesse initiale, à l'action des forces P et Q, car on doit avoir simultanément $\omega = 0$ et $t = 0$. La dernière équation se met alors sous la forme

$$\frac{c + \omega}{c - \omega} = e^{\frac{2at}{c}},$$

et l'on en déduit

$$\omega = c\,\frac{e^{\frac{2at}{c}} - 1}{e^{\frac{2at}{c}} + 1},$$

expression toujours croissante, mais inférieure à la valeur c, dont elle se rapproche indéfiniment. La vitesse angulaire ne peut donc dépasser une certaine limite $c = \sqrt{\frac{a\mathrm{I}}{b}}$, qu'on peut, du reste, abaisser autant qu'on veut en multipliant les ailettes, les éloignant de l'axe et augmentant leur surface, toutes choses qui ont pour effet d'augmenter le coefficient b.

CINQUIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE SPÉCIALE DES FLUIDES.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE.

---

§ I. — Conditions d'équilibre des fluides.

257. *Définition et caractères essentiels de la fluidité.* — On nomme *fluides* une certaine classe de corps dont les molécules jouissent d'une très grande mobilité les unes par rapport aux autres, de sorte qu'ils manquent à peu près complètement de cette qualité appartenant aux corps solides, qu'on désigne par le nom de *cohésion*. En supposant la fluidité parfaite (ou l'absence de cohésion poussée à l'extrême limite), nous la définirons par les faits suivants : 1° Si deux parties d'un fluide se touchent suivant une surface plane P d'étendue quelconque, les forces qui tendraient à les disjoindre, en imprimant à l'une d'elles, relativement à l'autre, un mouvement suivant la normale à P, seront toujours suivies de leur effet, quelque petite que soit leur intensité; il en serait de même si l'une des deux parties était remplacée par un corps solide. 2° Il en est encore de même quand il s'agit de faire glisser, suivant le plan P, les deux parties l'une sur l'autre, ou l'une des deux parties sur un solide qui aurait remplacé l'autre; la résistance au glissement est nulle. 3° Enfin, tout changement dans la figure d'un fluide, non accompagné d'une variation de son volume, s'effectue sans qu'il y ait aucun travail produit par les actions mutuelles des molécules.

Les fluides se divisent en deux genres : les liquides et les gaz. Les premiers sont caractérisés par une compressibilité très petite, que nous regarderons théoriquement comme nulle. Les seconds sont, au contraire, éminemment compressibles; ils reprennent leur volume initial quand la pression cesse d'agir, pourvu cependant que la température n'ait pas varié; pour cette raison, ils sont aussi nommés *fluides élastiques*.

Il n'existe pas de fluides parfaits, dans toute la rigueur du mot. Tous les gaz et la plupart des liquides usuels, comme l'eau, l'alcool, etc., s'approchent sans doute beaucoup de la fluidité parfaite; cependant, ils sont encore doués d'une certaine *viscosité* [1], facile à mettre en évidence par les expériences les plus simples, qui s'oppose dans une certaine mesure aux disjonctions et déformations dont nous parlions tout à l'heure, et dont il est indispensable de tenir compte dans l'étude de certaines questions particulières, comme on le verra plus tard. Mais cette nécessité n'existe pas quand on ne considère que des fluides en repos absolu ou relatif dans des vases dont aucune dimension n'est très petite; toutes les expériences tendent à démontrer que les effets de la viscosité deviennent sensiblement nuls dans ce cas.

Les deux Parties de la Mécanique rationnelle spécialement consacrées à l'équilibre et au mouvement des fluides ont pris respectivement les noms d'*Hydrostatique* et d'*Hydrodynamique*. La première forme une doctrine assez complète, mais il n'en est pas de même de la seconde. Aujourd'hui encore, par suite de difficultés d'analyse que les géomètres n'ont pas réussi à surmonter, elle se borne à des généralités plus ou moins vagues et reste une science presque purement spéculative. La Mécanique des fluides prend aussi le nom d'*Hydraulique*, lorsqu'elle est traitée spécialement en vue de ses applications usuelles, et que, sans cesser de se rattacher le plus étroitement possible aux doctrines de la science rigoureuse, elle fait concourir dans une large mesure les données expérimentales à la solution des problèmes qu'elle doit aborder.

---

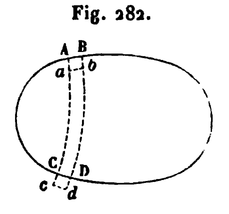
[1] Nous entendons uniquement par ce mot l'imperfection de la fluidité ou, si l'on veut, un reste de cohésion.

258. *Pression dans un fluide en repos; égalité de la pression en tous sens.* — Lorsqu'un fluide est en repos absolu ou relatif dans un vase, il est facile de constater par une expérience directe qu'il supporte une action répulsive de la part de chaque élément superficiel de la paroi. Cette force provient en réalité des répulsions mutuelles entre les molécules fluides et celles du vase, dans le voisinage de la surface de contact; dire qu'elle est exercée par cette surface est une fiction qui ne présente aucun inconvénient et qui a l'avantage de rendre le langage plus simple. Cette force, divisée par l'élément de sa surface sur lequel elle s'exerce, est ce qu'on nomme *pression par unité de surface* sur l'élément en question; si le fluide est parfait, elle ne peut qu'être dirigée suivant la normale à l'élément de surface, puisque cet élément ne donne jamais lieu à une réaction tangentielle (nº 257).

Considérons maintenant un point quelconque M dans l'intérieur de la masse fluide, et autour de ce point une surface fermée quelconque ayant ses dimensions infiniment petites. Le fluide contenu dans cette surface étant en équilibre dans un vase idéal formé par le fluide extérieur solidifié, chaque élément superficiel de son contour supporte, comme on vient de le dire, une certaine pression par unité de surface, qu'on nomme *pression* du fluide au point M. Mais, pour que cette définition offre un sens précis, il est nécessaire de montrer que la pression en M ne dépend ni de l'élément qu'on prend sur la surface fermée infiniment petite, ni de la forme indéterminée de cette surface.

A cet effet, soit d'abord donnée une masse fluide homogène, dont chaque point supporte une force directement appliquée proportionnelle à sa masse et de direction constante, comme l'action de la pesanteur, par exemple. Cherchons une relation entre les pressions par unité de surface en deux points A et C de l'enveloppe (*fig.* 282). Traçons un canal très délié ABCD, dont les deux sections normales AB, CD seraient des éléments égaux découpés en A et C sur la surface extérieure. Le fluide contenu dans ce canal étant en équilibre, il

Fig. 282.



doit satisfaire à la condition générale fournie par le théorème du travail virtuel (n° 127). Or nous supposerons un déplacement virtuel dans lequel le fluide ABCD, sans changer de volume, prendrait la position *abcd*, en avançant infiniment peu dans le canal. Soient

ω les aires AB, CD;

δs les longueurs $\overline{Aa}$, $\overline{Cc}$, qui doivent être égales, attendu que l'égalité des volumes ABCD, *abcd* entraîne celle des tranches AB*ab*, CD*cd*, assimilables à des cylindres de même base;

p, p' les pressions par unité de surface en A et C;

ρ la densité du fluide ou sa masse par unité de volume;

j la force rapportée à l'unité de masse, qui sollicite chaque point;

h la projection de AC sur la direction de j.

Pendant le déplacement virtuel supposé, les travaux des pressions $p\omega$, $p'\omega$, agissant en AB et CD, seront $p\omega\delta s$, $-p'\omega\delta s$; les travaux des pressions latérales sur le contour du canal seront nuls, puisque, d'après l'hypothèse de la fluidité parfaite (n° 257), le fluide intérieur glissera sans résistance sur celui qui l'environne; le travail des forces intérieures sera nul aussi, d'après la même hypothèse, parce que le volume total ne change pas. Quant au travail des forces proportionnelles à j, pour l'évaluer, il faudrait, comme dans le cas de la pesanteur (n° 153), multiplier la force totale agissant sur la masse fluide ABCD par le déplacement du centre de gravité de cette masse, en projection sur j; ou plus simplement, comme les deux positions ABCD, *abcd* ont une partie commune *ab*CD, on sait qu'on peut en faire abstraction et calculer le travail répondant au passage fictif de la partie AB*ab* à la position CD*cd*. Ce dernier travail est exprimé par $\rho j\omega\delta s.h$, de sorte qu'on a, pour exprimer la nullité de l'ensemble des travaux virtuels,

$$p\omega\delta s - p'\omega\delta s + \rho jh\omega\delta s = 0,$$

soit, en supprimant le facteur $\omega\delta s$ et résolvant par rapport à p',

$$p' = p + \rho jh. \qquad (1)$$

Ce lemme établi, revenons à la partie de fluide que nous avions isolée tout à l'heure dans une surface fermée infiniment petite, tracée autour du point M. Les forces qui agissent sur cette portion étant supposées varier d'une manière continue, tant sous le rapport de la direction que sous celui de l'intensité par unité de masse, on peut toujours les regarder comme parallèles et proportionnelles aux masses, dans l'étendue infiniment petite du volume intérieur à la surface. Dès lors l'équation (1) devient applicable, et, attendu que h est infiniment petit, nous pouvons en conclure que les pressions par unité de surface aux divers points de l'enveloppe diffèrent infiniment peu, et qu'elles tendent vers une seule et même limite, quand les dimensions de l'enveloppe tendent vers zéro. De plus, cette limite ne peut qu'être la même pour deux surfaces de forme différente tracées autour de M, parce que l'équation (1) pourrait se démontrer, par la répétition exacte des mêmes raisonnements, pour le fluide compris entre ces deux surfaces. La pression en un point d'un fluide immobile est donc une quantité bien déterminée.

Si l'on prend deux éléments superficiels infiniment petits, contenant tous les deux le point M, on pourra les regarder comme appartenant à deux surfaces fermées tracées autour de ce point. Faisant ensuite décroître indéfiniment les dimensions de ces surfaces, on pourra dire, en vertu de ce qui précède, que les deux éléments supportent la même pression par unité de surface. La pression par unité de surface sur tout élément superficiel passant en un point d'un fluide est donc indépendante de l'orientation de cet élément. Cette propriété importante constitue ce qu'on appelle l'*égalité de la pression en tous sens autour d'un point du fluide*. Il est bien essentiel de remarquer que les raisonnements faits pour y arriver ne subsisteraient plus sans l'hypothèse de la fluidité parfaite, à laquelle nous avons dû recourir dans la démonstration de l'équation (1).

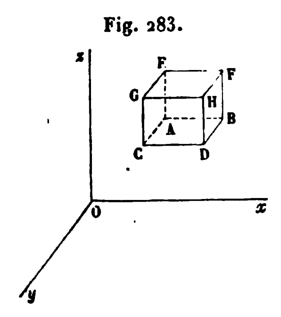
259. *Équations générales de l'équilibre des fluides.* — Après avoir pris trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 283), isolons par la pensée, dans la masse totale, un élément de volume ABCDEFGH en forme de parallélépipède

rectangle, dont les arêtes, parallèles aux axes, auront pour longueurs dx, dy, dz. Nommons

x, y, z les coordonnées du sommet A de ce parallélépipède;
p la pression du fluide en A;
$X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ les composantes, parallèles aux axes, de la force directement appliquée, qui agit sur chaque masse élémentaire dm prise dans les environs de A;
ρ la densité en A, c'est-à-dire le rapport entre la masse contenue dans un volume infiniment petit, autour de A, et ce volume lui-même.

Nous supposons que X, Y, Z varient d'une manière continue en passant d'un point à l'autre, de sorte que toutes les masses comprises dans le volume AB...H reçoivent l'action de forces parallèles et proportionnelles aux masses à des infiniment petits près d'ordre supérieur; de même, la densité ne varie qu'infiniment peu dans ce volume, et nous pouvons considérer le fluide intérieur comme homogène.

Fig. 283.



Cela posé, il est facile de voir que toutes les forces agissant sur le parallélépipède sont réductibles à des forces passant par son centre de gravité; car, d'une part, les pressions qu'il supporte à l'extérieur peuvent être regardées comme uniformément réparties sur ses faces et se réduisent, pour chaque face, à une force normale appliquée au centre de figure; d'autre part, la force directement appliquée

$$\rho\, dx\, dy\, dz \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

résulte d'actions parallèles et proportionnelles aux masses. Les six conditions générales de l'équilibre (n° 129) se réduiront donc à trois pour le parallélépipède élémentaire $dx\,dy\,dz$; il suffira que la somme des projections des forces sur les trois axes coordonnés soit nulle (n° 133, 1°). Or, la pression totale sur la face ADEH étant exprimée par $p\,dy\,dz$, la face opposée BCFG supporte en sens contraire la même

force augmentée de sa différentielle partielle relativement à x, soit $\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dy\, dz$, de sorte que ces pressions ont une somme algébrique $-\frac{dp}{dx} dx\, dy\, dz$, parallèle à Ox. Les pressions sur les quatre autres faces ont des directions perpendiculaires à cet axe; les forces directement appliquées donnent une somme de projections sur Ox, égale à $\rho X\, dx\, dy\, dz$. On aura donc

$$-\frac{dp}{dx} dx\, dy\, dz + \rho X\, dx\, dy\, dz = 0.$$

En raisonnant de même pour les deux autres axes et supprimant le facteur $dx\, dy\, dz$, on obtient le système d'équations d'équilibre

$$(2) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

La pression p ne pouvant être, dans un fluide en équilibre, qu'une fonction des seules variables x, y, z qui définissent la position d'un point, sa différentielle complète dp a pour valeur $\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz$, soit, d'après les équations (2) ci-dessus,

$$(3) \qquad dp = \rho(X\, dx + Y\, dy + Z\, dz),$$

relation unique, équivalente aux trois équations dont nous l'avons déduite, puisque x, y, z sont des variables indépendantes.

On voit donc que les conditions d'équilibre de toute masse élémentaire comprise dans le fluide entraînent comme conséquence que le trinôme $\rho(X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)$ soit la différentielle exacte d'une fonction p de trois variables indépendantes x, y, z. Pour cela, il faut et il suffit qu'on ait

$$(4) \quad \frac{d.\rho X}{dy} = \frac{d.\rho Y}{dx}, \quad \frac{d.\rho Y}{dz} = \frac{d.\rho Z}{dy}, \quad \frac{d.\rho Z}{dx} = \frac{d.\rho X}{dz};$$

ce sont les conditions d'équilibre (2) débarrassées de l'inconnue auxiliaire p. Elles sont faciles à vérifier lorsque ρ, X,

Y, Z sont donnés en fonction de x, y, z, c'est-à-dire quand on définit *a priori*, pour chaque point, la densité en ce point et les forces directement appliquées; dans ce cas, si la vérification réussit, l'équation (3) pourra s'intégrer et fera connaître la pression en tout point du fluide, pourvu toutefois que les conditions particulières de la question permettent de déterminer la constante introduite par l'intégration. Ici se manifeste la nécessité d'une nouvelle condition d'équilibre, dans le cas d'un fluide gazeux; on voit, en effet, que la pression p et la densité ρ sont maintenant connues en tout point du gaz, et elles doivent vérifier la relation fournie par les lois de Mariotte et de Gay-Lussac

$$\rho = \frac{kp}{1+\alpha\theta}, \tag{5}$$

où k désigne une constante spécifique du gaz considéré, θ la température et α le coefficient de dilatation des gaz, égal à $0,00366$ ou $\frac{1}{273}$.

Dans les questions relatives à l'équilibre des gaz, on suppose assez ordinairement que θ a une valeur constante et donnée, mais que ρ est une inconnue auxiliaire à déterminer en même temps que p. Il existe alors, conformément à l'équation (5), un rapport constant $\frac{k}{1+\alpha\theta} = \mathrm{K}$ entre la densité et la pression, et l'équation (3) peut s'écrire en conséquence

$$\frac{dp}{\mathrm{K}p} = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz. \tag{6}$$

Comme le premier membre de l'équation (6) est la différentielle de $\frac{1}{\mathrm{K}}\mathrm{L}p$, on voit que l'équilibre d'un gaz à température constante est impossible si le trinôme $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ n'est pas une différentielle exacte. Si cette condition est remplie, l'intégration de l'équation (6) donnera p et, par suite, la densité ρ égale à $\mathrm{K}p$.

Indépendamment des conditions dont on a parlé jusqu'à présent et qui se rapportent aux points pris dans l'intérieur du fluide, il y aura généralement d'autres conditions relatives

à la surface extérieure. La pression est maintenant connue en chaque point de cette surface, puisque nous avons pu déterminer p en fonction de x, y, z; pour l'équilibre, il faut que cette pression soit effectivement exercée par les corps en contact avec le fluide.

260. *Surfaces de niveau.* — Dans un fluide en équilibre, la pression p est une fonction déterminée des coordonnées x, y, z du point correspondant; en égalant cette fonction à une constante arbitraire P, à laquelle on attribuera une série de valeurs, on aura, pour chaque valeur particulière, l'équation d'une surface en tous les points de laquelle la pression aura une valeur constante égale à P. Toutes les surfaces ainsi obtenues se nomment *surfaces de niveau.*

Les surfaces de niveau jouissent de diverses propriétés intéressantes. En voici une d'abord qui résulte uniquement de leur définition et qui est vraie dans tous les cas : elle consiste en ce que la résultante des forces X, Y, Z pour un point quelconque M du fluide est normale à la surface de niveau qui passe par ce point. Prenons, en effet, un point M′ infiniment voisin de M sur la même surface de niveau; soient

ds la longueur $\overline{MM'}$;
dx, dy, dz ses projections sur les axes coordonnés;
$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ la résultante des forces X, Y, Z.

La différentielle dp étant nulle quand on passe de M à M′, on a, d'après l'équation (3),

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Or le trinôme du premier membre de cette équation exprime (nº 102, c) le travail que ferait la force R dans le déplacement ds de son point d'application, c'est-à-dire $R\,ds\cos(R, ds)$; la nullité de ce travail prouve celle du facteur $\cos(R, ds)$. Donc R est perpendiculaire à MM′, et, comme cet élément a une direction indéterminée à partir de M sur la surface de niveau, il en résulte que R est normale à cette surface en M.

Si l'on suppose que l'élément $\overline{MM'} = ds$ ne soit plus tracé sur une surface de niveau, mais entre deux surfaces de niveau menées par deux points infiniment voisins M et M′, le

trinôme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ n'en reste pas moins égal à $R\,ds\cos(R, ds)$, de sorte qu'on a

$$dp = \rho R\,ds\cos(R, ds) = \rho R\,dn$$

en représentant par dn la projection de ds sur R, ou encore la position de la normale menée par M et comprise entre les deux surfaces. Si la force R ne devient jamais nulle ou infinie, dn sera comparable à la différence constante dp dans toute l'étendue d'une même surface de niveau, en sorte que cette surface ne pourra jamais couper la surface de niveau voisine, ni s'en éloigner indéfiniment.

Considérons maintenant d'une manière spéciale le cas où l'on aurait

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\,\varphi(x, y, z),$$

la fonction φ étant d'ailleurs quelconque. L'équation (3) prend alors la forme

$$dp = \rho\,d\varphi(x, y, z),$$

qui fait reconnaître immédiatement que p et φ sont constantes en même temps. Donc p est une fonction de φ, et cette fonction a ρ pour sa dérivée $\frac{dp}{d\varphi}$, qui est aussi une fonction de φ; donc, sur une même surface de niveau, φ et ρ sont des quantités constantes aussi bien que p. Ainsi, dans le cas particulier où $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte, nous pouvons ajouter aux propriétés des surfaces de niveau déjà démontrées en général : 1° que leur équation s'obtient immédiatement en posant

$$(7)\qquad \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \text{const.};$$

2° que la densité reste invariable sur une surface de niveau.

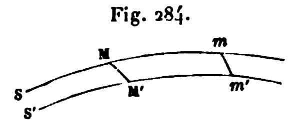
On peut donner une forme moins abstraite à la démonstration de cette dernière propriété. Soient deux surfaces de niveau infiniment voisines S, S′ (*fig.* 284), représentées par les équations

$$\varphi(x, y, z) = C, \quad \varphi(x, y, z) = C + dC.$$

Si nous allons du point M de la première surface au point M′

de la seconde, l'accroissement dp de la pression sera exprimé par $\rho\, d\varphi$ ou par $\rho\, d\text{C}$, et la densité ρ dans le voisinage de M aura pour valeur $\frac{dp}{d\text{C}}$. Lorsque le passage se fait ailleurs, de m en m', la densité en m est encore égale au quotient de l'accroissement de p par celui de φ, pour le déplacement mm'; or ces accroissements sont les mêmes que pour MM', puisque, sur chaque surface, il n'y a qu'une seule valeur pour la pression et pour la fonction φ; donc les densités en M et m sont égales.

Fig. 284.



Quand il s'agit d'un gaz et que sa température θ varie d'un point à un autre, la relation (5) montre que la pression et la densité ne peuvent pas être constantes sans que θ le soit aussi. La température est donc constante sur chaque surface de niveau représentée par l'équation générale (7).

On a cité, à l'occasion du théorème des forces vives (n° 109), dans la dynamique du point matériel, divers cas particuliers dans lesquels existe une fonction $\varphi(x, y, z)$ ayant pour différentielle $\text{X}\, dx + \text{Y}\, dy + \text{Z}\, dz$. On pourrait citer les mêmes cas à l'occasion de l'équilibre des fluides, car les deux trinômes ont la même expression analytique, sauf un facteur constant, égal à la masse du point matériel considéré au n° 109.

261. *Équilibre des fluides pesants.* — Considérons un fluide pesant; si on le rapporte à un système d'axes rectangulaires, parmi lesquels l'axe des z serait vertical et descendant, on aura

$$\text{X} = 0, \quad \text{Y} = 0, \quad \text{Z} = g.$$

L'équation (3) devient en conséquence

$$dp = \rho g\, dz$$

ou, en appelant Π le poids ρg de l'unité du volume,

$$dp = \Pi\, dz. \tag{8}$$

La quantité $\text{X}\, dx + \text{Y}\, dy + \text{Z}\, dz$ se réduit ici à $g\, dz$; les surfaces de niveau ont pour équation différentielle $dz = 0$,

d'où l'on tire $z =$ const. Ce sont donc des plans horizontaux. La pression et la densité (et aussi la température, s'il s'agit d'un gaz) ne varient pas dans une même section horizontale du fluide (n° 260).

On peut démontrer aussi que la surface de séparation commune à deux fluides pesants en équilibre est nécessairement un plan horizontal, si leurs densités sont différentes. Soient en effet M et M' (*fig.* 285) deux points infiniment voisins de cette surface, ayant dz pour différence de niveau; soient Π et Π' les poids des deux fluides par unité de volume, aux environs de l'élément MM'. La pression p en M est la même pour les deux fluides, car autrement leurs actions mutuelles suivant un élément superficiel $d\omega$, tracé autour de M sur leur surface de contact, ne pourraient pas être égales, comme il faut qu'elles le soient (n° 95); par la même raison il y a en M' une valeur unique $p + dp$ pour les deux fluides. Si donc nous appliquons l'équation (8) successivement aux deux fluides, en passant de M à M', nous aurons

Fig. 285.

$$dp = \Pi\, dz = \Pi'\, dz,$$

égalité impossible lorsque Π diffère de Π', à moins de supposer $dz = 0$. Ainsi deux points consécutifs quelconques de la surface de séparation sont au même niveau, et par conséquent cette surface est horizontale.

La surface libre d'un liquide pesant est nécessairement un plan horizontal, si l'on y suppose une pression constante; on voit par ce qui précède qu'il en est encore de même quand le liquide est surmonté d'un gaz de densité différente, sans qu'il y ait à faire d'avance l'hypothèse d'une pression constante en tous les points de l'atmosphère gazeuse.

Des liquides différents et inégalement denses étant superposés l'un à l'autre, l'équilibre peut exister quand les surfaces de séparation sont des plans horizontaux; mais, pour qu'il y ait équilibre stable, il faut en outre qu'ils soient superposés dans l'ordre décroissant des densités. En effet, s'il en est ainsi, le principe d'Archimède (établi en Physique, et que nous démontrerons bientôt) permet de reconnaître facile-

ment qu'une molécule fluide prise dans le voisinage d'un plan de séparation tend à revenir à sa position d'équilibre, lorsqu'elle en est dérangée de manière à pénétrer dans le fluide différent; au contraire, elle s'en écarterait de plus en plus, si le fluide le plus dense était au-dessus de l'autre.

Dans le cas d'un liquide incompressible il peut y avoir homogénéité de la masse totale; alors Π est constant et l'on obtient, par l'intégration de l'équation (8), en nommant p_0 la pression dans le plan horizontal situé à la hauteur z_0 en dessous de l'origine des coordonnées,

$$(9) \qquad p = p_0 + \Pi(z - z_0).$$

Il est bien entendu que, pour être en droit de calculer, comme nous venons de le faire, la différence de pression entre deux points répondant aux ordonnées z et z_0, il faut qu'on puisse aller de l'un à l'autre sans sortir du liquide; car l'équation (8) ne donne la différence dp qu'entre deux points pris à son intérieur, et l'intégration (qui revient toujours à faire la somme d'équations semblables, pour tous les éléments d'un chemin fini) ne peut donner que la différence de pression entre deux points de la même masse liquide.

Si l'on prenait dans le fluide un prisme droit ayant une hauteur h et une base égale à l'unité de surface, et si, après l'avoir solidifié, on le posait sur un plan horizontal, il exercerait sur ce plan une pression égale à son poids, c'est-à-dire à Πh. Une pression p étant donnée en un point du fluide, on peut choisir h de manière qu'on ait $p = \Pi h$ ou $h = \frac{p}{\Pi}$. La hauteur ainsi calculée se nomme *hauteur représentative de la pression*. L'équation (9), mise sous la forme

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{p_0}{\Pi} + z - z_0,$$

montre alors que l'accroissement de la hauteur représentative de la pression dans un fluide pesant et homogène en équilibre est égal à celui de l'ordonnée z.

En Physique on désigne souvent les pressions par les hauteurs représentatives correspondantes; ainsi l'on dit : la pression de 760^{mm} de mercure, la pression de 10^{m},333 d'eau.

Dans l'application des formules de la Mécanique, il ne faut pas oublier qu'il y a simplement proportionnalité entre les pressions et leurs hauteurs représentatives en un liquide de nature donnée; le rapport constant entre les deux choses est le poids Π de ce liquide par unité de volume. Pour nous, la pression est un certain nombre de kilogrammes par mètre carré, auquel on ne peut substituer un certain nombre de mètres, à moins qu'il ne s'agisse d'évaluer seulement le rapport de deux pressions. Mais, s'il s'agit de calculer numériquement la pression de 760^{mm} de mercure, nous nous rappellerons que le mètre cube de ce liquide à 0° pèse 13596^{kg}; la pression en question sera donc $13596 \times 0,76$, soit 10333^{kg} par mètre carré. C'est le nombre qui, dans les formules de Mécanique, exprime la pression atmosphérique moyenne. Le résultat serait le même pour la pression de $10^m,333$ d'eau, le poids du mètre cube étant, dans ce cas, de 1000^{kg}.

Étudions enfin le cas d'un gaz pesant à température constante. On sait que le poids du mètre cube d'air à 0°, sous la pression atmosphérique moyenne, est $1^{kg},293$; sous la pression p et à la température θ, il sera donc, en posant $\alpha = 0,00366$,

$$1,293 \frac{p}{10333} \frac{1}{1+\alpha\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{7991} \frac{p}{1+\alpha\theta}.$$

Pour un gaz quelconque le poids Π du mètre cube, sous la même pression p et à la même température θ, s'obtient en multipliant ce résultat par une constante spécifique δ appartenant au gaz considéré, et qui est sa densité relativement à l'air; par conséquent on a

$$\Pi = \frac{p\delta}{7991(1+\alpha\theta)}.$$

Alors l'équation (8) donne

$$\frac{dp}{p} = \frac{\delta}{7991(1+\alpha\theta)} dz,$$

ou, en intégrant entre deux points où les pressions seraient p et p_0 et qui auraient une différence de niveau z,

$$\text{L} \frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{7991(1+\alpha\theta)} z;$$

ou encore, si l'on emploie les logarithmes vulgaires au lieu des logarithmes népériens,

$$(10) \qquad \log \frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{18401(1+\alpha\theta)} z.$$

Il ne faut pas oublier que les distances z (exprimées en mètres) se comptent en descendant, et que p et p_0 désignent respectivement les pressions au point inférieur et au point supérieur.

262. *Mesures des hauteurs par le baromètre.* — La formule (10) qu'on vient d'établir peut servir à faire connaître la différence d'altitude de deux localités, à l'aide d'observations barométriques et thermométriques, moyennant toutefois quelques simplifications approximatives. D'abord la température de l'air varie avec l'altitude; mais, comme on ne connaît pas la loi de sa variation, on suppose qu'il y a partout une température $\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)$ égale à la moyenne arithmétique entre les températures θ et θ_0 observées aux deux stations extrêmes. Ensuite on fait $\alpha = 0{,}004$, valeur un peu trop grande; de cette manière on tient compte (dans une mesure d'ailleurs difficile à apprécier) de cette circonstance que la proportion de vapeur d'eau dans l'air croît avec la température, ce qui fait diminuer la densité dans une proportion un peu plus rapide que ne l'indique le facteur $\frac{1}{1+0{,}00366\theta}$. Enfin, puisqu'il s'agit de l'air, on doit faire $\delta = 1$. La formule (10), résolue par rapport à z, donne alors pour cette hauteur

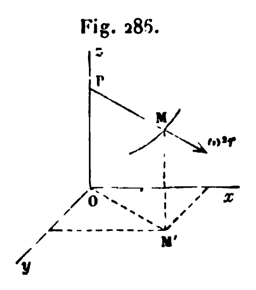
$$z = 18401[1+0{,}002(\theta+\theta_0)] \log \frac{p}{p_0}.$$

Les pressions p et p_0 (ou plutôt leur rapport) se déduisent des hauteurs lues sur le baromètre, en ayant égard : 1° à la dilatation cubique du mercure, qui fait varier avec la température le poids par mètre cube de ce liquide; 2° à la dilatation linéaire de la règle graduée sur laquelle se lisent les hauteurs. Nous croyons inutile d'entrer dans le détail des corrections à faire subir aux résultats immédiats des observations.

Le coefficient 18401 ci-dessus calculé concorde bien avec celui que Ramond avait déduit de diverses observations faites dans les Pyrénées vers 1790, et qui était égal à 18393. Ce nombre avait été choisi de manière à faire retrouver le plus exactement possible, par le calcul à l'aide de la formule, une hauteur mesurée directement. Il serait nécessaire de la modifier légèrement si l'on opérait à des latitudes très différentes des nôtres; car le poids d'un mètre cube d'air, à une température et sous une pression données, varie un peu avec la latitude; il diminue quand on se rapproche de l'équateur, où la diminution atteint 2,65 par 1000. Pour être entièrement rigoureux, il aurait fallu tenir compte aussi des variations du poids en fonction de l'altitude. Nous n'entrerons pas non plus dans le détail de ces deux dernières corrections.

263. *Équilibre relatif d'un fluide.* — Quand un système matériel quelconque est en repos relativement à un système d'axes mobiles, on peut (n° 209) le considérer comme en repos absolu sous l'action : 1° des forces réelles agissant sur chaque point; 2° des forces apparentes, lesquelles se réduisent pour chaque point à sa force d'inertie d'entraînement. Le principe de d'Alembert (n° 193) conduirait d'ailleurs au même résultat, parce que, dans le cas du repos relatif, le mouvement d'entraînement et le mouvement absolu sont identiques. Maintenant, si le système matériel considéré est un fluide, les forces apparentes devront être, comme les autres, rapportées à l'unité de masse; on joindra donc aux composantes X, Y, Z, qui figurent dans les équations d'équilibre des fluides (n° 259), celles de l'accélération d'entraînement prises en sens contraire.

Fig. 286.



Prenons pour premier exemple celui d'un liquide pesant et homogène, en repos relatif dans un vase qui tourne uniformément autour d'un axe vertical Oz (*fig.* 286), avec une vitesse angulaire ω. Les forces réelles directement appliquées se réduisant aux actions de la pesanteur, on doit, si l'on

prend pour axes coordonnés Oz et deux lignes horizontales rectangulaires Ox, Oy, faire d'abord

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Ensuite la force d'inertie d'entraînement rapportée à l'unité de masse, pour un point M décrivant un cercle de rayon $\overline{MP} = r$ autour de Oz, sera $\omega^2 r$ dirigée suivant le prolongement de PM; elle aura pour composantes

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0.$$

Donc l'équation (3) du n° 259, appliquée en tenant compte des forces apparentes, donnera, dans le cas présent,

$$dp = \rho(\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz).$$

On voit que l'équilibre est possible, car le second membre est la différentielle exacte de $\frac{1}{2}\rho[\omega^2(x^2+y^2) - 2gz]$; s'il se réalise effectivement, les surfaces de niveau ou d'égale pression (n° 260) seront représentées par l'équation générale

$$(11) \qquad \omega^2(x^2+y^2) - 2gz = \text{const.}$$

Ce sont des paraboloïdes de révolution engendrés par une parabole de paramètre $\frac{g}{\omega^2}$ tournant autour de Oz; toutes les surfaces s'obtiendraient au moyen de la même parabole, dont le sommet se déplacerait le long de Oz. Si la surface libre est en contact avec une atmosphère gazeuse à pression constante, elle sera nécessairement l'un de ces paraboloïdes; mais on ne peut fixer sa position sans tenir compte de quelque autre donnée particulière du problème. On peut, par exemple, donner le volume total du liquide primitivement introduit dans le vase; la surface libre se détermine alors de manière que ce volume soit égal à celui qui se trouve compris entre elle et les parois du vase.

Afin de pousser la solution jusqu'au bout, supposons le cas particulier d'un vase en forme de cylindre circulaire de rayon R, dont l'axe de figure coïncide avec l'axe de rotation Oz; le liquide s'élèverait à la hauteur h si le vase restait im-

mobile, et son volume est, par conséquent, $\pi R^2 h$. Prenons pour plan des xy le fond du vase et concevons encore un système de coordonnées polaires dans ce plan, la position d'un point M′ du plan étant définie par son rayon vecteur $\overline{OM'} = r$ et l'angle polaire $M'Ox = \alpha$. Le volume du liquide en équilibre relatif, quand les axes tourneront, s'exprimera par l'intégrale double $\int\int z r\, d\alpha\, dr$, dans laquelle on devra mettre pour z l'ordonnée de la surface libre, soit

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) - C = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - C,$$

en nommant $2gC$ la valeur particulière que prend la constante de l'équation (11), quand il s'agit de la surface libre. On aura donc

$$\pi R^2 h = \int\int \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - C\right) r\, dr\, d\alpha.$$

Les limites de l'intégration sont de 0 à 2π pour α et de 0 à R pour r; on l'effectue sans difficulté, et l'on trouve, après suppression du facteur πR^2,

$$h = \frac{\omega^2 R^2}{4g} - C;$$

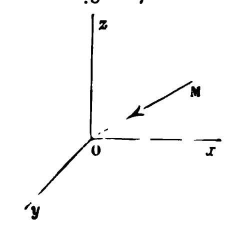
d'où résulte l'équation de la surface libre

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2}R^2\right) + h.$$

L'intersection de ce paraboloïde avec le plan du niveau primitif $z = h$ serait un cercle de rayon $R\sqrt{\frac{1}{2}}$; sa cote sur l'axe serait $h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$ et sur les bords $h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$.

Comme second exemple d'équilibre relatif, supposons le cas d'un liquide homogène animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe Oz et dont tous les points seraient attirés par un centre fixe O situé sur l'axe, proportionnellement à leur masse et à la distance $r = \overline{OM}$ entre chaque

point M et le centre d'attraction. Si l'on nomme g l'attraction par unité de masse quand la distance est R, elle sera $\frac{gr}{R}$ pour le point M et aura pour composantes suivant trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 287),


Fig. 287.

$$X = -\frac{gx}{R}, \quad Y = -\frac{gy}{R}, \quad Z = -\frac{gz}{R};$$

d'ailleurs, en nommant encore ω la vitesse angulaire autour de Oz, les composantes de l'accélération d'entraînement changée de sens seront, comme dans le premier exemple,

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad o.$$

Donc l'équation (3) du n° 239 donne ici, quand on suppose l'existence de l'équilibre relatif par rapport aux axes coordonnés,

$$dp = \rho\left[\left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)(x\,dx + y\,dy) - \frac{g}{R}z\,dz\right],$$

ce qui montre la possibilité de cet équilibre, puisque, ρ étant constant par hypothèse, le second membre de l'équation précédente est la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z. Les surfaces de niveau ont pour équation générale

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)(x^2 + y^2) - \frac{g}{R}z^2 = \text{const.}$$

ou, sous une autre forme,

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{\omega^2 R}{g}(x^2 + y^2) = A,$$

A désignant une constante arbitraire. On voit que ces surfaces seraient des sphères concentriques, si ω s'annulait; si ω varie entre o et $\sqrt{\frac{g}{R}}$, on obtiendra des ellipsoïdes de révolution autour de Oz; au delà de cette limite de ω, les ellipsoïdes se

changeront en hyperboloïdes. En restant dans l'hypothèse de $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$, les demi-axes de l'ellipsoïde seraient :

Dans le plan de l'équateur. $a = b = \sqrt{\dfrac{A}{1 - \dfrac{\omega^2 R}{g}}}$,

Suivant Oz. . . . . $c = \sqrt{A}$.

Les ellipsoïdes sont donc aplatis; tous ont un même aplatissement proportionnel, égal à $\dfrac{a-c}{a} = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{\omega^2 R}{g}}$, ce qui, dans l'hypothèse d'une petite valeur de $\dfrac{\omega^2 R}{g}$, diffère peu de $\dfrac{\omega^2 R}{2g}$.

On peut essayer d'appliquer ce calcul à la Terre, en la considérant à l'époque où elle était encore fluide. Avant sa solidification, elle a dû prendre la figure d'équilibre relatif correspondant à son mouvement, que nous connaissons, et aux forces réelles directement appliquées à tous ses points. Quand on veut déterminer cette figure, il faut avoir égard pour chaque point M de la Terre : 1° à sa force d'inertie dans le mouvement de notre planète; 2° aux attractions qu'il éprouve de la part de tous les corps célestes; 3° à l'attraction qu'il reçoit de l'ensemble des autres points de la Terre. Mais nous avons vu, dans le cours de première année (n° **114**), quand il s'est agi de définir le poids d'un corps, que les deux premiers groupes donnent une résultante très approximativement égale à la force centrifuge dans le mouvement de rotation de la Terre autour de la ligne des pôles; il est vrai que nous avions plus particulièrement en vue les points pris à la surface de la Terre, mais les mêmes explications conviendraient aussi bien aux points intérieurs. A cette force centrifuge on doit seulement joindre, à titre de force réelle directement appliquée, l'attraction exercée par la Terre sur le point considéré. Si, pour se rendre compte de cette attraction, on suppose la Terre sensiblement sphérique et de plus homogène, on reconnaît que l'attraction varie d'un point à l'autre proportionnellement à la masse et à

la distance au centre de la Terre ([1]). Moyennant les hypothèses simplificatives de la sphéricité et de l'homogénéité de la Terre, nous rencontrons donc ici des conditions conformes à celles de la question précédente; cela permet de contrôler l'exactitude de ces hypothèses, en comparant l'aplatissement calculé $\frac{\omega^2 R}{2g}$ avec l'aplatissement véritable.

La vitesse angulaire de la Terre est $\omega = \frac{2\pi}{86164}$; la force d'attraction est environ 9,82 par unité de masse, pour les points de la surface, à une distance du centre égale au rayon terrestre $R = 6\,371\,000^m$. En calculant, d'après ces nombres, la valeur de $\frac{\omega^2 R}{2g}$, on trouve 0,001725, soit environ $\frac{1}{580}$ comme valeur de l'aplatissement relatif. Le nombre véritable diffère peu de $\frac{1}{300}$. La vérification que nous avons tentée ne réussit donc pas, ce qui n'a rien de surprenant, puisque nous avons admis tout à l'heure des hypothèses douteuses. Supposer la sphéricité du globe terrestre, c'est d'abord négliger, dans l'équation de la figure d'équilibre, des termes de même ordre que l'aplatissement à calculer au moyen de cette équation; ensuite on ne peut pas admettre que la Terre fût homogène quand elle était liquide, car les liquides ont toujours une certaine compressibilité, et, si petite qu'elle ait pu être dans le cas actuel, il a dû en résulter une différence notable de densité, en raison de l'énorme accroissement de pression quand on passe de la surface de la Terre aux points voisins du centre.

([1]) Conformément à la loi newtonienne de l'attraction universelle, on admet que deux molécules de masses m, m', placées à la distance r, s'attirent mutuellement avec une force $\frac{fmm'}{r^2}$, le coefficient f étant constant. Par des calculs qui n'entrent pas dans notre programme, on prouve ensuite : 1° qu'une couche sphérique homogène produit une action nulle sur un point intérieur; 2° qu'on ne change pas son action sur un point extérieur en la remplaçant par un point de même masse et situé au centre de la sphère. Cela posé, si nous prenons dans la Terre un point M à la distance r du centre, il éprouve une action nulle de la part des couches extérieures; les couches intérieures l'attirent proportionnellement à sa masse m, proportionnellement à la leur (c'est-à-dire à r^3) et en raison inverse de r^2, ce qui, en résumé, fait bien une attraction proportionnelle à mr.

§ II. — Composition des pressions sur les éléments d'une surface finie en contact avec un fluide en équilibre.

264. *Pression résultante exercée sur une aire plane par un fluide pesant et homogène.* — Nous commençons par ce cas particulier très simple, parce qu'il est souvent utile dans les applications pratiques; d'ailleurs, il donne lieu à quelques remarques assez intéressantes.

La pression p dans un fluide pesant et homogène, à la profondeur v au-dessous du plan horizontal ou la pression p_0, a pour valeur (n° 261)

$$p = p_0 + \Pi v;$$

si l'on compte les profondeurs u à partir d'un autre plan horizontal situé au-dessus du précédent, à la distance $\frac{p_0}{\Pi}$, hauteur représentative de p_0, on aura

$$u = v + \frac{p_0}{\Pi}$$

et, par suite,

$$p = \Pi u. \qquad (1)$$

Il s'agit maintenant de trouver la résultante des pressions élémentaires sur une aire plane finie, la pression rapportée à l'unité de surface ayant en chaque point la valeur donnée par l'équation (1).

Un élément superficiel ω supporte la pression $p\omega = \Pi u\omega$; toutes ces forces étant parallèles, comme normales à un même plan, leur résultante R est égale à leur somme. Donc, puisque Π ne varie pas,

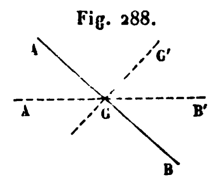
$$R = \Pi \Sigma u\omega = \Pi \Omega u_1,$$

en nommant Ω la surface totale et u_1 l'ordonnée u de son centre de gravité (n° 150). L'intensité de la résultante est la même que si la surface devenait horizontale en tournant autour de son centre de gravité, qui resterait fixe; la pression moyenne $\frac{R}{\Omega}$ par unité superficielle est égale à Πu_1, c'est-à-dire

à la pression du liquide, prise au point en contact avec le centre de gravité de la surface.

Il reste à trouver sur la surface le point où elle est coupée par la résultante R, point qu'on nomme le *centre de pression* et qui n'est autre que le centre des forces parallèles ayant R pour résultante (nº 149). On peut d'abord démontrer que ce point a une ordonnée u_2 supérieure à u_1, ou qu'il se trouve au-dessous du centre de gravité. Soit, en effet, AB (*fig.* 288) la surface plane considérée; rabattons-la sur le plan horizontal de son centre de gravité G, en la faisant tourner autour de l'intersection GG′ des deux plans, de manière à lui faire prendre la position A′B′. Après le rabattement, la pression sur chaque élément ω est devenue $\Pi u_1 \omega$, et la résultante de ces pressions passe au point G; les deux sommes de moments, relativement à GG′, des pressions élémentaires sur la partie AG et sur la partie GB, sont donc égales en valeur absolue, car leur somme algébrique est nulle. Lorsqu'on remet la surface dans sa véritable position AB, toutes les pressions augmentent sur la partie GB et diminuent sur la partie AG; d'ailleurs, les bras de levier ne varient pas. Donc, dans la position AB, le moment total a même sens que le moment pour la partie GB seule; et, comme ce moment total est égal à celui de la résultante R, il s'ensuit que le point d'application de celle-ci se trouve dans la partie GB, c'est-à-dire au-dessous de G.

Fig. 288.



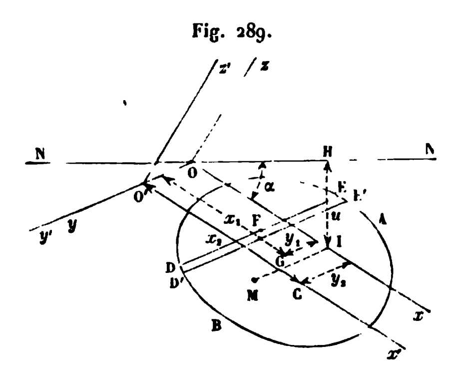
Pour arriver à fixer d'une manière plus précise la position du centre de pression, imaginons un plan vertical perpendiculaire aux horizontales du plan pressé AB (*fig.* 289) et qui le coupe suivant une ligne de plus grande pente Ox; soit ON l'intersection de ce même plan vertical avec le plan horizontal à partir duquel on compte les profondeurs u. L'angle $NOx = \alpha$ sera l'inclinaison de la surface AB sur l'horizon. Prenons encore un système d'axes coordonnés rectangulaires composé de Ox, d'une horizontale Oy menée par le point O dans le plan AB, et d'une normale Oz à ce plan. Soient G et C le centre de gravité et le centre de pression de la surface AB; x_1, y_1, x_2, y_2 les coordonnées de ces points. La résultante R

étant supposée appliquée en C, on a immédiatement, par la considération des moments relativement à Oy et Ox,

$$Rx_2 = \Sigma px\omega, \quad Ry_2 = \Sigma py\omega,$$

équations dans lesquelles Σ indique une sommation à faire pour tous les éléments ω de AB. Or $p = \Pi u$, et l'ordonnée u d'un point M quelconque de AB a la valeur $x \sin\alpha$, qui appar-

Fig. 289.



tient au point I situé sur l'horizontale MI parallèle à Oy; donc $p = \Pi x \sin\alpha$ et $R = \Pi x_1 \sin\alpha \Sigma\omega$, ce qui permet de transformer les équations ci-dessus et d'écrire

$$x_1 x_2 \Sigma\omega = \Sigma x^2 \omega, \quad x_1 y_2 \Sigma\omega = \Sigma xy\omega.$$

Ces deux équations font connaître le point C en déterminant ses coordonnées x_2 et y_2.

Il est aisé de constater que le point C n'est autre que le centre de percussion (nos 226 et 227) de la surface AB, considérée comme un corps matériel dont chaque élément ω aurait une masse égale à son aire et qui serait assujetti à tourner autour de l'horizontale Oy, intersection du plan AB avec le plan horizontal ON. En effet : 1° le point C se trouve dans un plan passant par l'axe et le centre de gravité G; 2° sa distance x_2 à l'axe Oy est égale à la longueur $\dfrac{\Sigma\omega x^2}{x_1 \Sigma\omega}$ donnée par la formule (7) du n° 226; 3° si l'on transportait le plan des zx parallèlement à lui-même en $z'Ox'$, de manière à le faire passer

au centre de pression, y_2 devenant nul, $\Sigma xy\omega$ devrait l'être aussi pour les nouveaux axes; et, comme $\Sigma yz\omega$ est aussi nul, parce que $z = 0$ pour tous les points de la surface AB, il en résulte que Oy est axe principal d'inertie en O'. Toutes les conditions qui définissent un centre de percussion se trouvent donc remplies par le point C.

Imaginons encore qu'on élève en tous les points de la surface AB des ordonnées z égales à u ou à $x \sin\alpha$; l'ensemble de ces ordonnées dessinera un volume en forme de cylindre tronqué, ayant AB pour section droite et pour autre base une portion du plan représenté par l'équation $z = x\sin\alpha$. Les coordonnées x_3, y_3 du centre de gravité de ce volume auraient pour valeurs

$$x_3 = \frac{\Sigma\omega x^2 \sin\alpha}{\Sigma\omega x \sin\alpha}, \quad y_3 = \frac{\Sigma\omega xy \sin\alpha}{\Sigma\omega x \sin\alpha}$$

ou bien, attendu qu'on peut supprimer le facteur constant $\sin\alpha$ et remplacer $\Sigma\omega x$ par $x_1\Sigma\omega$,

$$x_3 = \frac{\Sigma x^2\omega}{x_1\Sigma\omega} = x_2, \quad y_3 = \frac{\Sigma xy\omega}{x_1\Sigma\omega} = y_2.$$

Le centre de pression coïncide donc, en projection sur le plan AB, avec le centre de gravité du cylindre ci-dessus défini. Le résultat serait identique en substituant aux ordonnées $u = x\sin\alpha$ d'autres ordonnées terminées à un plan quelconque mené par Oy et qui seraient dans un rapport constant avec les premières.

Voici enfin une remarque au moyen de laquelle on connaît souvent *a priori* une droite sur laquelle se trouve le centre de pression. Sur tous les points d'une bande infiniment étroite comprise entre deux parallèles DE, D'E' à l'horizontale Oy, la pression par unité de surface est la même, de sorte que la résultante des pressions élémentaires de cette bande est appliquée au milieu F de DE. Si le lieu des points F, quand DE varie, est une ligne droite, il est clair que la composition de toutes ces résultantes partielles donnera une résultante finale appliquée en un point de cette droite. Donc, s'il existe, dans la surface pressée, un diamètre conjugué de ses cordes horizontales, le centre de pression se trouvera sur ce diamètre.

265. *Exemples de la recherche des centres de pression.* — Avant de donner ces exemples, nous commencerons par une observation générale. Dans les applications pratiques, le liquide qui exerce la pression résultante demandée est presque toujours de l'eau, qui supporte elle-même, sur sa surface libre, la pression atmosphérique p_a. En comptant les ordonnées verticales v à partir de cette surface libre, la pression par unité superficielle en un point quelconque du liquide serait $p_a + \Pi v$, ce qui donnerait la force $(p_a + \Pi v)\omega$ sur un élément ω situé à la profondeur v et appartenant au plan pressé. On peut distinguer, dans cette force, les deux parties $p_a\omega$ et $\Pi v\omega$, et chercher ensuite séparément les résultantes : 1° du groupe des forces $p_a\omega$, 2° du groupe $\Pi v\omega$. La première serait immédiatement connue et aurait pour valeur $p_a\Sigma\omega$; son point d'application coïnciderait avec le centre de gravité de la surface. La seconde se déterminerait en grandeur et en position par la théorie du n° 264, et l'on pourrait ensuite composer ces deux résultantes partielles, parallèles l'une à l'autre, si l'on voulait avoir la résultante totale. Mais il arrive presque toujours que la résultante $p_a\Sigma\omega$ est équilibrée par une résultante égale et de sens contraire, provenant de l'action de la pression atmosphérique sur l'autre côté de la surface ; on se borne en conséquence à composer les forces élémentaires $\Pi v\omega$, ou, en d'autres termes, on détermine la pression totale, *abstraction faite de la pression atmosphérique.*

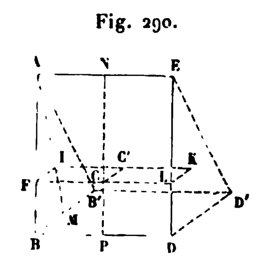
Nous supposerons donc, dans tous les exemples qui suivent, que les ordonnées verticales, désignées par u dans la formule (1) du n° 264, sont comptées à partir du plan de la surface libre, où la pression est censée nulle.

Premier exemple : *Rectangle ayant un côté situé dans le plan de la surface.* — Soit donné un rectangle ABDE (*fig.* 290), dont le plan sera pris pour plan de la figure; ce rectangle est soumis à la pression d'un fluide pesant et homogène en équilibre, à celle d'une masse d'eau stagnante, par exemple; le côté AE affleure le plan horizontal supérieur qui limite le liquide et où la pression est censée nulle.

Pour avoir le centre de pression C, nous allons construire, suivant une méthode indiquée tout à l'heure (n° 264), un volume dont nous projetterons ensuite le centre de gravité sur

le plan ABDE. Élevons en B et D les perpendiculaires BB′, DD′ à ce plan, et coupons-les par le plan AEB′D′ mené suivant AE; nous aurons ainsi limité ce volume ABB′EDD′, qui ne sera autre chose, dans le cas actuel, qu'un prisme triangulaire droit. On aura son centre de gravité G, en prenant le milieu de la ligne IK joignant les centres de gravité des bases (n° 152, *g*); le centre de gravité de ABB′ s'obtiendrait d'ailleurs (n° 152, *d*) en joignant le sommet A au milieu M de la base opposée BB′ et prenant $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AM}$; la ligne IK devrait être ensuite menée par I parallèlement aux arêtes du prisme. La projection FL de cette ligne sur le plan ABDE se fera en menant par I et K des parallèles IF et KL à BB′; cette projection sera parallèle à IK ou à AE, et l'on aura, pour fixer sa position dans le rectangle donné (n° 152, *d*),

Fig. 290.

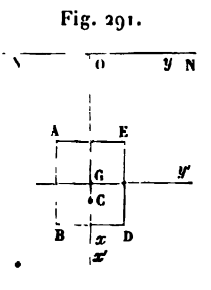


$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3}.$$

En outre, le point G, milieu de $\overline{IK}$, se projettera au milieu C de $\overline{FL}$; donc on peut dire, en résumé, que le centre de pression se trouve sur la médiane inclinée NP et aux $\frac{2}{3}$ de cette ligne à partir du niveau libre.

Deuxième exemple : *Rectangle ayant deux côtés horizontaux, avec une certaine hauteur de liquide au-dessus du côté supérieur.* — Les données du premier exemple sont modifiées seulement en ce que le niveau de la surface libre ne coïncide plus avec AE, mais se trouve placé au-dessus. Soit encore ABDE (*fig.* 291) le rectangle vu dans son propre plan; la droite NN, parallèle à AE et à BD, est l'intersection de ce plan avec celui de la surface libre. Prenons deux axes coordonnés Ox, Oy, le pre-

Fig. 291.



mier passant par les milieux de $\overline{AE}$ et de $\overline{BD}$, le second se confondant avec NN; soient l et h les deux dimensions $\overline{AE}$, $\overline{AB}$ du rectangle, x_1 l'abscisse de son centre de gravité ou de figure G. Le centre de pression C se trouve sur Ox (n° 264), à une distance x_2 du point O donnée par la formule

$$x_2 = \frac{\Sigma x^2 \omega}{x_1 \Sigma \omega} = \frac{\Sigma x^2 \omega}{x_1 lh}.$$

Or, en menant par le centre G un axe Gy' parallèle à Oy, on a (n° 217)

$$\Sigma x^2 \omega = \Sigma x'^2 \omega + x_1^2 \Sigma \omega;$$

d'autre part,

$$\Sigma x'^2 \omega = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} l x'^2 \, dx' = \frac{1}{12} lh^3.$$

Donc enfin

$$x_2 = x_1 + \frac{h^2}{12 x_1},$$

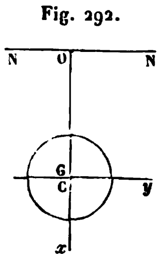
ce qui achève de déterminer C. On voit que le produit des distances $\overline{OG} = x_1$ et $\overline{GC} = x_2 - x_1 = \frac{h^2}{12 x_1}$ est constant et égal à $\frac{h^2}{12}$; les lignes $\overline{OG}$ et $\overline{GC}$ varient en raison inverse l'une de l'autre; la seconde, d'abord égale à $\frac{h}{6}$ quand NN se confond avec AE, tend vers o quand le niveau s'élève de plus en plus.

Le rectangle peut être assimilé à un parallélépipède dont la troisième dimension serait nulle. Les formules du n° 221 (1°) donneraient alors immédiatement le carré $\frac{h^2}{12}$ de son rayon de gyration par rapport à Gy' et le moment d'inertie correspondant $lh \times \frac{h^2}{12}$, soit $\frac{1}{12} lh^3$.

Troisième exemple : *Cercle placé à une profondeur quelconque.* — La *fig.* 292 représente le cercle dans son plan; G est son centre, C son centre de pression, NN l'intersection de son plan avec celui de la surface libre. Prenons deux axes de coordonnées Gx, Gy, le premier suivant la ligne de plus

grande pente, le second suivant l'horizontale du point G. Le centre de pression se trouve encore sur le diamètre Gx perpendiculaire à NN, qui coupe en deux parties égales les cordes horizontales du cercle. Il coïncide avec le centre de percussion du cercle relativement à l'axe NN; sa distance au diamètre horizontal Gy sera (n° 226)

Fig. 292.



$$\overline{GC} = \frac{\Sigma x^2 \omega}{\overline{OG}.\Sigma\omega}.$$

Or on a, en vertu de l'identité de position d'un cercle relativement à tous ses diamètres,

$$\Sigma x^2 \omega = \Sigma y^2 \omega = \frac{1}{2}\Sigma(x^2 + y^2)\omega;$$

pour tous les éléments ω compris entre deux cercles décrits du centre G avec les rayons r et $r + dr$, la somme des produits $(x^2 + y^2)\omega$ se réduit à $2\pi r^3 dr$. Donc, pour le cercle entier, on aura, si l'on nomme R son rayon,

$$\frac{1}{2}\Sigma(x^2 + y^2)\omega = \Sigma x^2 \omega = \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4}\pi R^4;$$

par suite

$$\overline{GC} = \frac{\pi R^4}{4\overline{OG}\pi R^2} = \frac{R^2}{4\overline{OG}}.$$

Dans le cas actuel, le produit $\overline{OG}.\overline{GC}$ est encore constant; sa valeur est $\frac{R^2}{4}$.

266. *Composition des pressions sur une surface courbe.* — Une surface courbe, dont la forme est connue et définie par son équation, supporte en chacun de ses points la pression d'un fluide en équilibre; l'intensité de la pression p rapportée à l'unité de surface est supposée connue en fonction des coordonnées x, y, z du point où elle s'exerce. Chaque élément $d\sigma$ de la surface se trouve donc soumis à une pression $p\,d\sigma$, agissant suivant la direction connue de la normale à $d\sigma$

et faisant des angles λ, μ, ν avec les axes coordonnés. Il s'agit d'effectuer la réduction de toutes ces forces élémentaires $p\,d\sigma$; pour parler avec plus de précision, il s'agit de calculer les sommes algébriques de leurs projections sur les trois axes coordonnés et de leurs moments relativement aux mêmes axes, car ces sommes définissent suffisamment le système des forces $p\,d\sigma$, si la surface qui subit leur action fait partie d'un solide dont on aurait à étudier l'équilibre ou le mouvement (nos 137 et 237). Or on reconnaît sans difficulté que ces sommes ont pour expressions les intégrales

$$\int p\,d\sigma\cos\lambda,\quad \int p\,d\sigma\cos\mu,\quad \int p\,d\sigma\cos\nu,$$

$$\int p(y\cos\nu - z\cos\mu)\,d\sigma,$$

$$\int p(z\cos\lambda - x\cos\nu)\,d\sigma,$$

$$\int p(x\cos\mu - y\cos\lambda)\,d\sigma,$$

qui toutes devraient s'étendre à la surface entière. La question se réduit, comme on le voit, à un pur exercice de calcul intégral.

Au lieu de suivre cette marche analytique générale, on peut souvent recourir à des théorèmes particuliers que nous allons établir, et qui suffisent dans bien des cas pour arriver au but :

1° Supposons qu'il s'agisse de projeter la pression élémentaire $p\,d\sigma$ sur un axe quelconque Ox, faisant l'angle α avec la direction de cette force, c'est-à-dire avec la normale à l'élément superficiel $d\sigma$. Cette projection aura pour valeur $p\,d\sigma\cos\alpha$, ce qu'on peut regarder comme le produit de p par $d\sigma\cos\alpha$. Or $d\sigma\cos\alpha$ n'est autre chose que la projection de $d\sigma$ sur un plan perpendiculaire à Ox. Donc on peut énoncer la proposition suivante :

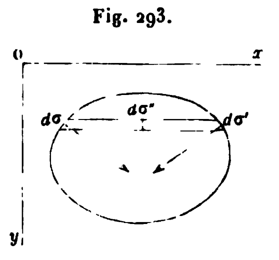
Pour projeter sur un axe la pression supportée par un élément superficiel, il suffit de prendre la pression que supporterait la projection de cet élément sur un plan perpendiculaire

à l'axe; la pression par unité de surface étant censée rester la même.

2° On déduit d'abord de là que, *si une surface est plongée dans un fluide pesant en repos, toute tranche comprise entre deux plans horizontaux infiniment voisins supportera des pressions dont les composantes horizontales se feront équilibre, pourvu que les sections horizontales de la tranche soient des courbes fermées.*

En effet, divisons la tranche en prismes tronqués élémentaires par une série de plans parallèles à une même horizontale Ox (*fig.* 293), se succédant à des distances infiniment petites les uns des autres; la pression p par unité de surface ayant la même valeur sur tout le contour de la tranche (n° **261**), les pressions $p\,d\sigma$, $p\,d\sigma'$ supportées par les deux bases de l'un de ces prismes auront chacune une composante suivant Ox égale au produit de p par la section droite $d\sigma''$ du prisme, et, comme ces composantes sont directement opposées, elles se détruisent. Ainsi donc, en imaginant les pressions sur tout le contour de la tranche décomposées suivant trois directions rectangulaires, parmi lesquelles il y aurait celle de l'axe Ox, toutes les composantes parallèles à cet axe se détruisent deux à deux. Le même raisonnement prouve la disparition des composantes parallèles à un second axe horizontal Oy, ce qui achève de justifier l'énoncé de la proposition, puisqu'on n'a plus à considérer, pour l'ensemble de la tranche, que les composantes verticales des pressions exercées sur tout son contour.

Fig. 293.



Les composantes horizontales des pressions sur une tranche horizontale d'épaisseur infiniment petite se faisant équilibre, il en sera évidemment de même pour une tranche d'épaisseur finie, qu'on pourrait toujours regarder comme formée par la réunion de tranches infiniment minces. Le même résultat s'applique également, en vertu de la même raison, à une surface fermée quelconque.

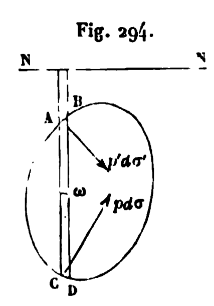
3° *Quand une surface fermée se trouve soumise en tous ses points à une pression constante par unité superficielle, toutes les pressions élémentaires se réduisent à une résultante nulle et se font équilibre.*

Au moyen du raisonnement ci-dessus donné (2°), à l'occasion d'une tranche horizontale, on prouverait en effet que les composantes des pressions élémentaires parallèlement à un axe quelconque se détruisent deux à deux; on peut donc supprimer, pour chacune de ces pressions, ses composantes parallèles à trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz, et par suite leur système est équivalent à un autre qui ne serait composé que de forces nulles.

4° Principe d'Archimède : *Une surface fermée, plongée dans un fluide pesant en équilibre, supporte une pression résultante égale et directement opposée au poids du fluide déplacé.*

D'abord nous savons (2°) que les composantes horizontales des pressions élémentaires se détruisent deux à deux. Afin de trouver la résultante des composantes verticales, qui subsistent seules, décomposons le volume total renfermé dans la surface en prismes verticaux tronqués, tels que ABCD (*fig.* 294), ayant des sections droites infiniment petites. Nommons

Fig. 294.



$d\sigma$, $d\sigma'$ les éléments superficiels CD, AB découpés sur la surface par le prisme ABCD;

z, z' les cotes de hauteur de ces éléments, au-dessous d'un plan horizontal NN pris dans le fluide et où la pression est p_0;

p, p' les pressions par unité de surface en CD et AB;

ω la section droite du prisme ABCD;

Π le poids de l'unité de volume du fluide.

Les pressions élémentaires $p\,d\sigma$, $p'\,d\sigma'$ sur CD et AB ont des composantes verticales de sens contraires $p\omega$, $p'\omega$ (1°), dont la résultante partielle, évaluée dans le sens ascendant, est $(p-p')\omega$. Or on a, en admettant d'abord que le fluide

soit un liquide pesant et homogène (n° 261),

$$p = p_0 + \Pi z, \quad p' = p_0 + \Pi z', \quad p - p' = \Pi(z - z') = \Pi \overline{AC};$$

donc la résultante des pressions $p\omega$ et $p'\omega$ est égale à $\Pi\omega\overline{AC}$, c'est-à-dire au poids du prisme ABCD supposé rempli de fluide, et cette résultante agit dans le sens ascendant, directement opposé à celui de la pesanteur. En réunissant tous les prismes analogues à ABCD, on voit que la résultante totale des pressions sur la surface sera celle des poids $\Pi\omega\overline{AC}$ changée de sens; elle est donc bien égale et contraire au poids du fluide qui occuperait le volume total renfermé dans la surface, et passe par le centre de gravité de ce fluide.

Si le fluide n'est pas homogène, en nommant y la cote verticale d'un quelconque de ses points au-dessous de NN, on aura (n° 261)

$$p - p' = \int_{z'}^{z} \Pi\, dy \quad \text{et} \quad (p - p')\omega = \int_{z'}^{z} \Pi\,\omega\, dy.$$

Or $\Pi\omega\, dy$ exprime le poids d'un prisme fluide ayant une section droite ω, une hauteur dy et un poids par unité de volume Π égal à celui du fluide pris à la cote y; l'intégrale

$\int_{z'}^{z} \Pi\,\omega\, dy$ exprime donc le poids qu'aurait le prisme ABCD,

si le fluide occupait son volume. La résultante totale sera donc encore égale et contraire au poids du fluide déplacé et passera par son centre de gravité.

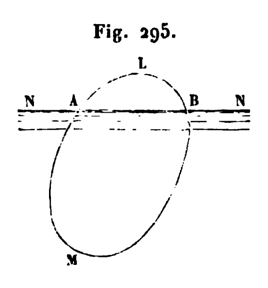
Ce point d'application se nomme habituellement le *centre de poussée*.

La *fig.* 294 et les calculs précédents ont été faits en admettant que la verticale AC n'a qu'un seul point d'entrée dans la surface et un seul point de sortie. On n'aurait pas plus de difficulté à traiter le cas général où le nombre des entrées et celui des sorties, toujours égaux entre eux, prendraient une valeur entière quelconque. La même observation s'applique à la démonstration des deux théorèmes précédents (2° et 3°).

Il pourrait se faire qu'on eût un corps flottant dans un liquide pesant en équilibre, de telle manière que sa portion inférieure AMB (*fig.* 295) fût seule plongée dans le liquide,

pendant que la partie supérieure ALB serait plongée dans une atmosphère gazeuse. Soit p_0 la pression commune au gaz et au liquide dans leur plan horizontal de séparation NN. On ne changera rien à la résultante des pressions sur toute la surface du corps, si l'on imagine que la pression p_0 par unité superficielle s'exerce sur la coupe horizontale du corps par le plan NN, à la fois sur la partie ALB dans le sens ascendant et sur la partie AMB dans le sens descendant, car on aura ainsi introduit deux pressions égales et contraires, qui se détruiront. Or, après cette modification, chacune des deux parties peut être considérée comme entièrement plongée dans un fluide pesant, et la résultante des pressions se composera : 1° du poids du liquide qui remplirait le volume AMB, si le corps était enlevé; 2° du poids de gaz déplacé de même par ALB, ces deux poids devant toujours se prendre en sens contraires. Ordinairement on néglige le second, et l'on considère la résultante comme simplement égale et contraire au poids du liquide déplacé par la partie plongée du corps.

Fig. 295.



Si le corps ALBM présentait un vide intérieur communiquant librement avec l'atmosphère gazeuse qu'on a supposée au-dessus de NN, on pourrait d'abord considérer le tout formé par le solide proprement dit et par le gaz qu'il renferme; la méthode précédente ferait alors connaître la pression résultante R sur le contour extérieur de ce système. Ensuite on remarquerait que le gaz intérieur reçoit sur sa surface terminale un ensemble de pressions donnant une résultante égale et contraire à son poids P, car sans cela ce gaz ne pourrait être en équilibre; donc sa réaction sur la même surface sera une force égale à P et de même sens. Donc enfin ce poids P, pris dans son véritable sens, devrait être composé avec R, pour avoir la pression totale subie par le solide proprement dit, de la part des fluides en contact; mais le plus souvent on ne tient pas compte de P dans les applications, cette force étant négligeable comparativement au poids du liquide déplacé par AMB.

Le principe d'Archimède se démontre *a priori* par un raisonnement bien simple, sans passer par l'analyse détaillée des pressions élémentaires aux divers points de la surface. Considérons un fluide pesant en équilibre, et dans ce fluide isolons par la pensée une portion continue quelconque, comprise à l'intérieur d'une surface fermée. Puisque cette portion est en équilibre, aussi bien que le tout, il est nécessaire que son poids soit égal et directement opposé à la résultante des pressions exercées par le fluide environnant, sur toute sa surface limitative. Maintenant, qu'on remplace cette portion par un solide en équilibre ayant exactement la même figure et les mêmes dimensions; il supportera la même pression résultante, car sa surface limitative est composée des mêmes éléments soumis aux mêmes pressions par unité superficielle, de sorte que les systèmes de forces à réduire sont identiques dans les deux cas. La résultante des pressions sera donc, dans l'un comme dans l'autre, égale et directement opposée au poids du fluide déplacé.

§ III. — Équilibre et stabilité des corps plongés ou flottants.

267. *Conditions d'équilibre d'un corps plongé ou flottant.* — On suppose un corps solide entièrement immergé ou seulement flottant dans un fluide soumis, comme lui, à l'action de la pesanteur, sans autre force directement appliquée; le fluide et le corps solide étant de plus supposés en équilibre, la résultante des pressions exercées par le premier sur la surface du second sera égale au poids du fluide déplacé (n° 266); et cette résultante devra équilibrer le poids du solide. Donc il sera nécessaire et suffisant, pour l'équilibre de celui-ci : 1° que son poids soit égal à celui du fluide déplacé par lui; 2° que les verticales de ces deux poids coïncident ou, ce qui revient au même, que le centre de poussée soit sur la verticale passant par le centre de gravité du solide.

268. *Observations générales au sujet des conditions de stabilité.* — Si l'on voulait s'en tenir à la définition de la stabilité donnée au n° 207, il faudrait supposer que le corps solide,

plongé ou flottant, dont on s'occupe ici, est écarté infiniment peu de sa position d'équilibre; qu'il reçoit, dans sa nouvelle position, des vitesses infiniment petites; et alors il faudrait déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le corps, pendant le mouvement pris par lui après ce dérangement, restât toujours infiniment rapproché de sa position première. Mais on rencontrerait tout d'abord une difficulté : on sait bien déterminer la pression réciproque du fluide et du solide à l'état de repos, tandis qu'il faudrait ici la connaître dans l'état de mouvement. Comme cela n'est pas possible d'une manière satisfaisante, en raison des lacunes actuelles de la Science, on admet que la pression résultante peut se calculer comme si l'équilibre existait. En négligeant ainsi les pressions supplémentaires dues au fait de la vitesse, l'expérience tend à prouver qu'on supprime des forces opposées au mouvement du solide et par conséquent favorables à la stabilité. Si cela était parfaitement établi, on pourrait en conclure que les conditions de stabilité déduites de cette hypothèse simplificative sont *a fortiori* suffisantes, mais ne sont pas absolument nécessaires.

En second lieu, s'il s'agit en particulier d'un solide et d'un fluide ne supportant, comme forces directement appliquées, que les actions de la pesanteur, nous ne pouvons maintenir sans changement la définition du n° 207, que nous venons de rappeler. Il y a certains déplacements du solide qui ne modifient en rien les forces auxquelles il est soumis; c'est ce qui arrive pour un déplacement horizontal, par exemple. Si, après avoir effectué un déplacement de ce genre, on donnait au solide une vitesse de translation également horizontale, il est clair qu'il continuerait à se mouvoir uniformément et en ligne droite, comme s'il n'était soumis à aucune force, puisque son poids et les pressions du fluide s'équilibreraient toujours. Il s'écarterait donc indéfiniment de sa position initiale, et, à ce point de vue, l'équilibre ne serait jamais stable. On remarquera toutefois que l'équilibre persisterait, même en donnant d'abord au solide un déplacement horizontal fini, pourvu qu'on ne lui imprimât simultanément aucune vitesse; on peut dire alors que l'équilibre est *indifférent*, à l'égard des déplacements horizontaux et en général à l'égard de ceux qui ne

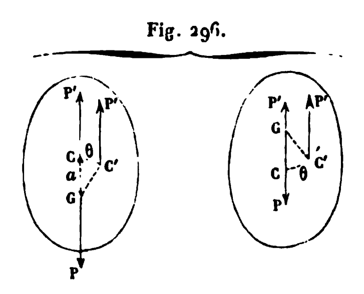
modifient pas les forces supportées par le corps. D'ailleurs, on obtient pratiquement la stabilité à l'égard de ces déplacements, au moyen d'attaches convenablement disposées, qui limitent les excursions possibles du corps, et l'on ne se préoccupe des conditions de stabilité que dans le cas de déplacements capables d'entraîner, soit une modification de la pression résultante, soit un changement de sa situation relativement au système liquide.

Sous la réserve de ces observations, nous allons maintenant appliquer la méthode du n° 207, d'abord à un solide pesant entièrement immergé dans un liquide pesant et homogène, puis à un solide pesant qui flotterait sur un liquide de même nature.

269. *Stabilité des corps entièrement plongés.* — Un déplacement quelconque, en vertu duquel un solide s'écarterait de sa position d'équilibre, peut toujours se décomposer en quatre autres déplacements, savoir : 1° translation horizontale; 2° translation verticale; 3° rotation autour d'un axe vertical passant par un point O choisi à volonté dans le corps; 4° rotation autour d'un axe horizontal issu du même point. On sait, en effet, que le déplacement le plus général s'obtient par une translation identique au déplacement de O, combinée avec une rotation autour d'un axe passant par ce point (n° 25); on peut ensuite décomposer chacun de ces mouvements en deux (nos 32 et 36), comme nous venons de le dire. Quand il s'agit d'un corps entièrement plongé dans un liquide pesant et homogène, les trois premiers déplacements n'auront aucune influence sur la grandeur de la pression résultante exercée par le liquide sur le corps, et de plus ils ne l'empêcheront pas d'être égale et directement opposée au poids, si les conditions d'équilibre étaient primitivement satisfaites; à l'égard de ces déplacements, il y aurait donc équilibre indifférent. Nous devons donc considérer exclusivement le quatrième. Soient G et C (*fig.* 296) les centres de gravité et de poussée, P le poids du solide appliqué en G, P' la pression résultante appliquée en C. Pour l'équilibre, il faut (n° 267) que la droite GC soit verticale et qu'on ait $P' = P$. Maintenant prenons le centre de gravité G pour le point que nous appelions O tout

à l'heure, et imaginons qu'on fasse décrire au solide un angle infiniment petit θ autour d'un axe horizontal mené par ce point; en nommant a la distance $\overline{GC}$, l'accroissement du potentiel dans ce déplacement, c'est-à-dire le travail total des

Fig. 296.



deux forces P ou P', sera $-\mathrm{P}a(1-\cos\theta)$ ou $\mathrm{P}a(1-\cos\theta)$, suivant que G sera situé au-dessous ou au-dessus de C; cette expression se réduit à $\mp \mathrm{P}a\frac{\theta^2}{2}$, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second. Lorsqu'il faut prendre le signe —, c'est-à-dire quand le centre de gravité est au-dessous du centre de poussée, on voit que le déplacement supposé a produit une diminution du potentiel; donc celui-ci était maximum dans la position d'équilibre, et, par suite, l'équilibre est stable (n° 207). Au contraire, le potentiel serait minimum, si le centre de poussée était au-dessous du centre de gravité, car l'accroissement $\mathrm{P}a\frac{\theta^2}{2}$ serait nécessairement positif; on voit qu'alors l'équilibre devient instable, parce que le couple (P, P') tend à faire tourner le corps de manière à augmenter l'angle θ.

Nous aurions pu nous dispenser de recourir à la théorie générale du n° 207 pour établir la stabilité dans le premier cas. Soient, en effet, θ_0 un écart initial donné à la ligne GC, à partir de la verticale, et $\Sigma m v_0^2$ la force vive due à la vitesse qu'on a imprimée simultanément aux divers points du corps. Ces quantités étant devenues θ et $\Sigma m v^2$ à une époque quelconque, on aura, par application du théorème des forces vives n° 205), tant que les écarts θ resteront très petits,

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m v_0^2 + \mathrm{P}a\theta_0^2 - \mathrm{P}a\theta^2.$$

Or soit θ_1 une valeur de θ aussi petite qu'on voudra; on pourra toujours prendre les vitesses v_0 et l'écart θ_0 assez petits pour vérifier l'inégalité

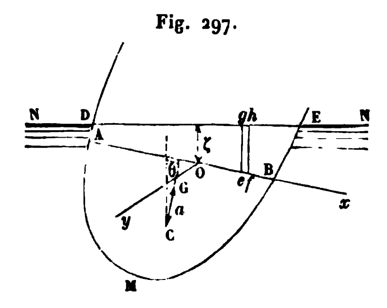
$$\Sigma m v_0^2 + P a \theta_0^2 < P a \theta_1^2,$$

et alors il sera impossible que l'écart θ atteigne jamais la limite supérieure θ_1; car, s'il y arrivait, la force vive $\Sigma m v^2$ devrait prendre une valeur négative, ce qui est irréalisable. On peut donc limiter autant qu'on veut l'amplitude des écarts, en limitant convenablement le dérangement initial, ce qui est le criterium d'après lequel on peut affirmer que l'équilibre est stable.

270. *Stabilité des corps flottants.* — Si nous décomposons les déplacements que pourrait prendre le solide flottant, en quatre autres déplacements, comme au n° 269, le premier et le troisième ne modifieront en rien ni la pression totale exercée par un liquide pesant, ni sa situation relativement au corps et à son poids; par suite, nous ne devons avoir égard (n° 268) qu'au second et au quatrième. Nous allons d'abord, dans l'hypothèse où ils se produiraient et resteraient toujours très petits, chercher l'accroissement du potentiel qui a lieu quand le solide passe de sa position d'équilibre à une autre position très voisine, mais d'ailleurs arbitraire.

Soit AB (*fig.* 297) le plan de flottaison primitif du corps,

Fig. 297.



c'est-à-dire le plan suivant lequel ce corps, pris dans la position d'équilibre, était coupé par la surface libre NN du liquide. La figure représente, dans une position quelconque, ce plan

AB, qui était d'abord horizontal. Puisqu'il y avait équilibre, le centre de gravité G et le centre de poussée C devaient alors se trouver sur une même verticale, et, par conséquent, la droite GC doit être perpendiculaire au plan AB. Pour déplacer le corps, nous imaginons qu'on a fait descendre verticalement tous ses points d'une même quantité ζ, égale au déplacement total du point O, centre de gravité de sa section horizontale AB; puis qu'on l'a fait tourner d'un angle θ autour d'un axe horizontal Oy passant par O. Dans la position finale ainsi obtenue, Oy est l'intersection du plan AB avec le plan horizontal mené à la distance ζ au-dessous de NN; la ligne GC, primitivement verticale, fait maintenant l'angle θ avec cette direction. L'équilibre n'existe plus entre le poids et la pression résultante du liquide, parce que cette dernière force a changé d'intensité et qu'elle n'agit plus suivant la verticale du point G.

Si l'on nomme

V le volume AMB primitivement immergé;

Π le poids de l'unité de volume du liquide (toujours supposé homogène);

Z_0 et Z les hauteurs initiale et finale du centre de gravité G au-dessous du plan NN;

la poussée primitive ΠV sera égale au poids, puisqu'elle lui faisait équilibre, et le travail de la pesanteur sur le corps s'exprimera par $\Pi V(Z - Z_0)$.

Pour évaluer le travail de la pression résultante, remarquons que cette force, égale au poids du fluide déplacé (n° 266), peut être considérée comme la résultante d'une infinité de forces verticales ascendantes $\Pi\varepsilon$, dont chacune serait censée agir sur un élément ε du volume plongé. Cette force $\Pi\varepsilon$ s'applique à l'élément ε dès que celui-ci arrive à traverser le plan NN pour aller au-dessous, et cesse d'agir sur lui dès qu'il traverse le même plan NN en sens contraire. En désignant par z_0 et z les cotes de hauteur initiale et finale de l'élément ε au-dessous du plan NN, le travail de la force $\Pi\varepsilon$ s'exprimera toujours par $\Pi\varepsilon(z_0 - z)$, mais à la condition de faire $z_0 = 0$ pour tout élément primitivement situé au-dessus de NN, et $z = 0$ pour tout élément qui serait au-dessus de NN quand il

est arrivé à sa position finale; cette règle se justifie, parce que la force $\Pi\varepsilon$ n'agit qu'autant que ε se trouve en dessous de NN, ou quand les ordonnées z, z_0 ont des valeurs positives. Il suit de là que le travail total de la pression résultante est le produit du facteur constant Π par la diminution $\Sigma\varepsilon z_0 - \Sigma\varepsilon z$ du moment du volume plongé, relativement au plan horizontal NN.

Nous calculerons le moment $\Sigma\varepsilon z$ en décomposant le volume plongé en deux parties, qui sont d'abord le volume primitivement plongé $AMB = V$, et, en second lieu, l'excédent compris entre AB et DE. Pour la première partie, le centre de gravité de son volume V est le point C; si l'on désigne par a la distance $\overline{GC}$ comptée positivement en descendant, la distance finale de C au plan NN sera $Z + a\cos\theta$, et le moment total aura pour valeur

$$V(Z + a\cos\theta)$$

ou simplement

$$V\left(Z + a - \frac{a\theta^2}{2}\right),$$

aux infiniment petits près d'ordre supérieur au second. Il faudra joindre à ce moment celui du volume ABDE. Or, si l'on prend pour axes coordonnés dans le plan AB la ligne Oy et une perpendiculaire Ox, et si l'on décompose la surface AB en éléments ω dont chacun serait la section oblique d'un prisme vertical tel que $efgh$, la hauteur du prisme construit sur un élément ayant x pour abscisse sera $\zeta + x\sin\theta$, le volume $efgh$ sera $\omega\cos\theta(\zeta + x\sin\theta)$, et son moment aura pour valeur

$$\frac{1}{2}\omega\cos\theta(\zeta + x\sin\theta)^2,$$

car son centre de gravité se trouve à la moitié de sa hauteur. Par suite, on a, pour le moment total de ABDE,

$$\frac{1}{2}\Sigma\omega\cos\theta(\zeta + x\sin\theta)^2,$$

la somme Σ devant s'étendre à tous les éléments qui compo-

sent la surface AB. En appelant Ω l'aire totale de AB, la somme en question peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\cos\theta\,\Sigma\omega(\zeta + x\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}\cos\theta(\zeta^2\Omega + \sin^2\theta\,\Sigma\omega x^2),$$

attendu que $\Sigma\omega x = 0$, parce que Oy passe par le centre de gravité de AB. La somme $\Sigma\omega x^2$ est le moment d'inertie de la même surface AB relativement à Oy; si on la représente par I, on aura finalement, pour le moment de ABDE,

$$\frac{1}{2}(\Omega\zeta^2 + I\theta^2),$$

aux infiniment petits du troisième ordre près. L'addition des deux parties qu'on vient de calculer donne alors, en résumé,

$$\Sigma\varepsilon z = V(Z + a) + \frac{1}{2}[\Omega\zeta^2 + (I - Va)\theta^2].$$

D'un autre côté, le volume plongé était AMB dans la position initiale, et l'on avait par conséquent

$$\Sigma\varepsilon z_0 = V(Z_0 + a);$$

donc le travail de la pression résultante a pour valeur

$$\Pi V(Z_0 - Z) - \frac{1}{2}\Pi[\Omega\zeta^2 + (I - Va)\theta^2],$$

et si l'on y joint le travail de la pesanteur, déjà calculé, on trouve en tout

$$-\frac{1}{2}\Pi[\Omega\zeta^2 + (I - Va)\theta^2].$$

Ce dernier résultat représente l'accroissement du potentiel, en passant de la position d'équilibre définie par $\theta = 0$, $\zeta = 0$ à une autre position quelconque, sauf une erreur d'ordre supérieur au second. On sera certain de la stabilité (abstraction faite des déplacements horizontaux), lorsque cet accroissement ne pourra prendre que des valeurs négatives, car alors le potentiel sera maximum dans la position d'équilibre (n° 207). Or cela aura lieu : 1° si a est négatif, ce qui suppose le centre de poussée au-dessus du centre de gravité du

corps dans la position d'équilibre; 2° si a est positif, mais inférieur à $\frac{I}{V}$. L'inégalité $a < \frac{I}{V}$ doit se vérifier pour tous les axes Oy qu'on peut mener par le point O, centre de gravité de la section horizontale AB du corps, dans le plan de cette section; mais il suffit évidemment de la vérifier pour celui des axes auquel répond le minimum du moment d'inertie I. Dans tous les cas il n'est plus nécessaire, comme on le voit, de placer G au-dessous de C; le cas des corps flottants se distingue en cela de celui des corps entièrement plongés; il suffit que G ne soit pas trop au-dessus de C.

On pourrait encore ici se dispenser de recourir à la théorie générale du n° 207, par l'emploi d'un raisonnement tout semblable à celui que nous avons donné à la fin du n° 269.

Il y aurait évidemment un grand intérêt pratique à rechercher non seulement si un corps flottant est en équilibre stable, mais encore s'il possède une stabilité d'une amplitude donnée. C'est une question que nous n'aborderons pas, car il ne semble guère possible de le faire que sur des exemples particuliers.

CHAPITRE DEUXIÈME.

HYDRODYNAMIQUE.

§ I. — **Mouvement des fluides parfaits.**

271. *De la pression dans un fluide en mouvement.* — Quand un fluide se meut, il n'en exerce pas moins une certaine pression contre les parois qui le terminent, et, en divisant la force que supporte un élément superficiel par l'aire de cet élément, on aurait la pression rapportée à l'unité de surface en un point de la paroi. Dans le cas d'un fluide parfait, cette force agirait nécessairement suivant la normale, puisqu'on admet l'absence complète de frottement.

Si l'on veut ensuite, en procédant comme au n° 258, étendre cette définition à un point intérieur de la masse fluide, on n'éprouvera pas de difficulté si la fluidité est toujours supposée parfaite. En effet, la démonstration de l'équation (1) du n° 258 se ferait de la même manière en introduisant les forces d'inertie des molécules, conformément au principe de d'Alembert (n° 193). Mais, comme en définitive les forces proportionnelles aux masses disparaissent de l'équation quand les dimensions du fluide décroissent indéfiniment, on reconnaîtrait de même que les éléments d'une surface fermée infiniment petite et de forme arbitraire, tracée autour d'un point du fluide, supportent tous la même pression par unité superficielle.

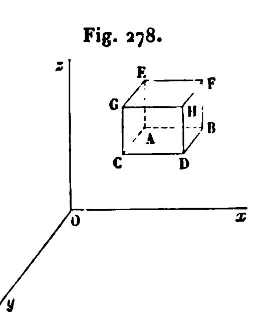
Ce serait là ce qu'on nommerait la pression du fluide au point dont il s'agit; et en même temps le principe de l'égalité de pression en tous sens autour de ce point se trouverait démontré.

Dans le cas où la viscosité produirait des effets assez sensibles et où il serait en conséquence nécessaire d'en tenir

compte, on peut toujours concevoir qu'on supprime d'abord cette cause, sans rien changer d'ailleurs à la nature du fluide; il y aurait alors autour de chaque point M une pression bien définie, que nous considérerons comme étant la pression du fluide en M. D'autre part, il est bien évident que nous corrigerons l'erreur ainsi commise volontairement, en rétablissant les actions dues à la viscosité dans une autre catégorie de forces et les comptant parmi les forces directement appliquées à chaque molécule du fluide, car de cette manière nous n'aurons finalement rien négligé.

272. *Équations générales du mouvement d'un fluide parfait.* — On peut appliquer à un fluide parfait en mouvement les équations de l'Hydrostatique (n° 259), pourvu que, conformément au principe de d'Alembert, on tienne compte des forces d'inertie; l'équilibre existe en effet entre ces dernières forces et les forces réellement agissantes. Si donc on prend trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 298) et qu'on nomme J_x, J_y, J_z les composantes, suivant ces axes, de l'accélération du point A du fluide, répondant aux coordonnées x, y, z, la force d'inertie de ce point, rapportée à l'unité de masse, aura pour composantes $-J_x$, $-J_y$, $-J_z$; et en conservant aux autres notations leur signification déjà connue et définie (n° 259), on aura

Fig. 278.



$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \rho(X - J_x), \\ \dfrac{dp}{dy} = \rho(Y - J_y), \\ \dfrac{dp}{dz} = \rho(Z - J_z). \end{cases}$$

Il faut maintenant exprimer J_x, J_y, J_z au moyen d'un système d'inconnues et de variables convenablement choisi.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse V du point A

à l'époque t. On remarquera que les cinq quantités u, v, w, p, ρ peuvent être considérées comme fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z, t; car, en un même point de l'espace, elles varient avec le temps, et, à une même époque, elles varient d'un point à un autre. Si l'on parvenait à trouver ces cinq fonctions, on connaîtrait, à une époque et pour un point quelconques : 1° la vitesse V en grandeur, direction et sens, ce qui caractérise l'état de mouvement; 2° la pression p et la densité ρ, ce qui caractérise l'état physique d'un fluide de nature donnée. Bien plus, on pourrait arriver à connaître les coordonnées de chaque molécule en fonction du temps; il suffirait de considérer x, y, z comme liées à t par les équations simultanées

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

dont les seconds membres auraient été déjà déterminés en fonction de x, y, z, t. L'intégration de ces équations donnerait le mouvement de chaque molécule isolée, et par l'élimination de t on aurait aussi les deux équations de sa trajectoire.

Le problème est donc ramené à trouver cinq équations entre u, v, w, p, ρ, considérées comme fonctions des variables indépendantes x, y, z, t. D'abord on a toujours, quels que soient dx, dy, dz, dt,

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dt}dt;$$

mais si l'on considère le déplacement, pendant le temps dt, de la molécule fluide placée en A à l'époque t, les projections de ce déplacement sur les trois axes seront

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt;$$

donc l'accroissement de la vitesse u de cette molécule en projection sur Ox sera, d'après l'équation précédente,

$$dt\left(u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}\right).$$

Or le même accroissement s'exprime aussi par $J_x dt$, car la

projection de l'accélération totale d'un point sur un axe n'est autre chose (nº 16) que l'accroissement, rapporté à l'unité de temps, de sa vitesse projetée sur le même axe; donc

$$J_x = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}.$$

On obtiendrait de la même manière les expressions analogues de J_y et J_z, en fonction des vitesses u, v, w et de leurs dérivées partielles relativement à x, y, z, t; en substituant ces expressions dans les équations (1), celles-ci deviennent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= X - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz} - \frac{du}{dt},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= Y - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dt},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= Z - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz} - \frac{dw}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Cela fait déjà trois des cinq équations demandées.

La quatrième se nomme l'*équation de continuité,* parce qu'on y arrive en supposant qu'il ne se forme pas de vide dans la masse fluide en mouvement. Pour l'établir, soit ABCDEFGH un volume élémentaire en forme de parallélépipède, ayant ses arêtes parallèles aux axes et de longueurs dx, dy, dz, auquel nous attribuons une position invariable, au milieu du fluide en mouvement; pendant le temps dt, il entre par la face ADEH, dans l'intérieur de ce parallélépipède, un volume prismatique de fluide ayant pour base $dy\,dz$, pour hauteur $u\,dt$ et pour densité ρ, ce qui produit une masse $\rho u\,dy\,dz\,dt$; il sort en même temps par la face opposée BCFG une masse égale à la précédente, augmentée de sa différentielle partielle relativement à x, soit une masse

$$\left(\rho u + \frac{d.\rho u}{dx}dx\right)dy\,dz\,dt,$$

de sorte que la masse comprise dans l'intérieur du parallélépipède s'est accrue de $-\frac{d.\rho u}{dx}dx\,dy\,dz\,dt$. La considération des faces opposées ABGH, DCFE d'une part, ABCD, EFGH

d'autre part, conduirait à trouver encore deux autres accroissements partiels exprimés d'une manière semblable, et l'accroissement total sera

$$-dx\,dy\,dz\,dt\left(\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}\right).$$

On obtiendra une autre expression de la même quantité, en remarquant que la masse renfermée dans le parallélépipède, d'abord égale à $\rho\,dx\,dy\,dz$, varie en raison du changement de ρ pendant le temps dt et devient à la fin de ce temps

$$\left(\rho+\frac{d\rho}{dt}dt\right)dx\,dy\,dz,$$

ce qui donne pour valeur de son accroissement $\frac{d\rho}{dt}dx\,dy\,dz\,dt$. Cela suppose qu'il ne se forme jamais de vide intérieur dans le fluide, car autrement la masse contenue dans un volume ne serait plus égale au produit du volume par la densité. Si l'on admet cette hypothèse, nécessaire pour justifier les deux expressions ci-dessus, on aura, en les égalant l'une à l'autre,

$$\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0. \tag{3}$$

L'équation (3), applicable aux liquides comme aux gaz, se dédouble en deux autres quand il s'agit d'un liquide incompressible. Elle peut en effet s'écrire

$$u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0;$$

or, dans un liquide incompressible, la densité ne varie pas quand on suit une même masse élémentaire sur sa trajectoire, c'est-à-dire que $d\rho$ ou bien

$$\frac{d\rho}{dx}dx+\frac{d\rho}{dy}dy+\frac{d\rho}{dz}dz+\frac{d\rho}{dt}dt$$

sera nulle quand on fera

$$dx=u\,dt,\quad dy=v\,dt,\quad dz=w\,dt;$$

donc on a dans ce cas

$$dt\left(u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}\right)=0;$$

et, par suite, on a aussi les deux équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0,\\ &\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,\end{aligned}\right.$$

dont la première est satisfaite d'elle-même dans le cas d'un liquide homogène, parce que ρ est alors une constante. Les équations (2) et (4) sont, dans le cas des liquides incompressibles, les cinq équations qu'il s'agissait de trouver.

Pour les gaz à température constante, on aurait les équations (2) et (3) auxquelles on devrait joindre la relation fournie par les lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$(5)\qquad \rho=\frac{kp}{1+\alpha\theta},$$

dans laquelle θ désigne la température, α le coefficient de dilatation $\frac{1}{273}$, et k une constante spécifique. Nous n'examinerons pas d'autres suppositions parmi toutes celles qu'on peut faire sur la constitution physique du fluide.

Si l'on pouvait intégrer les cinq équations aux différences partielles qu'on vient d'établir dans deux hypothèses particulières, et si l'on pouvait déterminer, d'après les conditions spéciales relatives à la surface extérieure du fluide et à l'instant initial, les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, le problème de la recherche du mouvement serait résolu, du moins en ce qui concerne les liquides incompressibles et les gaz à température constante. Malheureusement, sauf dans un petit nombre de cas très limités, cet ensemble d'opérations paraît au-dessus des ressources actuelles de l'Analyse. Nous nous abstiendrons donc d'aller plus avant dans cette étude, et nous allons déduire des équations (1), moyennant quelques hypothèses restrictives, un théorème remarquable, qui nous sera très utile dans la suite.

273. *Théorème sur le mouvement permanent d'un fluide.* — Nous supposerons d'abord le mouvement *permanent,* ce qui veut dire qu'en un point déterminé de l'espace le fluide présente toujours le même phénomène, ou, en d'autres termes, que u, v, w, p, ρ varient bien, à un même instant, avec les coordonnées x, y, z du point auquel ces quantités se rapportent, mais qu'elles restent constantes lorsque le temps t varie seul et que x, y, z ne changent pas. D'après cette définition, il est clair qu'on a, comme conditions nécessaires et suffisantes de la permanence du mouvement,

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

La seconde hypothèse consistera en ce que les forces dérivent d'un potentiel, de sorte que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit la différentielle exacte d'une fonction T des coordonnées x, y, z.

Cela posé, si l'on ajoute les équations (1) respectivement multipliées par dx, dy, dz, on trouvera

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho}\,dp = dT - J_x\,dx - J_y\,dy - J_z\,dz;$$

car, puisque le mouvement est permanent, p ne dépend plus que de x, y, z et dp se réduit à $\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$. D'un autre côté, l'égalité

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

donne par la différentiation

$$V\,dV = u\,du + v\,dv + w\,dw.$$

Appliquons cette relation dans le cas où l'on suivrait une même molécule fluide sur sa trajectoire; il faudrait faire alors

$$u\,dt = dx, \qquad v\,dt = dy, \qquad w\,dt = dz,$$
$$du = J_x\,dt, \qquad dv = J_y\,dt, \qquad dw = J_z\,dt;$$

d'où l'on tire sans peine

$$V\,dV = u\,du + v\,dv + w\,dw = J_x\,dx + J_y\,dy + J_z\,dz.$$

L'équation (6) donne alors

$$(7) \qquad d\mathrm{T} - \frac{1}{\rho}\,dp - \mathrm{V}\,d\mathrm{V} = 0,$$

autre équation dont l'emploi suppose, bien entendu, que les différentielles $d\mathrm{T}$, dp, $d\mathrm{V}$ sont calculées entre deux positions consécutives par lesquelles doit passer une même molécule. Il est d'ailleurs facultatif de prendre ces différentielles à une même époque, pour deux molécules différentes situées sur la même trajectoire, ou, pour une même molécule, à deux époques distinctes; en raison de la permanence, le résultat obtenu serait le même dans les deux manières d'opérer.

L'intégration de l'équation (7) est possible toutes les fois que ρ est une fonction connue de p. Si nous faisons l'hypothèse simple d'un liquide incompressible, l'intégrale sera

$$(8) \qquad \mathrm{T} - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = \text{const.},$$

car la densité ρ reste invariable, comme on l'a déjà dit, sur la trajectoire d'une même molécule; dans le cas d'un gaz à température constante, il y aurait un rapport constant K entre ρ et p, et l'intégration donnerait immédiatement

$$(9) \qquad \mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{K}}\,\mathrm{L}p - \frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = \text{const.}$$

On n'oubliera pas que ces deux équations (8) et (9) ne sont vraies que pour une suite de positions situées sur la trajectoire d'une même molécule, choisie d'ailleurs arbitrairement.

274. *Théorème de Daniel Bernoulli.* — Supposons que les forces généralement désignées par X, Y, Z soient dues uniquement à la pesanteur, et prenons en outre l'axe des z vertical et descendant. Il faut faire alors

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = g;$$

la fonction T se réduit à gz, et l'équation (8) divisée par g devient, en remarquant que ρg exprime le poids Π de l'unité

de volume du liquide,

$$(10)\qquad z - \frac{p}{\Pi} - \frac{V^2}{2g} = \text{const.}$$

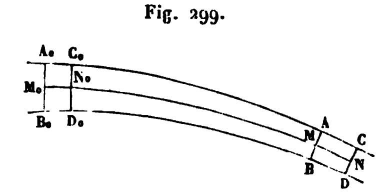
Cette dernière équation est la traduction algébrique du théorème de Daniel Bernoulli. On peut l'énoncer de la manière suivante :

Si, pour divers points d'un liquide pesant et incompressible en mouvement permanent, tous situés sur la trajectoire d'une même molécule, on prend la différence entre la cote de hauteur au-dessous d'un plan horizontal fixe, d'une part, et la hauteur représentative de la pression plus la hauteur due à la vitesse, d'autre part, cette différence sera une quantité constante.

Le théorème de D. Bernoulli, qui est d'un usage continuel en Hydraulique, peut se démontrer aussi à l'aide du théorème des forces vives. Voici comment :

Considérons une trajectoire M_0M (*fig.* 299), et par le point M_0 menons-lui un plan normal dans lequel nous pren-

Fig. 299.



drons une aire infiniment petite A_0B_0, dont M_0 serait le centre de gravité. Nous admettons, en raison de la continuité, que toutes les trajectoires issues des divers points de A_0B_0 sont encore normales à ce plan; et que, soit dans la partie M_0M qui suit leur passage à travers A_0B_0, soit dans la partie qui le précède, ces trajectoires s'écartent toujours très peu les unes des autres, de manière qu'elles forment un volume à section transversale infiniment petite. Le fluide contenu dans ce volume est ce que nous appelons un *filet fluide*.

Appliquons maintenant le théorème des forces vives (n° **205**) à la portion de filet comprise entre les sections A_0B_0, AB,

pendant le temps nécessaire pour qu'elle se place dans la position infiniment voisine C_0D_0CD. Par suite de la permanence que nous attribuons au mouvement, la partie C_0D_0AB, commune aux deux positions du système, aura même force vive au commencement et à la fin du temps considéré, de sorte que l'accroissement de la demi-force vive du système est égal à la différence entre les demi-forces vives des tranches ABCD et $A_0B_0C_0D_0$. Ces tranches ont une même masse m, car, en leur ajoutant la masse de la partie commune C_0D_0AB, on reproduit la masse totale du système matériel dont on s'occupe, dans deux positions successives, et cette masse totale ne peut changer quand elle passe de l'une à l'autre; donc, si l'on nomme V_0 et V les vitesses en A_0B_0 et AB, l'accroissement de la demi-force vive du système sera

$$\frac{1}{2}m(V^2 - V_0^2),$$

quantité qu'il faut égaler à la somme des travaux des forces.

Nous savons d'abord que le travail de la pesanteur peut se calculer sans avoir égard à la partie commune C_0D_0AB, comme si la tranche $A_0B_0C_0D_0$ venait se superposer à ABCD (n° 153); sa valeur sera donc $mg(z - z_0)$, en nommant z et z_0 les cotes de hauteur des points M et M_0 au-dessous d'un plan horizontal fixe. Il faut ensuite tenir compte du travail des forces intérieures; mais, s'il s'agit d'un liquide incompressible, le système A_0B_0AB ne change pas de volume en se déplaçant, et si nous supposons en outre le fluide parfait, le travail des forces intérieures s'annule (n° 257), en vertu de la définition même de la fluidité parfaite. La même hypothèse fait disparaître également le travail des pressions sur le contour latéral du filet, parce que ces pressions sont normales aux déplacements de leurs points d'application; donc il ne reste plus à évaluer que le travail des pressions sur les sections transversales A_0B_0, AB. Soient

p_0 et p ces pressions rapportées à l'unité de surface;
σ_0 et σ les aires A_0B_0 et AB;
ds_0 et ds les longueurs $\overline{M_0N_0}$ et $\overline{MN}$.

La pression totale sur A_0B_0 sera $p_0\sigma_0$ et son travail aur

pour valeur $p_0\sigma_0 ds_0$; or $\sigma_0 ds_0$ n'est autre chose que le volume $A_0B_0C_0D_0$, et comme le fluide occupant ce volume a une masse m et un poids mg, il en résulte l'égalité $\sigma_0 ds_0 = \frac{mg}{\Pi}$, en désignant par Π le poids de l'unité de volume du fluide renfermé dans le filet. Le travail de la pression $p_0\sigma_0$ sur A_0B_0 s'exprime donc par $p_0\frac{mg}{\Pi}$; on verrait de la même manière que celui de la pression $p\sigma$ sur AB est égal à $-p\frac{mg}{\Pi}$.

On peut maintenant écrire l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}m(V^2 - V_0^2) = mg(z - z_0) + \frac{mg}{\Pi}(p_0 - p),$$

ce qui donne, en divisant les deux membres par mg,

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi}.$$

Cette dernière équation démontre bien le théorème de D. Bernoulli, car elle exprime que la quantité $z - \frac{p}{\Pi} - \frac{V^2}{2g}$ a la même valeur pour deux points quelconques M_0 et M situés sur une même trajectoire.

L'introduction du rapport des aires σ_0 et σ dans l'équation précédente permettrait de n'y conserver qu'une des deux vitesses V_0 ou V. Puisque $\sigma_0\, ds_0$ et $\sigma\, ds$ sont des volumes répondant à un même poids mg de fluide, et que celui-ci a toujours le même poids Π par unité de volume dans tout le parcours du filet, on a nécessairement

$$\sigma_0\, ds_0 = \sigma\, ds;$$

or, dt étant le temps employé pour le passage de la position A_0B_0AB à la position C_0D_0CD, on a aussi

$$ds_0 = V_0\, dt, \quad ds = V\, dt,$$

et par suite

$$\sigma_0 V_0 = \sigma V;$$

donc la différence $\dfrac{V^2 - V_0^2}{2g}$ peut se remplacer par l'une des expressions

$$\frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right) \text{ ou } \frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1\right).$$

Cette remarque présente parfois une certaine utilité, dans des circonstances où l'on peut évaluer le rapport des sections transversales.

On donne encore au théorème de D. Bernoulli l'interprétation géométrique suivante. Concevons que les pressions p_0 et p en M_0 et M (*fig.* 300) soient représentées par des colonnes fluides de hauteur $\frac{p_0}{\Pi}$, $\frac{p}{\Pi}$, s'élevant respectivement aux niveaux des points P_0 et P; ces niveaux sont ce qu'on nomme les *niveaux piézométriques* en M_0 et M (du grec πιέσις, pression, μέτρον, mesure); l'abaissement vertical h du niveau piézométrique en passant de M_0 à M est ce que nous appellerons la *charge* entre ces deux points. Avec les notations précédentes, si NN est le plan horizontal de comparaison pour les cotes z_0, z des points M_0, M, les différences $z_0 - \frac{p_0}{\Pi}$ et $z - \frac{p}{\Pi}$ seront les cotes de hauteur des niveaux piézométriques P_0 et P, relativement au même plan, de sorte que $z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi}$ ou $z - \frac{p}{\Pi} - \left(z_0 - \frac{p_0}{\Pi}\right)$ représente la charge h.

Fig. 300.

L'équation qui exprime le théorème de D. Bernoulli peut donc s'écrire

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = h,$$

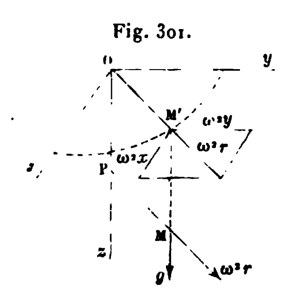
et on l'énonce en disant que *l'accroissement de la hauteur due à la vitesse est égal à la charge*. Il est toujours entendu que l'accroissement doit se prendre entre deux points situés sur une même trajectoire; de plus on veut parler d'accroissements algébriques, pouvant être positifs ou négatifs. Ainsi V_0

peut être plus grand que V; alors P_0 serait au-dessous du niveau de P, et il y aurait, en allant de M_0 à M, un relèvement du niveau piézométrique, qu'on devrait considérer comme une charge négative.

275. *Application du théorème de D. Bernoulli à un mouvement relatif.* — On sait (n° 209) que tout mouvement relatif peut être traité comme absolu, à la condition de joindre aux forces qui agissent réellement sur chaque point matériel deux forces fictives, savoir : la force d'inertie d'entraînement et la force centrifuge composée. Or, quand on considère des positions consécutives d'un même point fluide sur sa trajectoire, la quantité $d\mathrm{T}$ ou $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ n'est autre chose que le travail élémentaire des forces, rapportées à l'unité de masse, qui sont directement appliquées à ce point; la force centrifuge composée, sans cesse perpendiculaire au déplacement relatif de son point d'application (n° 113), introduit donc dans l'expression de $d\mathrm{T}$ un ensemble de termes toujours nul, et par conséquent elle disparaît dans les équations fournies par le théorème de D. Bernoulli. Reste la première force apparente; si l'on appelle J_e l'accélération d'entraînement, la valeur de cette force rapportée à l'unité de masse sera $-J_e$, et l'on devra joindre ses composantes à X, Y, Z.

Prenons pour exemple le cas particulier d'un liquide pesant, en mouvement relatif permanent, par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 301) qui tourne uniformément autour de la verticale Oz avec une vitesse angulaire ω. Soient M un point du fluide, répondant aux coordonnées x, y, z; $\overline{\mathrm{MP}} = r$ la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe de rotation Oz; M'O la projection (en vraie grandeur) de MP sur le plan des xy. Le poids de la molécule donne la force g par unité de masse, parallèlement à l'axe des z; la force d'inertie d'entraînement se réduit ici à la force centrifuge qui, rapportée à l'unité de masse, est $\omega^2 r$ et se décompose en $\omega^2 x$ et $\omega^2 y$, parallèlement à Ox et Oy. Le tri-

Fig. 301.



nôme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ a donc pour valeur, y compris les forces apparentes,

$$g\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy) \text{ ou } g\,dz + \omega^2 r\,dr.$$

L'intégrale de cette expression est $gz + \frac{1}{2}\omega^2 r^2$; si donc on nomme V' la vitesse relative en M, on aura, en appliquant au mouvement relatif l'équation (8) du n° 273,

$$gz + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}V'^2 = \text{const.}$$

Désignons encore par l'indice o les quantités qui se rapportent à un point de départ M_0, situé sur la même trajectoire que M; l'équation précédente divisée par g donnera

$$\frac{V'^2 - V_0'^2}{2g} = z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi} + \frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2g}.$$

L'accroissement de la hauteur due à la vitesse relative n'est donc plus égal à la charge $z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi}$, comme dans le mouvement absolu (n° 274), mais à la charge augmentée de $\frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$; cette augmentation peut être regardée comme une charge fictive ou apparente, qu'il faut ajouter à la charge réelle pour être en droit d'appliquer le théorème de D. Bernoulli au mouvement relatif dont il s'agit maintenant. On voit que la valeur de cette charge fictive est égale à l'accroissement de la hauteur due à la vitesse d'entraînement.

§ II. — Théorèmes et remarques applicables aux fluides parfaits ou imparfaits.

276. *Généralisation du théorème de D. Bernoulli.* — Comme nous l'avons déjà fait remarquer au n° 271, on est toujours en droit de considérer un fluide comme parfait, pourvu que l'on corrige l'erreur ainsi commise, en comptant les forces dues à la viscosité parmi celles qui sont directement appliquées à chaque molécule. Soient, pour une molécule quelconque, φ_x, φ_y, φ_z les composantes, suivant trois axes rectangulaires, de

la force résultante φ rapportée à l'unité de masse, que produit la viscosité; les autres notations du § I qui précède conservant le même sens, l'équation (7) du n° 273 devient alors, dans le cas d'un fluide imparfait,

$$dT + (\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz) - \frac{1}{\rho}\, dp - V\, dV = 0,$$

ou encore, en nommant γ l'angle de φ avec l'élément ds de trajectoire auquel répondent les différentielles dT, dp, dV, dx, dy, dz,

$$V\, dV = dT + \varphi\, ds \cos\gamma - \frac{1}{\rho}\, dp.$$

Si l'on intègre, dans l'hypothèse d'un fluide incompressible, entre deux points M_0 et M d'une trajectoire, s_0 et s désignant les valeurs correspondantes de l'arc mesuré sur cette trajectoire, et T_0 la valeur de T pour $s = s_0$, on aura

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = T - T_0 + \int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds + \frac{1}{\rho}(p_0 - p).$$

Ce résultat peut être considéré comme fourni par l'application du théorème des forces vives à une masse élémentaire m, dans le parcours M_0M; car, après avoir multiplié la dernière équation par m, son premier membre sera la demi-variation de force vive $\frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2)$, le terme $(T - T_0)m$ sera le travail des forces directement appliquées, non compris la viscosité, dont le travail a pour valeur $\int_{s_0}^{s} m\varphi \cos\gamma\, ds$; par suite, le dernier terme $\frac{m}{\rho}(p_0 - p)$ ne peut que représenter le travail exercé sur m en vertu de la pression des molécules voisines, pour que l'équation soit compatible avec le théorème des forces vives. Si l'on avait établi directement la valeur de ce dernier travail, le théorème des forces vives nous aurait au besoin donné le moyen de démontrer l'équation (1).

Cette équation est l'expression du théorème de D. Bernoulli généralisé, d'abord en ne faisant pas d'autre hypothèse sur les forces directement appliquées, que celle de l'existence

d'un potentiel T, et tenant ensuite compte des forces dues à la viscosité.

Dans le cas particulier d'un liquide pesant, l'axe des z étant vertical et descendant, dT se réduit à $g\,dz$ et l'équation (1), divisée par g, devient

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi} + \frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds.$$

Le travail de la force de viscosité $m\varphi$ a pour valeur $\int_{s_0}^{s} m\varphi \cos\gamma\, ds$ dans le parcours $s - s_0$; en prenant la force rapportée à l'unité de poids, il faudrait diviser par mg, et le travail deviendrait égal à $\frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma\, ds$, c'est-à-dire au dernier terme du second membre. En général, ce terme est négatif, parce que la viscosité agit comme une force de frottement, toujours opposée à la vitesse de la molécule; si nous le représentons par $-\zeta$ et si nous nommons h la charge $z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi}$, nous aurons

$$(2) \qquad \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = h - \zeta.$$

La quantité ζ se nomme *perte* de *charge*, parce qu'elle se retranche de la charge dans l'équation (2). On énonce alors le théorème de D. Bernoulli, étendu à un liquide pesant imparfait, en disant : *L'accroissement de la hauteur due à la vitesse est égal à la charge diminuée de la perte de charge.* Il faut se rappeler en outre que la perte de charge est égale au travail, changé de signe, que produit la force de viscosité rapportée à l'unité de poids.

Nous verrons plus tard, par quelques exemples, comment on parvient à évaluer les pertes de charge.

277. *Règles diverses pour le calcul de la pression dans un fluide en mouvement.* — L'équation fournie par le théorème de D. Bernoulli est souvent employée pour rechercher la vitesse aux divers points d'un fluide en mouvement perma-

nent; mais cela exige qu'on puisse connaître directement la pression en ces points, puisqu'elle entre dans l'équation dont il s'agit. Voici, à cet effet, quelques règles ou remarques dont la suite fera reconnaître l'utilité :

Première règle. — *Dans un fluide parfait dont tous les points ont un mouvement rectiligne et uniforme, la pression varie suivant la loi hydrostatique, en passant d'un point à un autre, à la même époque.* — D'après l'énoncé, on doit faire, en effet, dans les équations (1) du n° 272,

$$J_x = 0, \quad J_y = 0, \quad J_z = 0;$$

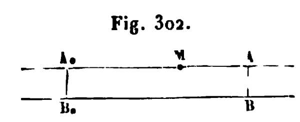
ces équations deviennent alors

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

c'est-à-dire entièrement conformes à celles de l'Hydrostatique (n° 259). On peut donc, à un instant donné, se rendre compte des variations de pression avec x, y, z comme s'il y avait équilibre.

Si le mouvement permanent d'un fluide composé de filets homogènes se produit suivant une série de droites parallèles, on peut prouver que la vitesse est invariable dans chaque filet, et que, par conséquent, toutes les molécules ont des mouvements uniformes. Considérons, en effet, un filet A_0B_0AB (*fig.* 302); d'après la manière dont le mouvement est défini, le faisceau de trajectoires qui constitue ce filet lui donne nécessairement la figure d'un cylindre à section transversale constante. Nous pouvons, afin de connaître le rapport des vitesses V_0 et V dans les sections A_0B_0 et AB, appliquer la relation $\sigma_0 V_0 = \sigma V$ démontrée au n° 274, car sa démonstration ne suppose que l'homogénéité du filet; ici, comme la section σ reste invariable, il en résulte $V = V_0$, et, par conséquent, la vitesse est constante, à une époque donnée, en tous les points d'une même trajectoire. Cela établi, soit M une molécule quelconque parcourant la droite A_0A; sa vitesse à toute époque sera la même que celle de la molécule qui passe

Fig. 302.



simultanément au point A_0 fixe sur A_0A. Mais, en vertu de la permanence qu'on a supposée, cette dernière vitesse ne varie pas avec le temps; donc il en est de même pour la vitesse de la molécule M, et, par conséquent, cette molécule a bien un mouvement rectiligne et uniforme.

DEUXIÈME RÈGLE. — *Dans un fluide animé de mouvements quelconques, mais très lents, la pression varie suivant la loi hydrostatique.* — La lenteur des mouvements prouve, en effet, que les forces ne sont pas loin de satisfaire aux conditions d'équilibre; on peut donc appliquer approximativement les équations qui auraient lieu si le repos existait en toute rigueur.

TROISIÈME RÈGLE. — *Lorsque les molécules d'un fluide parfait ont des mouvements identiques à ceux qu'elles prendraient si chacune se mouvait isolément sous l'action des forces directement appliquées, la pression est constante, à une époque déterminée, dans toute l'étendue du fluide.* — En reprenant les équations (1) du n° 272, on doit y faire, conformément à l'énoncé,

$$X = J_x, \quad Y = J_y, \quad Z = J_z,$$

car l'accélération d'un point isolé n'est autre chose que le quotient de la force par la masse, c'est-à-dire la force rapportée à l'unité de masse; ces équations deviennent alors

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{dp}{dz} = 0,$$

ce qui prouve que, pour une même époque, la pression ne varie pas d'un point du fluide à un autre. Elle serait constante d'une manière absolue dans le cas d'un mouvement permanent, puisque alors la pression en un point donné ne varie pas avec le temps.

Le cas supposé par l'énoncé de la règle se réalise à peu près quand un liquide pesant et homogène sort d'un vase entretenu à un niveau constant, et s'échappe par un orifice de dimensions assez petites relativement à celles du vase. On observe alors un jet dont la forme parabolique ne diffère pas

sensiblement, au moins dans une certaine étendue, de la trajectoire qui suivrait une molécule isolée.

Quatrième règle. — *Lorsqu'il existe dans un fluide naturel en mouvement une section plane* (S) *coupée normalement par toutes les trajectoires, et que celles-ci sont sensiblement rectilignes aux environs du plan dont il s'agit, la pression varie suivant la loi hydrostatique dans toute l'étendue de la section* (S). — Nommons, en effet,

ds la distance de deux points infiniment voisins pris dans la section (S);
p et ρ la pression et la densité aux environs de ces points;
P la projection, sur la tangente à ds, de la force résultante, rapportée à l'unité de masse, directement appliquée à toute molécule voisine des mêmes points;
Q et R les projections analogues pour la force d'inertie et la résultante des forces produites par la viscosité.

Les équations d'équilibre devant être vérifiées quand on tient compte de toutes ces forces, on peut prendre ds prolongé pour un des axes coordonnés et écrire (n° 259)

$$\frac{dp}{ds} = \rho(P - Q + R),$$

et, pour justifier l'énoncé de la règle, il suffit de montrer qu'on a $Q = 0$, $R = 0$, car alors l'équation ci-dessus resterait bien la même que dans l'état d'équilibre, et la variation dp correspondant à ds n'aurait que la valeur hydrostatique $\rho P\, ds$. Or les forces d'inertie tangentielles sont perpendiculaires au plan (S) et par suite à ds; les forces d'inertie centrifuges sont négligeables, parce qu'on suppose les trajectoires sensiblement rectilignes aux environs de (S); donc, en premier lieu, Q est nul. D'un autre côté, le fluide se composant de filets à peu près droits et normaux à (S), on conçoit qu'il puisse être assimilé à un ensemble de prismes très déliés qui glisseraient les uns sur les autres parallèlement à leurs arêtes, c'est-à-dire perpendiculairement à la section (S); sans donner cette assimilation comme une démonstration bien rigoureuse, nous en concluons que les forces dues à la viscosité, agissant

en sens contraire de ces glissements réciproques, ont une projection R également nulle. Il en serait de même pour les forces, dues aussi à la viscosité, qui pourraient agir sur les prismes parallèlement à leur longueur, dans le sens d'une extension ou d'une compression. La règle se trouve par là démontrée, au moins d'une manière approximative.

CHAPITRE TROISIÈME.

HYDRAULIQUE.

§ I. — Écoulement permanent d'un liquide pesant et homogène par un orifice percé dans un réservoir, en supposant les effets de la viscosité négligeables.

278. *Écoulement par un orifice en mince paroi débouchant librement dans un gaz.* — Un liquide pesant et homogène s'écoule par une petite ouverture pratiquée en dessous de son niveau, dans la paroi d'un réservoir, et forme une veine jaillissant dans un gaz indéfini qui l'entoure sur une certaine longueur. L'écoulement est supposé permanent, ce qui exige que le niveau soit entretenu à une hauteur invariable; pour cela, le liquide écoulé doit être remplacé d'une manière continue, à moins que la capacité du réservoir ne soit pour ainsi dire infinie. La paroi ne présente qu'une petite épaisseur sur le contour de l'orifice, de sorte qu'on peut considérer celui-ci comme percé dans une membrane très mince. Dans ces circonstances, en observant d'abord ce qui se passe à l'intérieur du réservoir, on reconnaît que le liquide y a très peu de vitesse, pour peu qu'on s'éloigne de l'orifice et que celui-ci soit suffisamment petit par rapport au réservoir. On rend ce fait sensible aux yeux en mêlant au liquide un corps pulvérulent de densité à peu près égale, qui reste en suspension et participe au mouvement. On en déduit immédiatement que la pression dans le réservoir varie approximativement suivant la loi hydrostatique (n° 277, deuxième règle), et que la surface libre s'écarte peu d'un plan horizontal.

Lorsqu'on observe, au contraire, la veine qui s'écoule, on voit ses dimensions transversales diminuer depuis l'orifice jusqu'à une section minimum dite *section contractée,* où les

molécules arrivent avec des vitesses sensiblement parallèles et normales au plan de la section; cette contraction est due à ce que les filets liquides affluent de l'intérieur vers l'orifice dans toutes les directions, d'où résulte une convergence qui ne cesse pas immédiatement au dehors. Après le passage de la section contractée et sur une certaine longueur, les molécules liquides décrivent à peu près les mêmes paraboles que si chacune se mouvait isolément dans le vide; la pression dans cette partie de la veine est donc constante et égale à celle du gaz ambiant (n° 277, troisième règle).

Soient Ω l'aire de la section contractée, A celle de l'orifice; le rapport $\frac{\Omega}{A}$ a reçu le nom de *coefficient de contraction*. La détermination théorique de ce coefficient est un problème très difficile, dont on n'a pas encore de solution entièrement satisfaisante, sauf dans un cas particulier que nous traiterons bientôt, et l'hydraulique expérimentale ne fournit à son sujet que des renseignements assez incomplets. Voici comment les expériences peuvent être faites. On mesure une section quelconque de la veine, en faisant passer celle-ci à travers un bâti, par lequel on supporte une série de tiges métalliques terminées en pointes et toutes contenues dans le plan de cette section; on enfonce avec précaution les tiges jusqu'à ce qu'elles affleurent la veine sans y pénétrer, puis on arrête l'écoulement; les pointes des tiges dessinent alors la section, qu'on peut relever à loisir. La position de la section minimum se détermine par tâtonnement. On arrive ainsi à trouver Ω, et A étant connu par une mesure faite sur le réservoir, on en conclut le rapport $\frac{\Omega}{A}$.

Les expériences dont on vient de donner une idée ont été d'abord exécutées sur des orifices circulaires, avec des diamètres variant de $0^m,02$ à $0^m,16$. Divers hydrauliciens ont constaté : 1° que la section contractée, de forme également circulaire, se trouve à une distance de l'orifice à peu près égale au rayon de l'aire Ω; 2° que le rapport de ce rayon à celui de l'orifice est environ 0,79, d'où résulterait

$$\frac{\Omega}{A} = (0,79)^2 = 0,624.$$

Ainsi le coefficient de contraction aurait, dans ce cas, une valeur très voisine de $\frac{5}{8}$. Au reste, ce n'est là qu'une moyenne dont les observations peuvent s'écarter un peu, en plus ou en moins; il est difficile de croire que le rapport $\frac{\Omega}{A}$ soit absolument constant et ne dépende en rien ni du rayon de l'orifice, ni de sa situation sur la surface du réservoir, ni enfin d'aucune des nombreuses circonstances secondaires par lesquelles une expérience diffère d'une autre.

Quand l'orifice n'est pas circulaire, on admet encore comme valeur approximative du rapport $\frac{\Omega}{A}$ le nombre 0,62; mais alors les erreurs peuvent devenir assez notables. En 1827, Poncelet et Lesbros ont fait le relevé d'une veine d'eau s'écoulant dans l'air par un orifice carré de $0^{m},20$ de côté, dont le centre était à $1^{m},68$ au-dessous du niveau dans le réservoir; ils ont trouvé $\frac{\Omega}{A} = 0,56$. A la vérité, le colonel Lesbros ayant repris la même expérience quelques années plus tard, avec les précautions les plus minutieuses pour la rendre très exacte, a trouvé $\frac{\Omega}{A} = 0,58$; mais ce dernier nombre, quoique plus rapproché de la moyenne 0,62, en diffère encore de $\frac{1}{15}$ de sa valeur. Dans une autre expérience du même observateur, sur un orifice de forme différente, le rapport en question a été 0,64.

La véritable valeur de la section contractée reste donc en somme quelque peu incertaine dans la plupart des cas. Pour la connaître avec plus d'exactitude, il faudrait avoir à sa disposition des données expérimentales plus complètes que celles qui existent.

Au surplus on a beaucoup moins d'intérêt, quand on s'occupe de mécanique usuelle, à connaître la figure et les dimensions de la veine, qu'à pouvoir calculer une autre quantité dont nous allons parler maintenant : c'est le volume constant qui s'écoule dans chaque unité de temps et auquel on a donné le nom de *dépense* ou de *débit*. Soient (*fig.* 303)

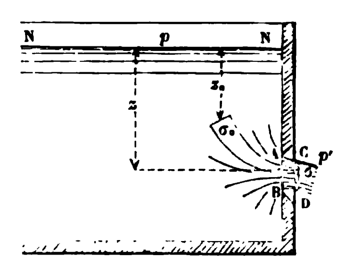
AB l'orifice;

CD la section contractée;

NN le niveau du liquide dans le réservoir.

Considérons un filet liquide qui aurait une section σ_0 dans le réservoir, à quelque distance de l'orifice, et qui couperait la section contractée suivant un élément σ de celle-ci. Nommons

Fig. 303.



V et V_0 les vitesses des molécules qui traversent les sections σ, σ_0;
z et z_0 les hauteurs des éléments σ, σ_0 au-dessous du niveau NN;
p et p' les pressions du liquide au niveau NN et autour de la veine;
Π le poids par unité de volume du liquide.

Le volume liquide qui traverse σ dans le temps dt est un prisme droit de base σ et de hauteur $V\,dt$; ce volume a donc pour valeur $\sigma V\,dt$. Donc le volume total écoulé dans le temps dt sera

$$dt\Sigma\sigma V,$$

la somme Σ devant s'étendre à tous les éléments σ de la section contractée. Dans chacun des éléments dt qui composent le temps 1, il s'écoulera le même volume; donc le débit s'exprimera par

$$dt\Sigma\sigma V \times \frac{1}{dt} \quad \text{ou} \quad \Sigma\sigma V.$$

Pour calculer le débit, il faut donc d'abord calculer la vitesse V aux divers points de CD.

A cet effet, nous nous servirons du théorème de D. Bernoulli (n° 274), et nous égalerons la différence $\frac{V^2 - V_0^2}{2g}$ à la charge h entre les sections σ_0 et σ. Comme la pression dans

le réservoir varie suivant la loi hydrostatique, la pression sur σ_0 est $p + \Pi z_0$, et le niveau piézométrique correspondant s'élève à la hauteur $\frac{p}{\Pi}$ au-dessus de NN, soit à la hauteur $z + \frac{p}{\Pi}$ au-dessus de σ; la pression étant d'ailleurs p' dans la veine à partir de CD, le niveau piézométrique en σ s'élève à la hauteur $\frac{p'}{\Pi}$ au-dessus de cet élément; donc la charge est $z + \frac{p - p'}{\Pi}$, et comme V_0 est insensible, suivant une remarque faite plus haut, on peut poser simplement

$$(1) \quad \frac{V^2}{2g} = z + \frac{p - p'}{\Pi} \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{2g\left(z + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

Cette formule s'énonce en disant que *la hauteur due à la vitesse dans un élément de la section contractée est égale à la charge* $z + \frac{p - p'}{\Pi}$ *sur cet élément*. La quantité $z + \frac{p - p'}{\Pi}$ à laquelle on donne ici le nom de *charge* est l'abaissement du niveau piézométrique en passant de l'intérieur du réservoir à l'élément σ dont il s'agit; le point de départ est d'ailleurs indifférent, pourvu qu'on ne le prenne pas trop près de l'orifice; car alors le niveau piézométrique y sera toujours le même.

Dans le cas assez ordinaire où les pressions p et p' sont celles d'une même atmosphère gazeuse, la différence $\frac{p - p'}{\Pi}$ devient généralement négligeable en comparaison de z, et la formule (1) donne

$$V = \sqrt{2gz},$$

résultat connu sous le nom de *théorème de Torricelli*. Il exprime que la vitesse de sortie est égale à celle d'un point pesant qui serait tombé librement d'une hauteur z, sans vitesse initiale.

Supposons maintenant que la hauteur z, variable avec la position de l'élément σ dans la section contractée, n'ait que des écarts peu importants au-dessus et au-dessous de sa va-

leur moyenne z_1, répondant au centre de gravité de CD, ce qui arrivera quand la hauteur de l'orifice AB sera notablement moindre que la distance de son centre au niveau NN. Alors, en attribuant aux vitesses des divers filets, dans leur passage à travers CD, la valeur commune

$$V_1 = \sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

on commettra sur les produits σV de petites erreurs tantôt positives, tantôt négatives, qui se compenseront partiellement quand on cherchera $\Sigma\sigma V$, et ne pourront jamais entraîner une erreur bien considérable dans le résultat. On pourra donc poser, en nommant Q le débit,

$$Q = \Omega V_1 = \Omega \sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

On a soumis cette formule à des vérifications expérimentales qui ont démontré son exactitude très satisfaisante, et prouvent par conséquent que nous avons calculé la vitesse de sortie du liquide sans nous écarter beaucoup de la vérité; toutefois on est exposé à commettre, sur cette vitesse, des erreurs relatives variables, suivant les circonstances, entre zéro et $\frac{2}{100}$ ou $\frac{3}{100}$.

Habituellement on ne connaît pas Ω à titre de donnée immédiate; on déduit l'aire de la section contractée de celle de l'orifice, laquelle est au contraire définie; on pose, en appelant m' le coefficient de contraction convenable pour le cas où l'on se trouve,

$$\Omega = m'A.$$

D'autre part, on ne connaît pas non plus z_1, mais on admet qu'il diffère peu de l'ordonnée analogue z_2 pour le centre de gravité de l'orifice AB, et qu'on peut prendre en conséquence pour expression de la vitesse moyenne V_1 dans la section contractée

$$V_1 = m'' \sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

en désignant par m'' un coefficient peu éloigné de l'unité, destiné à corriger toutes les petites erreurs qu'on a commises dans l'évaluation de V_1, par suite des imperfections de la théorie. On aurait alors

$$Q = m'm''A\sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

ou plus simplement, en représentant par m le produit $m'm''$,

$$(2) \qquad Q = mA\sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

Les anciens auteurs avaient donné le nom de *dépense théorique* à l'expression $A\sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}$, parce que leur théorie ne tenait pas compte de la contraction de la veine; en conséquence, on a nommé *coefficient de dépense* le nombre m, rapport de la dépense réelle à la dépense théorique. D'après les explications qui viennent d'être données, le coefficient de dépense m diffère peu du coefficient de contraction m'; dans le langage et dans l'usage on les confond souvent, ce qui n'a pas pratiquement beaucoup d'inconvénients.

On peut évaluer directement par expérience le coefficient m, en recevant le volume écoulé dans un bassin de forme simple; on constate les élévations successives du niveau de ce bassin, à des époques déterminées, et l'on en déduit le volume de liquide qu'il reçoit dans chaque seconde, c'est-à-dire la valeur de la dépense effective Q. La dépense dite théorique se calcule ensuite au moyen des données A, z_1, p, p', Π, et le rapport de Q avec cette dépense fictive fait connaître m. On possède des recueils d'expériences donnant sur ce sujet de nombreuses indications; quand il s'agit de calculer le débit d'un orifice en mince paroi débouchant librement dans l'air, on y prend la valeur de m pour la disposition qui paraît se rapprocher le plus de celle qu'on a en vue, et l'on applique alors la formule (2).

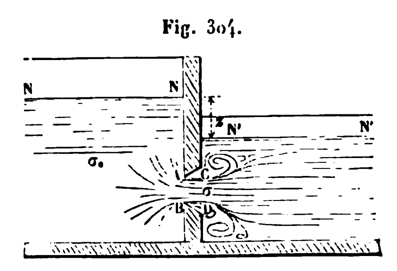
Parmi les recueils les plus étendus, on peut citer celui du colonel Lesbros, concernant particulièrement le cas des orifices rectangulaires. Faute d'avoir à sa disposition les Tableaux

déduits de ces expériences ou autres analogues, on peut simplement faire $m = 0,62$; mais alors il est évident qu'il faudra, en général, se contenter d'une approximation plus ou moins grossière.

Nous allons maintenant passer en revue diverses variantes de la disposition d'orifice que nous avons considérée jusqu'à présent.

279. *Orifice en mince paroi établi entre deux réservoirs.* — Ce cas diffère du précédent en ce que la veine sortant par l'orifice ne s'écoule pas librement dans un gaz, mais est reçue dans un second réservoir également à niveau constant N'N' (*fig.* 304); ce niveau doit dépasser sensiblement le bord

Fig. 304.



supérieur de l'orifice AB. Les choses étant ainsi disposées, il se forme encore une veine contractée, jusqu'à la section minimum CD, où les filets sont devenus parallèles; depuis l'intérieur du réservoir alimentaire jusqu'à cette section CD, on peut admettre avec quelque vraisemblance que les filets se sont mus, comme dans le cas précédent, sans frottement notable les uns sur les autres, et en conservant à peu près les mêmes formes, à égalité d'immersion de l'orifice AB au-dessous de NN; en arrière de AB, il n'y aurait pas non plus de vitesse sensible, pour peu qu'on s'éloignât du point de sortie des molécules liquides. Au delà de CD les filets perdent assez vite leur parallélisme ainsi que leur vitesse; la veine est entourée d'un liquide qui tournoie lentement, en formant ce qu'on nomme un *remou,* et au-dessus se trouve du liquide à peu près stagnant.

Voyons maintenant comment on pourrait calculer théori-

quement la vitesse V avec laquelle un filet liquide $\sigma_0\sigma$ traverse l'élément σ de la section CD. Pour cela nous remarquerons qu'en passant de σ au point supérieur C de CD, la pression varie suivant la loi hydrostatique (nº 277, quatrième règle), à cause du parallélisme des filets dans cette section; il en est de même quand on remonte de C au niveau N'N', en raison de la lenteur des mouvements (nº 277, deuxième règle). Donc, si l'on nomme p' la pression en N'N' et z' la hauteur verticale entre N'N' et σ, la pression du liquide aux environs de cet élément sera $p' + \Pi z'$, et le niveau piézométrique correspondant s'élèvera au-dessus de N'N' à la hauteur $\frac{p'}{\Pi}$. D'un autre côté on verrait, comme au nº 278, que le niveau piézométrique en σ_0 dépasse NN de la hauteur $\frac{p}{\Pi}$, qui représente en colonne liquide la pression au niveau du bassin alimentaire; par suite, la charge entre σ_0 et σ a pour valeur $z + \frac{p - p'}{\Pi}$, quelle que soit la position de σ dans la section CD. L'application du théorème de D. Bernoulli (nº 274) donnerait alors, la vitesse V_0 en σ_0 étant toujours supposée négligeable,

$$\frac{V^2}{2g} = z + \frac{p - p'}{\Pi},$$

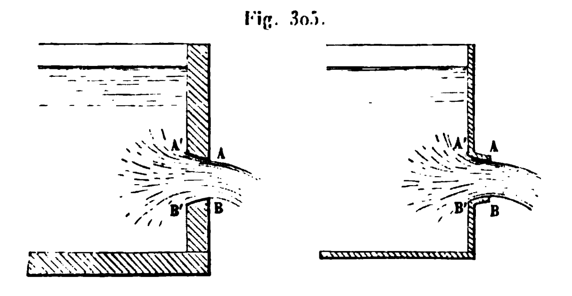
expression tout à fait pareille à la formule (1) du nº 278, à part cette différence que z désigne maintenant la hauteur entre les niveaux des deux bassins et p' la pression sur le niveau du bassin de dégorgement, tandis que ces lettres avaient une autre signification au nº 278. Au reste, il est évident que l'on pourrait conserver ici l'ancienne signification de z, et appeler p' la pression sur l'élément σ, car alors z et $\frac{p'}{\Pi}$ augmenteraient tous deux de la même quantité, et la valeur de la vitesse ne changerait pas.

Après avoir calculé par cette formule la vitesse dans la section contractée, on en ferait le produit par l'aire A de l'orifice AB, et l'on aurait ainsi la dépense dite théorique AV. Il resterait à la multiplier par un coefficient de dépense m toujours assez voisin de 0,62; car, puisque la présence du liquide

autour de la veine n'exerce pas une influence notable sur la forme des filets dans la partie qui précède CD, la contraction s'opère comme lorsque l'écoulement se produit dans un gaz; et c'est là, comme on l'a vu, ce qui a l'influence dominante dans la détermination de m. Les expérimentateurs se sont, d'ailleurs, peu occupés de ce cas des veines noyées. Il semble qu'on pourrait se servir des valeurs qu'ils ont trouvées pour les coefficients de dépense, en supposant que l'écoulement se fasse à l'air libre, avec le même orifice et la même hauteur du niveau NN au-dessus de cet orifice; mais ce n'est là qu'une induction sans preuves bien certaines.

280. *Orifices parfaitement ou imparfaitement évasés.* — L'orifice AB (*fig.* 305), dont l'aire a été désignée par A aux nos 278 et 279. peut être précédé d'un évasement intérieur, ainsi que le représente la figure. Si le conduit ABA'B' reçoit

Fig. 305.



à peu près la forme et les dimensions d'une veine contractée ayant AB pour section minimum, les choses se passeront à peu près comme si A'B' était un orifice en mince paroi, sauf la faible influence retardatrice due au frottement du conduit. Dans ce cas, l'aire A de l'orifice AB devient en même temps celle de la section contractée, de sorte que le coefficient de contraction est alors égal à 1, et que la dépense diffère peu du produit $A\sqrt{2g\left(z_2+\frac{p-p'}{\Pi}\right)}$, les notations sous le radical conservant le sens défini au n° 278. L'écart proportionnel ne doit probablement atteindre que quelques centièmes, et en effet, dans diverses expériences de Michelotti et de d'Au-

buisson (dont quelques-unes exécutées sur une assez grande échelle), le rapport de la dépense effective à l'expression précédente a été trouvé voisin de 0,980. Cependant, comme il est difficile de réaliser bien exactement la figure d'une veine contractée dans l'évasement ABA'B', on agira prudemment en comptant d'une manière générale sur une réduction un peu plus grande, de 6 à 8 centièmes par exemple.

L'orifice peut être plus ou moins bien évasé, de manière à donner une dépense moindre qu'avec l'évasement parfait, mais supérieure à celle de l'orifice en mince paroi.

Par exemple, si une ouverture rectangulaire AB (*fig.* 306) est établie en mince paroi, on augmentera sa dépense au moyen d'une plaque BC qui prolongerait un de ses côtés vers l'intérieur du réservoir; on conçoit en effet que les filets liquides qui glissent sur le plan BC arriveront à leur point de sortie avec des vitesses normales à AB, ce qui diminuera la contraction de la veine. Suivant qu'une portion plus ou moins grande de l'orifice est ainsi prolongée au dedans, le coefficient de dépense peut varier de 0,62 à 0,73 environ. D'après Bidone, quand l'orifice est rectangulaire, on aurait, pour déterminer la valeur m de ce coefficient, la formule

Fig. 306.

$$m = 0,62\left(1 + 0,152\frac{N}{P}\right),$$

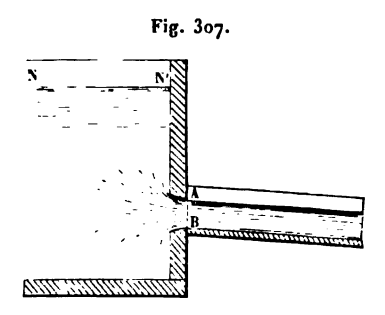
dans laquelle P désigne le périmètre de l'orifice, et N la longueur de la partie prolongée intérieurement. On comprend d'ailleurs que la fraction $\frac{N}{P}$ ne peut pas trop se rapprocher de l'unité; car à cette limite l'ensemble des plans BC formerait un tuyau, et la loi de l'écoulement serait grandement modifiée, comme on le verra plus loin. On doit supposer $N < 0,75P$.

Le colonel Lesbros a contesté la formule ci-dessus, déduite par Bidone d'un petit nombre d'expériences. Il admet bien que m dépend du rapport $\frac{N}{P}$, mais il ajoute que, à égalité de ce rapport, l'augmentation de dépense est plus grande quand

la base est au nombre des côtés privés de contraction que lorsqu'elle en est exclue. Il n'a pas d'ailleurs cru devoir proposer une nouvelle formule; il s'est borné, comme dans le cas des orifices rectangulaires, à donner des tableaux fournissant les diverses valeurs de m à employer, suivant le dispositif particulier de chaque écoulement.

281. *Orifice avec évasement intérieur, prolongé extérieurement par un canal découvert de même section.* — On suppose un orifice AB évasé en dedans, comme l'indique la *fig.* 307;

Fig. 307.



puis, à la suite, un canal de faible pente, découvert à sa partie supérieure et présentant une section constante qui reproduit, au fond et sur les côtés, celle de l'orifice; les filets fluides arriveront donc en AB avec des vitesses parallèles et sensiblement normales à ce plan, et nous admettons qu'ils conserveront dans le canal un mouvement à peu près rectiligne et uniforme, ce qui aura lieu effectivement si la pente n'est pas trop prononcée. Avec cette disposition, la pression dans la veine n'est plus constante et égale à la pression atmosphérique, comme lorsque l'écoulement a lieu librement dans un gaz; mais elle varie suivant la loi hydrostatique (nº 277, quatrième règle), du moins quand on se borne à considérer ses valeurs pour les divers points d'une même section transversale. Le niveau piézométrique sera donc le même pour tous les points de la section contractée AB; ce sera celui du point supérieur A relevé de la hauteur $\frac{p'}{\Pi}$ représentant la pression p' de l'atmosphère en contact avec le canal. En second lieu,

nous avons déjà reconnu (n° 278) que, pour tout point pris dans l'intérieur du réservoir, à une distance notable de l'orifice, le niveau piézométrique est au-dessus de celui du réservoir, à la hauteur $\frac{p}{\Pi}$ représentative de la pression p exercée en NN sur la surface libre. Donc, si l'on désigne par z la distance verticale du point A au niveau NN, la charge entre le point de départ d'une molécule et le point où elle traverse le plan AB sera toujours $z + \frac{p - p'}{\Pi}$; la vitesse étant encore supposée négligeable dans le réservoir, on obtiendra, par l'emploi du théorème de D. Bernoulli (n° 274), la vitesse V en un point quelconque de AB toujours égale à $\sqrt{2g\left(z + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}$.

Ainsi l'influence du canal se fait sentir en ce que, dans le calcul de la vitesse moyenne, et par suite de la dépense, il faut introduire la hauteur z du niveau NN au-dessus du point le plus élevé de l'orifice, au lieu de la hauteur z_2 de ce même niveau NN en dessus du centre de gravité de la surface AB. La présence du canal tend donc à diminuer le débit; et cela est tout naturel, car c'est une espèce d'obstacle apporté au mouvement du liquide. Il en résulte en chaque point de AB une pression opposée à la sortie des filets et qui dépasse la pression p', tandis que cette pression résistante serait réduite à p' si le canal n'existait pas.

282. *Écoulement par un déversoir.* — On donne le nom de *déversoir* à des orifices découverts à leur partie supérieure, et dont le bord inférieur est une droite horizontale appelée *seuil.* Les bords latéraux sont généralement des droites verticales, de sorte que l'orifice peut être considéré comme un rectangle dont on aurait enlevé le côté supérieur; l'assimilation serait d'ailleurs évidemment toujours permise dans le cas où le seuil aurait une grande longueur comparativement à l'épaisseur de la nappe liquide qui coule au-dessus.

Nous allons d'abord considérer l'orifice rectangulaire formé par le déversoir comme un de ceux auxquels seraient applicables les indications du n° 278; pour cela il faut supposer que la section de la veine par le plan vertical du seuil soit un

petit orifice rectangulaire en mince paroi, assez éloigné du fond et des parois latérales du réservoir alimentaire pour que le phénomène de la contraction s'y produise sur tout le contour de la veine. Nous calculerons la dépense au moyen de la formule (2). Soient

L la longueur du seuil;
y la distance verticale du seuil au niveau du réservoir, en un point où le liquide serait sensiblement stagnant;
η l'épaisseur de la veine liquide au-dessus du seuil;
Q la dépense par seconde.

L'écoulement est supposé se produire librement dans l'air ou dans un gaz quelconque : donc ici les pressions désignées par p et p', aux nos 278 et suivants, sont égales entre elles. D'autre part, le centre de gravité de l'orifice est à la hauteur $\frac{1}{2}\eta$ au-dessus du seuil, et l'on a $z_1 = y - \frac{1}{2}\eta$; enfin l'aire A est $L\eta$. Donc la formule (2) donne

$$Q = mL\eta\sqrt{2g\left(y - \frac{1}{2}\eta\right)}.$$

Dans cette expression le coefficient de contraction m et l'épaisseur η de la veine sont des inconnues auxiliaires qu'il n'est pas encore possible de déterminer théoriquement. En ce qui concerne η, nous savons seulement que cette dimension est inférieure à y; car, s'il en était autrement, les molécules des filets situés à la surface devraient passer du repos à une vitesse finie sous une charge nulle ou négative, ce qui est impossible d'après le théorème de D. Bernoulli (n° 274); l'expérience apprend que le rapport $\frac{\eta}{y}$ ne descend guère au-dessous de 0,72, et, puisqu'il ne peut dépasser 1, nous le supposerons égal à la moyenne 0,86 entre ces limites. Quant à m, on a vu (n° 278) qu'il varie peu avec l'immersion et la grandeur de l'orifice; on peut donc lui attribuer la valeur moyenne 0,62. L'expression précédente de Q devient ainsi

$$Q = 0,62 \times 0,86 Ly\sqrt{2g \times 0,57y}$$

ou plus simplement

(3) $$Q = 0,403 L y \sqrt{2gy},$$

en effectuant le produit $0,62 \times 0,86 \times \sqrt{0,57}$.

Quoique ce calcul repose sur des évaluations approximatives, la formule (3), qui est son résultat final, s'écarte assez peu de la vérité. Si l'on pose, pour exprimer le débit Q d'un déversoir pouvant se ranger dans la catégorie des petits orifices en mince paroi, la relation

$$Q = r L y \sqrt{2gy},$$

r étant un coefficient à déterminer dans chaque cas, les expériences de Poncelet et Lesbros sur un déversoir de $0^m,20$ de largeur horizontale nous apprennent que r varie avec y, entre 0,424 et 0,385, lorsque y croît de $0^m,01$ à $0^m,22$; ce coefficient n'est donc pas rigoureusement constant, mais ses valeurs extrêmes dans les expériences dont nous parlons n'ont avec la moyenne qu'une différence proportionnelle de 0,05 environ, en plus ou en moins, et cette moyenne diffère bien peu du nombre 0,403 auquel nous a conduit l'aperçu théorique donné plus haut.

Lorsque le seuil du déversoir, toujours supposé en mince paroi, occupe toute la largeur d'un bassin, la contraction latérale n'existe plus. Il faut alors adopter une plus grande valeur de r et poser, dans le cas où $\frac{y}{L}$ ne dépasse pas $\frac{1}{3}$,

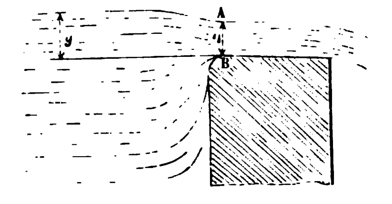
(4) $$Q = 0,45 L y \sqrt{2gy}.$$

Il est bien difficile de tenir compte, même approximativement, de toutes les circonstances capables d'influer sur la valeur de r; on ne peut choisir celle qui convient dans chaque cas sans consulter les recueils d'expériences.

Nous allons maintenant nous occuper des déversoirs qui ne seraient plus en mince paroi. Voici un cas particulier assez remarquable où la théorie peut donner une limite supérieure du coefficient r et la valeur correspondante de η. C'est celui où le seuil B du déversoir (*fig.* 308), raccordé par un évasement avec le bassin alimentaire, est suivi par un canal in-

cliné de faible pente, dans lequel le liquide prend un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme. Alors on prouvera, par les mêmes raisonnements qu'au n° **281**, que la

Fig. 308.



vitesse de tous les filets dans leur passage à travers la section AB est $\sqrt{2g(y-\eta)}$, et comme l'évasement a supprimé toute contraction au delà, la dépense Q sera donnée par l'équation

$$Q = L\eta\sqrt{2g(y-\eta)}.$$

Lorsque L et y restent invariables, Q n'est plus fonction que de η, et l'on en trouve sans peine le maximum. On a, en effet,

$$\frac{Q^2}{2gL^2} = \eta^2(y-\eta);$$

le maximum du second membre, et par suite de Q, répond à la valeur de η pour laquelle

$$\frac{\eta}{y-\eta} = 2,$$

ce qui donne $\eta = \frac{2}{3}y$ et le maximum cherché

$$(5)\quad Q' = \frac{2}{3}Ly\sqrt{2g \times \frac{1}{3}y} = \frac{2}{3\sqrt{3}}Ly\sqrt{2gy} = 0,385\,Ly\sqrt{2gy}.$$

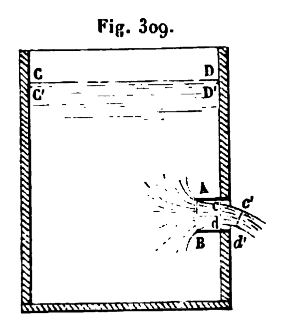
Ainsi la limite supérieure du débit, dans les circonstances dont il s'agit, est $0,385\,Ly\sqrt{2gy}$ et répond à $\eta = \frac{2}{3}y$.

Dans la pratique, les hypothèses de la théorie n'étant jamais complètement réalisées, on obtient, en général, un débit moindre que la limite Q'. D'après les expériences de

M. Castel et celles du colonel Lesbros, on devrait remplacer le nombre 0,385 par un nombre variable, dont la valeur moyenne serait dans les environs de 0,35 ou 0,36.

283. *Ajutage rentrant.* — Ce cas est cité ici à cause de son intérêt théorique, plutôt que pour les applications qu'on pourrait en faire; c'est le seul où l'on ait pu réussir à déterminer un coefficient de contraction par un calcul satisfaisant et assez simple, sans recourir aux données expérimentales. L'orifice par lequel le liquide s'écoule, au lieu d'être en mince paroi, se présente sous la forme d'un cylindre pénétrant dans l'intérieur du réservoir, comme l'indique la *fig.* 309. Ce cylindre doit être mince et avoir une longueur comprise dans de justes limites; car, s'il était trop court, son influence tendrait à s'annuler; s'il était trop long, sa paroi intérieure serait mouillée, ce que nous ne supposerons pas dans l'analyse qui va suivre. On peut prendre une longueur comprise entre une fois et une fois et demie le diamètre.

Fig. 309.



Supposons toujours le mouvement permanent établi; une section contractée cd s'est formée un peu en avant de l'orifice AB, et au delà de cd la veine jaillissant dans un gaz de pression p' affecte la forme parabolique; dans l'intérieur du réservoir il n'y a pas de mouvement appréciable; la pression, d'abord égale à p dans le plan de la surface libre CD, varie suivant la loi hydrostatique à mesure qu'on descend dans le liquide, et cela est ainsi notamment tout le long des parois du réservoir, car, en raison de l'ajutage, il y a toujours une distance notable entre ces parois et l'orifice AB.

Cela posé, appliquons le théorème général des quantités de mouvement projetées (n° 199) au système matériel formé de tout le liquide compris dans le réservoir à une certaine époque, et au dehors jusqu'à la section oi. Pendant un temps dt, ce système, occupant d'abord la position CDcd, se transporte dans la position nouvelle C'D'$c'd'$; mais comme, en

raison de la permanence, la partie commune $C'D'cd$ possède la même quantité de mouvement au commencement et à la fin de dt, l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sera égal à la quantité de mouvement projetée appartenant à la tranche finale $cdc'd'$, moins celle de la tranche initiale $CDC'D'$. Si nous projetons sur l'axe du cylindre, que nous supposerons horizontal, pour fixer les idées, la quantité de mouvement de $cdc'd'$ se projette en vraie grandeur et son expression est

$$(6) \qquad \frac{\Pi}{g}\,\Omega V^2\,dt,$$

en conservant le sens des notations défini au n° **278**; en effet, $\Omega V dt$ exprime le volume $cdc'd'$, son produit par $\frac{\Pi}{g}$ en est la masse, qui, multipliée par la vitesse, donne la quantité de mouvement. Quant à la quantité de mouvement projetée de $CDC'D'$, elle est négligeable pour deux raisons : 1° on projette sur un axe horizontal et les points de CD doivent descendre verticalement ou à peu près; 2° la masse de $CDC'D'$ est la même que celle de $cdc'd'$, parce qu'en ajoutant à chacune de ces deux masses celle de la partie $C'D'cd$, on retrouverait la masse totale du système matériel considéré; et d'un autre côté la vitesse est très petite relativement à V dans le réservoir, d'où il résulte qu'il en est de même pour la quantité de mouvement de la tranche initiale, en comparaison de celle que nous avons calculée tout à l'heure. Ainsi l'expression (6) représente l'accroissement total de la quantité de mouvement du système, en projection sur l'axe de l'ajutage.

Il faut maintenant chercher la somme des impulsions élémentaires des forces extérieures projetées sur le même axe. La pesanteur ne produisant que des forces perpendiculaires à l'axe, on n'a pas à en tenir compte, et il ne faut avoir égard qu'aux pressions exercées sur tout le contour du système. Nous distinguerons trois parties dans leur ensemble total. 1° Celles qu'exerce l'ajutage par sa face cylindrique extérieure sont normales à l'axe et disparaissent en projection; d'ailleurs, vu le peu d'étendue de la surface annulaire plane entourant l'orifice AB et formant la coupe transversale du

cylindre creux, on néglige les pressions sur cette surface. 2° Les pressions sur toute la surface du réservoir suivent la loi hydrostatique; leur résultante serait verticale (n° **266**) et donnerait une projection nulle si l'ajutage était supprimé et remplacé par une paroi solide A_1B_1, d'étendue égale à la section de cet ajutage; donc la projection de la résultante est égale et contraire à la pression qu'exercerait la paroi fictive A_1B_1, et son intensité évaluée dans le sens de la vitesse V s'exprime par

$$(\Pi z_2 + p)A,$$

en désignant par A la section de l'orifice AB, z_2 la hauteur de son centre au-dessous du niveau CD de la surface libre et Π le poids de l'unité de volume du liquide. 3° La portion de veine située entre l'orifice AB et la section contractée *cd* supporte sur sa surface latérale la pression p' d'une atmosphère gazeuse, qui se fait sentir également dans la section *cd* (n° **277**, troisième règle); la résultante des pressions serait nulle (n° **266**) si l'on supposait la pression p' exercée de même sur la base AB du volume A*cd*B, extérieurement à ce volume; donc la pression résultante sur la surface latérale et sur *cd* sera égale et contraire à celle que supporterait la paroi fictive AB, ce qui donne une force $p'A$ en sens contraire de V.

En résumé, l'ensemble des pressions exercées sur tout le contour du système liquide donne une projection sur l'axe de l'ajutage, égale à $(\Pi z_2 + p - p')A$; par suite, le théorème des quantités de mouvement projetées conduit à l'équation

$$\frac{\Pi}{g}\Omega V^2 dt = (\Pi z_2 + p - p')A\,dt,$$

qui peut s'écrire

$$(7) \qquad \frac{\Omega}{A}\frac{V^2}{g} = z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}.$$

D'un autre côté on arriverait, par la répétition des calculs et de raisonnements identiques à ceux du n° **278**, à la relation

$$(8) \qquad \frac{V^2}{2g} = z_2 + \frac{p - p'}{\Pi};$$

on en conclut donc, par la comparaison des deux équations

précédentes, que la valeur de $\frac{\Omega}{A}$ ou du coefficient de contraction est $\frac{1}{2}$ ou 0,50. Ce résultat a été vérifié par une expérience de Borda; il a trouvé $\frac{\Omega}{A} = 0,515$, nombre assez voisin du résultat théorique.

Lorsque l'ajutage n'existe pas et que le liquide s'écoule directement par l'orifice A_1B_1 en mince paroi, la pression sur les parois du réservoir, dans une certaine zone autour de cet orifice, ne doit plus être égale, comme nous l'avons supposé, à la pression hydrostatique, mais doit prendre une valeur moindre et plus rapprochée de la pression p', qui est celle de molécules liquides situées très peu au delà de cette zone. Les pressions qui sont ainsi diminuées agissent sur le liquide en sens contraire de V; donc la résultante que nous avons calculée tout à l'heure se trouvera augmentée, et l'application du théorème des quantités de mouvement nous donnerait l'équation (7) modifiée en ce sens que le second membre devrait se remplacer par une quantité plus grande. On aurait donc

$$\frac{\Omega}{A}\frac{V^2}{g} > z_2 + \frac{p - p'}{\Pi},$$

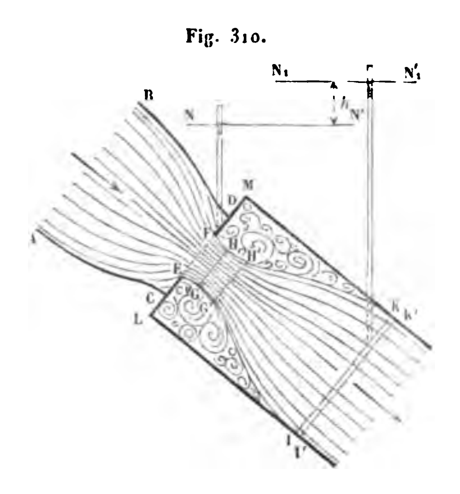
et l'équation (8) permettrait alors de conclure que $\frac{\Omega}{A}$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, mais sans faire connaître la valeur exacte de ce coefficient.

§ II. — Théorie des ajutages extérieurs, servant à l'écoulement d'un liquide pesant et homogène.

284. *Lemme relatif à l'effet produit par un élargissement brusque de section dans un conduit fermé.* — On suppose un liquide pesant et homogène qui coule avec un mouvement permanent, dans un conduit solide ABCD (*fig.* 310); ce conduit présente un orifice EF en mince paroi qui débouche dans un espace à section transversale plus grande, de forme à peu près cylindrique sur une certaine longueur, et déjà rempli de

liquide. La veine se contracte jusqu'à la section minimum GH, et conserve jusque-là une figure à peu près identique à celle qui se produirait si l'écoulement se faisait dans un gaz; seulement elle éprouve un certain frottement de la part du liquide ambiant, qui tournoie lentement sur lui-même, en ne participant que fort peu au mouvement général. Au delà de la

Fig. 310.



section contractée, il y a dans l'intérieur même de la veine une agitation assez considérable, qui toutefois se calme progressivement, de sorte que dans une section transversale IK, peu éloignée de GH, les molécules se meuvent avec des vitesses parallèles à l'axe du cylindre. On comprend que dans ce phénomène le liquide soit soumis à des déformations intérieures très notables, et que la viscosité puisse, en conséquence, produire des effets dont il y a nécessité de tenir compte, quand on veut appliquer le théorème de D. Bernoulli à une molécule franchissant l'intervalle des sections GH et IK.

Pour faire usage de ce théorème, il faut savoir évaluer la perte de charge (n° 276) éprouvée par une molécule, ce qui n'est pas possible rigoureusement dans l'état actuel de la science. Nous résoudrons donc la question au moyen d'hypothèses secondaires qui la simplifient et dont l'idée appartient à Belanger.

Il y a tout autour de la veine, dans l'espace annulaire compris entre elle et la surface cylindrique LIKM, un liquide animé de mouvements lents; on peut donc admettre que la pression dans ce liquide varie suivant la loi hydrostatique (n° 277, deuxième règle); la même loi s'applique aussi à la section GH, parce qu'elle est coupée normalement par tous les filets, dont nous supposons en outre la courbure négligeable (n° 277, quatrième règle). Il en résulte que le niveau piézométrique est le même pour tous les points de la surface LEGHFM, et que toutes les colonnes représentatives se termineraient à un même plan horizontal NN′, puisque leurs hauteurs diffèrent de quantités égales aux différences de niveau de leurs points de départ inférieurs (n° 261). Dans la section IK, la pression varie également suivant la loi hydrostatique, en vertu de la même raison que pour la section GH, et le niveau piézométrique pour tous les points de IK serait celui d'un autre plan horizontal $N_1N'_1$. Cela une fois admis, toute difficulté disparaît.

Soient, en effet,

h la hauteur inconnue, positive ou négative, dont le niveau $N_1N'_1$ surpasse le niveau NN′;
ζ la perte de charge à déterminer;
V_0 et V les vitesses du liquide en GH et IK, la vitesse étant supposée la même pour tous les filets dans chacune de ces deux sections;
Π le poids de l'unité de volume du liquide;
S l'aire de la section droite IK ou LM du cylindre.

Si, comme le représente la figure, *h* est positif, la charge entre les sections GH et IK sera $-h$ (n° 274), et le théorème de D. Bernoulli (n° 276) donnera

$$(1) \qquad \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = -h - \zeta,$$

d'où l'on tirera ζ quand on aura trouvé *h* par un moyen quelconque. A cet effet, on appliquera le théorème des quantités de mouvement projetées (n° 199) au système matériel formé par le liquide compris à un certain instant dans le volume HGELIKMFH, différence entre le cylindre LIKM et le volume

EFGH. Dans un temps infiniment petit dt, une tranche GHG'H' de liquide entre dans le volume primitif du système considéré et une tranche IKI'K' en sort; en raison de la permanence, la partie comprise entre G'H' et IK, commune aux deux positions du système au commencement et à la fin du temps dt, possède la même quantité de mouvement, parce qu'elle est remplie de masses égales animées des mêmes vitesses; donc on aura l'accroissement de la quantité de mouvement projetée, en calculant la différence entre les quantités de mouvement projetées qui appartiennent aux tranches IKI'K' et GHG'H'. Ces deux tranches ont un même volume $S \times \overline{II'}$ ou $SV\,dt$, car, ainsi qu'on l'a déjà dit plusieurs fois, ce volume, ajouté à celui de la partie commune, doit reproduire le volume constant du système dans ses deux positions; la masse correspondante est, par suite, $\frac{\Pi}{g} SV\,dt$, et la différence des quantités de mouvement est

$$\frac{\Pi}{g} SV\,dt(V - V_0).$$

C'est aussi l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur l'axe du cylindre, parce que les vitesses V et V_0 sont supposées avoir même direction que cette ligne.

Il faut égaler l'expression précédente à la somme des impulsions des forces extérieures, projetées sur le même axe, ou à la somme des projections des mêmes forces, multipliée par dt. Or cette somme de projections se détermine fort simplement par le raisonnement que voici. Concevons d'abord que l'enveloppe HGELIKMFH soit solidifiée et remplie d'un liquide en équilibre, dont le niveau piézométrique s'élèverait partout à la hauteur NN'; alors, en vertu des conditions générales de l'équilibre (n° 129), la somme des projections des forces extérieures agissant sur le liquide doit être nulle, quel que soit l'axe sur lequel on projette. Revenons maintenant à la réalité et considérons le liquide en mouvement qui remplit, au commencement du temps dt, l'espace HGELIKMFH. Les forces extérieures à prendre en compte, dans l'état de mouvement comme dans celui de repos, sont le poids et les pressions sur toute la surface limitative. Or le poids reste le

même dans les deux cas; on peut en dire autant des pressions sur la surface LEGHFM, dont les hauteurs représentatives n'ont pas varié. Sur la surface latérale du cylindre, les pressions ont pu subir une certaine altération, mais cela est indifférent quand il s'agit de calculer la somme des projections sur l'axe du cylindre, parce qu'elles sont normales à cet axe et donnent des projections nulles. Donc la projection totale dont nous avons besoin serait encore nulle dans l'état de mouvement, si le niveau $N_1N'_1$ coïncidait avec NN'; mais, attendu que le premier dépasse le second d'une hauteur h, cela produit sur la section IK une pression excédante $\Pi S h$ en sens contraire des vitesses V_0, V, qui est égale à la résultante des forces extérieures projetée sur la direction LI. Donc enfin le théorème des quantités de mouvement projetées donne, après suppression du facteur $\Pi S\,dt$, l'équation

$$(2) \qquad \frac{V(V-V_0)}{g} = -h.$$

L'élimination de h entre les équations (1) et (2) donne ensuite

$$(3) \qquad \zeta = \frac{(V_0-V)^2}{2g};$$

ce qu'on traduit en langage ordinaire en disant que *la perte de charge produite par un élargissement brusque de section dans un conduit fermé a même valeur que la hauteur due à la diminution de vitesse.*

Il pourrait se faire que l'orifice EF fût précédé d'un évasement qui rendrait les filets parallèles et normaux au plan EF; dans ce cas, il y aurait coïncidence entre EF et la section contractée GH. Mais cela laisserait parfaitement subsister la démonstration précédente, car la distance entre les deux sections dont il s'agit n'y joue aucun rôle. La formule (3) serait donc encore applicable, avec cette seule différence que V_0 y désignerait la vitesse dans la section même de l'orifice EF.

La formule (3) se met encore sous une autre forme. Nommons m le coefficient de contraction (n° 278) de la veine sortant par EF, et A l'aire de cet orifice. L'égalité des volumes de liquide qui traversent dans le même temps dt les sections GH

et IK s'exprime par l'équation

$$mA \times \overline{GG'} = S.\overline{II'}$$

ou, en divisant les deux membres par *dt*,

$$mAV_0 = SV.$$

D'un autre côté, on a, en vertu de la formule (3),

$$\zeta = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2.$$

Si l'on substitue à la place de $\frac{V_0}{V}$ sa valeur déduite de l'équation précédente, il vient

$$(4) \qquad \zeta = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{S}{mA} - 1\right)^2.$$

Le perte de charge ζ se trouve ainsi exprimée en fonction des dimensions du conduit et d'une seule vitesse.

285. *Des ajutages cylindriques.* — Lorsqu'un orifice circulaire pratiqué dans une paroi plane est prolongé au dehors par un tuyau cylindrique, de longueur égale à une ou deux fois le diamètre, il n'y a plus de contraction sensible à la sortie de la veine. Ainsi la dépense Q doit être égale à la vitesse V d'écoulement multipliée par la section A de l'orifice ou du tuyau, c'est-à-dire qu'on a

$$(5) \qquad Q = AV.$$

Mais la vitesse ne reste pas ce qu'elle serait sans la présence de l'ajutage, et elle éprouve, comme on va le voir, une diminution notable. En effet, si nous nommons, comme au § I de ce Chapitre,

z_1 la différence de hauteur entre le centre de gravité de l'orifice et le niveau de la surface libre dans le réservoir;
p la pression par unité superficielle sur cette surface libre;
p' la pression exercée sur la veine à sa sortie, également rapportée à l'unité de surface;
Π le poids de l'unité de volume du liquide;

on sait (nº 278) que, dans le cas où l'écoulement se produit librement dans un gaz par un orifice en mince paroi, la vitesse V s'obtient, à quelques centièmes près, par la formule

$$V = \sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

et que cette même formule reste encore applicable dans le cas examiné au nº 279, lorsque la veine est entourée d'un liquide à peu près stagnant. Au contraire, si l'orifice n'est plus en mince paroi, mais pourvu d'un ajutage cylindrique, l'expérience montre que la vitesse V $\left(\text{ou le quotient } \frac{Q}{A}\right)$ doit être multipliée par un coefficient μ inférieur à l'unité, et qu'on a

$$(6) \qquad V = \mu\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)},$$

le coefficient μ devant prendre une valeur toujours peu différente de 0,82 dans les circonstances habituelles de la pratique. Les expériences connues ont été faites sur l'écoulement, en prenant $z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}$ inférieur à 7^m. On aurait donc en définitive, pour calculer le débit, sous des charges n'excédant pas un certaine limite, la formule

$$(7) \qquad Q = 0{,}82\, A\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

Ces résultats montrent que l'ajutage cylindrique produit une augmentation de dépense, comparativement à l'orifice en mince paroi, puisque le coefficient $0{,}62 = m$, à employer dans ce dernier cas, est remplacé par $0{,}82 = \mu$. L'augmentation est due à la suppression de la contraction de la veine à sa sortie, qui fait plus que de compenser la diminution de la vitesse. Cette diminution prouve d'ailleurs que le liquide doit éprouver une perte de charge. Appliquons, en effet, le théorème de D. Bernoulli généralisé ou l'équation (2) du nº 276 à un filet allant de l'intérieur du réservoir jusqu'à l'extrémité de l'ajutage; on verra, comme au nº 278, que la charge h a moyenne-

ment pour valeur $z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}$, et, comme la vitesse V_0 au point de départ peut être négligée; on trouvera, en appelant ζ la perte de charge,

$$\frac{V^2}{2g} = z_2 + \frac{p-p'}{\Pi} - \zeta.$$

Or la formule (6) nous donne

$$\frac{V^2}{2g} = \mu^2\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right) = \frac{2}{3}\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right),$$

donc on voit, par la comparaison des deux équations précédentes, que la perte ζ est $\frac{1}{3}\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right)$ ou encore $\frac{1}{2}\frac{V^2}{2g}$.

Voici comment la théorie rend compte de ces faits. Le liquide sortant par l'ouverture AB (*fig.* 311) forme une veine qui se contracte jusqu'en *ab*, à une distance égale au rayon de cette dernière section, puis tend à reprendre des dimensions plus grandes (n° 278). Il reste donc dans le tuyau ABCD un espace annulaire tout autour de la veine, lequel est rempli d'air à l'origine du mouvement si l'écoulement a lieu dans l'air. Mais cet air est peu à peu entraîné par le frottement du liquide, et bientôt celui-ci remplit complètement le tuyau. On a donc en *ab* une veine qui débouche dans une section plus grande déjà occupée par le même liquide, d'où résulte une agitation et une perte de charge. Cette perte est exprimée par la formule (4) du n° 284, dans laquelle il faut faire $S = A$, ce qui donne

Fig. 311.

$$\zeta = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2.$$

En appliquant le théorème de D. Bernoulli comme on vient de le dire, on devrait donc poser

$$\frac{V^2}{2g} = z_2 + \frac{p-p'}{\Pi} - \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2,$$

d'où résulterait

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2} \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{\frac{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}}.$$

Lorsqu'on attribue au coefficient de contraction m la valeur 0,62, l'expression de V devient

$$V = 0{,}85\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)};$$

l'expérience ayant donné 0,82 au lieu de 0,85 pour le coefficient du radical, on voit que le calcul théorique nous conduirait à une erreur proportionnelle de $\frac{1}{27}$ en plus. L'erreur serait plus grande sur la perte de charge; on aurait théoriquement

$$\zeta = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right),$$

ce qui conduit, pour $m = 0{,}62$, à la fraction 0,273 de $z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}$, au lieu de la fraction $\frac{1}{3}$ déduite de l'expérience. Ici l'erreur proportionnelle serait de plus de $\frac{1}{6}$.

Il est intéressant de calculer la pression moyenne p'' dans la section contractée ab. Pour cela remarquons d'abord que, si V_1 désigne la vitesse dans cette même section, le volume Q fourni par le réservoir dans chaque unité de temps s'exprimera par mAV_1 et par AV; d'où résulte

$$V_1 = \frac{V}{m}.$$

En raisonnant ensuite comme au n° 278, on verrait que la charge entre le point de départ d'une molécule dans le réservoir et la section contractée a pour valeur $z_2 + \frac{p - p''}{\Pi}$; la perte de charge est d'ailleurs négligeable dans cet intervalle, car

tout semble s'y passer comme dans un écoulement par orifice en mince paroi. L'application du théorème de D. Bernoulli (n° 274) donnerait donc

$$\frac{V^2}{2gm^2} = z_2 + \frac{p - p''}{\Pi}$$

ou, en remplaçant V par sa valeur (6),

$$\frac{\mu^2}{m^2}\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right) = z_2 + \frac{p-p''}{\Pi} = z_2 + \frac{p-p'}{\Pi} + \frac{p'-p''}{\Pi};$$

on déduit de là

$$(8) \qquad \frac{p'-p''}{\Pi} = \left(\frac{\mu^2}{m^2} - 1\right)\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right).$$

Quand on fait $m = 0,62$, $\mu = 0,82$, la fraction $\frac{\mu^2}{m^2}$ prend à très peu près la valeur $\frac{7}{4}$, et l'on trouve

$$(9) \qquad \frac{p'-p''}{\Pi} = \frac{3}{4}\left(z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}\right);$$

on voit par conséquent alors que la pression p'' est inférieure à p' et que la différence des hauteurs représentatives est la fraction $\frac{\mu^2}{m^2} - 1$ ou $\frac{3}{4}$ de la hauteur $z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}$, qui est la charge moyenne entre l'intérieur du réservoir et l'orifice CD.

Ce résultat se trouve confirmé par une expérience remarquable de Venturi. Ayant établi un orifice avec ajutage cylindrique de $0^m,0406$ de diamètre, il a implanté, sur la partie supérieure de l'ajutage, à $0^m,018$ de son origine, un tube recourbé comme un siphon, dont une branche descendait et allait plonger, par son extrémité libre, dans une cuvette contenant de l'eau. Faisant ensuite couler de l'eau par l'ajutage, avec les données

$$z_2 = 0^m,88, \quad p = p' = \text{la pression atmosphérique},$$

il a constaté que l'eau de la cuvette était aspirée et montait dans le tube à $0^m,65$ au-dessus du niveau extérieur. On avait

donc, dans cette expérience,

$$\frac{p' - p''}{\Pi} = 0^m,65,$$

et comme la théorie donnerait, pour la même quantité, la valeur $\frac{3}{4} \times 0^m,88$ ou $0^m,66$, on voit qu'elle est bien d'accord avec les faits observés.

Nous avons dit plus haut que la valeur 0,82 du coefficient μ avait été déduite d'expériences sur l'écoulement de l'eau, dans lesquelles la hauteur ou charge $z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}$ n'atteignait pas 7^m; il en est de même pour les expériences qui ont fait connaître la valeur 0,62 du coefficient de contraction ou de dépense m. Or il est facile d'établir que, si la charge croissait notablement au-dessus de 7^m, il deviendrait bientôt impossible de conserver simultanément les deux valeurs 0,82 et 0,62. On tire en effet de l'équation (9)

$$\frac{p''}{\Pi} = \frac{p'}{\Pi} - \frac{3}{4}\left(z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}\right);$$

or, d'après la définition de la fluidité parfaite, un fluide parfait est incapable de se trouver en état de tension, car l'absence de cohésion amènerait la rupture de la partie tendue; si nous admettons qu'il en soit approximativement de même pour les fluides naturels, nous pourrons dire qu'il doit y avoir réellement pression dans la section ab, et que la valeur trouvée pour p'' doit être positive, ce qui exige la condition

$$(10) \qquad z_2 + \frac{p - p'}{\Pi} < \frac{3}{4}\frac{p'}{\Pi}.$$

Quand il s'agit de l'eau s'écoulant dans l'air atmosphérique, on a $\frac{p'}{\Pi} = 10^m,333$, et la limite que ne doit pas dépasser la hauteur $z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}$ prend la valeur $\frac{4}{3} \times 10^m,333$ ou $13^m,78$ environ.

Au delà de cette limite, on ne connaîtrait plus d'une manière bien certaine les valeurs de m et de μ. Tout ce qu'on

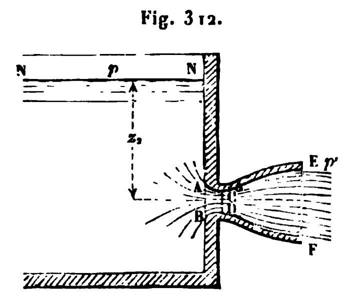
peut dire, c'est que, si un écoulement permanent s'établit, p' devra toujours rester positive et que l'équation (8) donnerait en conséquence

$$\frac{\mu}{m} < \sqrt{1 + \frac{p'}{\Pi z_1 + p - p'}}.$$

A mesure que la charge $z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}$ devient plus grande relativement à $\frac{p'}{\Pi}$, le rapport $\frac{\mu}{m}$ se rapproche indéfiniment de la limite 1.

286. *Des ajutages divergents.* — On adapte à un vase ou réservoir un ajutage composé : 1° d'une première partie ABCD (*fig.* 312) ayant la figure d'une veine qui sortirait librement par l'orifice AB en mince paroi et aurait CD pour section contractée; 2° d'une autre partie CDEF s'élargissant progressivement jusqu'en EF et se raccordant tangentiellement avec la partie ABCD. Dans ces circonstances, si l'écoulement permanent et à plein tuyau est établi, et si les effets de la viscosité sont négligeables, on pourra calculer comme au n° 278 la vitesse V de sortie en EF, et l'on trouvera, en conservant les mêmes notations,

Fig. 312.



$$V = \sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

D'un autre côté, l'ajutage a pour effet de supprimer la contraction au delà de la section EF; si donc on nomme S l'aire de cette section, le débit Q dans l'unité de temps s'exprimerait par la formule

$$(11) \qquad Q = SV = S\sqrt{2g\left(z_1 + \frac{p - p'}{\Pi}\right)}.$$

Ce résultat est remarquable en ce qu'il ne dépend pas de

l'aire de l'orifice AB percé sur la paroi du réservoir, et alors il semble que le débit d'un orifice donné pourrait grandir indéfiniment en le faisant suivre d'un ajutage convenablement choisi. Mais, en examinant les choses de plus près, nous allons voir qu'il y a pour l'aire S une limite qu'on ne peut pas dépasser sans rendre inadmissible l'hypothèse d'un écoulement permanent et à plein tuyau, ainsi que la formule (11) qui en est une conséquence.

Soient en effet Ω l'aire CD, p'' et V_1 la pression et la vitesse dans cette section. La répétition d'un calcul tout semblable au précédent nous donnerait

$$V_1 = \sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p''}{\Pi}\right)},$$

$$Q = \Omega V_1 = \Omega\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p - p''}{\Pi}\right)}.$$

Donc

$$S\sqrt{z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}} = \Omega\sqrt{z_2 + \frac{p - p''}{\Pi}},$$

et, attendu que p' ne peut jamais devenir négatif (n° 285),

$$S < \Omega\sqrt{\frac{z_2 + \frac{p}{\Pi}}{z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}}}.$$

Le second membre de cette inégalité donne une limite que ne peut dépasser l'aire S; en supposant qu'on puisse y atteindre, la valeur correspondante de p' serait nulle, et l'on aurait pour limite supérieure du débit

$$(12) \qquad Q_1 = \Omega\sqrt{2g\left(z_2 + \frac{p}{\Pi}\right)},$$

c'est-à-dire le débit pouvant s'écouler par un orifice CD d'aire Ω, parfaitement évasé à l'intérieur et débouchant dans le vide.

Venturi a fait de nombreuses expériences sur l'écoulement de l'eau par des ajutages qui consistaient en deux troncs de

cône réunis par leur petite base. Malheureusement il y avait discontinuité dans le profil de l'ajutage, contrairement à ce que nous avons supposé plus haut. Il est très probable que les filets ne suivaient pas la ligne brisée par laquelle se trouvait remplacée la courbe continue ACE de la *fig.* 312, et qu'il se formait des remous donnant lieu à une perte de charge. Aussi Venturi n'a-t-il jamais réalisé la limite supérieure du débit, telle qu'elle résulterait de la formule (12); il n'est pas allé jusqu'à la moitié de cette limite. Néanmoins cet ajutage conique divergent augmentait notablement le débit qui se serait effectué par l'orifice AB en mince paroi; Venturi a pu obtenir presque le double, en choisissant convenablement les hauteurs des deux troncs de cône et les rayons de leurs bases.

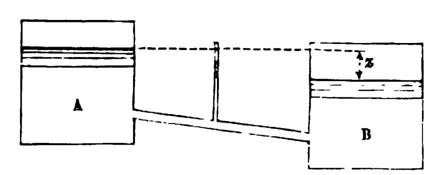
§ III. — Mouvement rectiligne et uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts.

287. *Lois du frottement de l'eau contre les parois d'un tuyau de conduite.* — Quand l'eau d'un réservoir à niveau constant s'écoule sous une charge constante, par un tuyau cylindrique de longueur notable, on constate que la dépense diminue à mesure qu'on augmente la longueur de celui-ci, sans changer son diamètre. La seule explication plausible de ce fait, c'est qu'il existe entre le liquide et les parois solides qui le contiennent une certaine adhérence opposée au mouvement, et que cette force est une fonction croissante de la longueur du tuyau. Il est vrai, d'après les indications qu'on peut avoir au sujet des forces moléculaires, que cette résistance ne peut agir sensiblement que sur les molécules d'eau très voisines de la paroi; mais celles-ci agiront à leur tour en vertu de la viscosité du liquide, pour retarder d'autres molécules plus rapprochées du centre, qui elles-mêmes transmettront encore du retard à une couche intérieure, et ainsi de suite; on conçoit de cette manière que le frottement de la paroi produise un effet sur toute la masse liquide.

Les lois de ce frottement, dans le cas d'un écoulement uniforme, ont été reconnues par une étude expérimentale.

D'abord, comme on l'a déjà dit au n° 257, il est sensiblement nul dans le cas où il y a repos absolu ou relatif du liquide par rapport au tuyau; on doit donc admettre qu'il dépend de la vitesse de glissement du liquide sur la paroi et s'annule en même temps qu'elle. Secondement, Dubuat a montré qu'il est indépendant de la pression; voici comment on peut le reconnaître. On fera écouler de l'eau par un tuyau cylindrique, d'un réservoir A à un autre réservoir B (*fig.* 313), tous deux à niveau constant, et l'on mesurera le volume fourni par le

Fig. 313.



premier au second dans l'unité de temps. On s'arrangera ensuite pour faire monter les deux niveaux d'une même quantité, de manière à conserver leur même différence initiale z dans ce second état, le débit passant de A à B sera resté le même que dans l'état primitif, et par conséquent la résistance produite par le tuyau n'aura pas changé non plus. Cependant la pression augmente à mesure que le niveau monte dans les deux réservoirs. On peut rendre le fait sensible au moyen de tubes piézométriques implantés dans le tuyau; le liquide monterait dans ces tubes jusqu'à une hauteur qui représenterait la pression sur leur point de départ inférieur, et il serait aisé de constater que cette hauteur augmente autant que celle de l'eau dans les deux bassins. Il est donc bien prouvé par là que le frottement de l'eau sur la paroi solide qui la contient ne dépend pas de la pression mutuelle.

D'un autre côté, on a pu constater par des mesures directes que la vitesse du liquide dans le voisinage de la paroi du tuyau est partout la même. Il en résulte qu'il n'y a plus aucune cause capable de faire varier le frottement par unité de surface sur les divers éléments de la paroi d'un tuyau donné. Donc, le frottement total est proportionnel à la surface sur laquelle il s'exerce.

En résumé, si l'on nomme

L la longueur d'un tuyau cylindrique;
χ le périmètre de sa section transversale, supposée circulaire;
W la vitesse du liquide contre la paroi;

les considérations précédentes nous autorisent à représenter le frottement total qu'il produit sur l'eau s'écoulant uniformément, par l'expression $L\chi f(W)$, dans laquelle $f(W)$ désigne une fonction dont les coefficients pourraient varier avec la nature du tuyau, car on conçoit qu'une paroi rugueuse donne lieu à plus de frottement qu'une paroi bien polie.

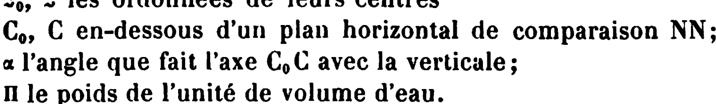
Toutefois on a préféré, pour la commodité des calculs pratiques, une autre expression moins rationnellement indiquée, dans laquelle on introduit, au lieu de la vitesse W à la paroi, ce qu'on nomme la *vitesse moyenne*. Pour la définir, supposons le mouvement rectiligne et permanent établi dans le tuyau; chaque filet parallèle à l'axe se meut alors avec une vitesse constante (n° 277) et l'écoulement est uniforme. Si v est la vitesse d'un filet de section transversale ω, son débit par unité de temps sera ωv et le débit total Q du tuyau s'exprimera par $\Sigma\omega v$, la somme Σ devant s'étendre à tous les éléments ω qui composent la section totale Ω. Alors la vitesse moyenne U est, par définition, égale au quotient $\frac{Q}{\Omega}$ ou $\frac{\Sigma\omega v}{\Sigma\omega}$; c'est la vitesse qui, multipliée par la section du tuyau, donne son débit. Cela posé, il a été admis qu'on pouvait, avec une exactitude pratiquement suffisante, remplacer la fonction $f(W)$ par une autre fonction $F(U)$, dont les coefficients dépendraient aussi de la nature des parois.

Nous adopterons donc finalement l'expression $L\chi F(U)$ pour représenter le frottement dont il s'agit. On verra un peu plus loin comment la fonction $F(U)$ a été déterminée.

288. *Équation du mouvement uniforme de l'eau dans un tuyau.* — Considérons le liquide compris, à un certain instant, dans l'intervalle de deux sections transversales A_0B_0, AB (*fig.* 314); le mouvement de chaque molécule appartenant à ce système matériel est supposé rectiligne et uniforme, et

dès lors toutes les forces d'inertie sont nulles. Donc aussi, conformément au principe de d'Alembert (n° 193), les forces réellement agissantes satisfont aux conditions générales de l'équilibre (n° 129); la somme de leurs projections sur un axe quelconque est nulle, et cela est vrai en particulier quand on fait les projections sur l'axe du tuyau.

Fig. 134.



Pour écrire l'équation qui exprime ce fait, désignons par

L la distance $\overline{C_0C}$ des deux sections;
χ, Ω et U les mêmes quantités qu'au n° 287;
p_0, p les pressions moyennes dans les sections A_0B_0, AB;
z_0, z les ordonnées de leurs centres C_0, C en-dessous d'un plan horizontal de comparaison NN;
α l'angle que fait l'axe C_0C avec la verticale;
Π le poids de l'unité de volume d'eau.

Le poids du volume d'eau A_0B_0AB est $\Pi\Omega L$ et sa projection sur C_0C a pour valeur $\Pi\Omega L\cos\alpha$ ou $\Pi\Omega(z-z_0)$; les pressions totales sur les deux sections A_0B_0, AB sont $p_0\Omega$, $-p\Omega$; le frottement sur la paroi est égal (n° 287) à $L\chi F(U)$. Comme il n'y a pas d'autres forces extérieures, et que les trois dernières se projettent en vraie grandeur sur C_0C, on aura donc

$$\Pi\Omega(z-z_0)+(p_0-p)\Omega-L\chi F(U)=0,$$

soit, en isolant le frottement dans le second membre et divisant par $\Pi\Omega$,

$$(1)\qquad z-z_0+\frac{p_0-p}{\Pi}=\frac{L\chi}{\Pi\Omega}F(U).$$

Nous allons maintenant transformer cette équation. Remarquons d'abord que la pression varie suivant la loi hydrostatique dans chacune des sections extrêmes (n° 277, quatrième règle), les pressions moyennes p_0 et p sont celles du liquide aux points C_0 et C (n° 264); on reconnaît alors dans le premier membre de l'équation ci-dessus la charge entre les deux points C_0 et C du filet central (n° 274). C'est aussi la charge pour un filet quelconque allant de A_0B_0 à AB, car, en raison de la loi hydrostatique des pressions, il n'y a qu'un seul et

même niveau piézométrique pour tous les points de chacune des surfaces A_0B_0, AB, comme on l'a vu dans une autre occasion (nº 284). Enfin, d'après le théorème de D. Bernoulli généralisé (nº 276), c'est aussi la perte de charge éprouvée par une molécule quelconque dans le parcours de la distance entre les deux mêmes sections, puisque la vitesse de cette molécule reste constante. D'un autre côté, si D représente le diamètre du tuyau, on a

$$\chi = \pi D, \quad \Omega = \frac{1}{4}\pi D^2;$$

enfin, nous verrons bientôt qu'on peut adopter pour valeur de $\frac{1}{\Pi}F(U)$ le binôme du second degré $aU + bU^2$, dans lequel a et b sont deux coefficients constants pour chaque tuyau. Eu égard à ces observations, si l'on représente encore par y l'abaissement du niveau piézométrique entre A_0B_0 et AB, c'est-à-dire $z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\Pi}$, l'équation (1) pourra s'écrire

$$(2) \qquad y = \frac{4L}{D}(aU + bU^2).$$

On remarquera encore que $\frac{y}{L}$ représente la charge ou perte de charge par unité de longueur entre A_0B_0 et AB; en la désignant par J, l'équation (2) se mettra sous la forme très habituellement employée

$$(3) \qquad \frac{1}{4}DJ = aU + bU^2.$$

Les équations (2) et (3) montrent que la charge ou perte de charge J par unité de longueur est constante dans toute l'étendue du tuyau, et que, par conséquent, le niveau piézométrique baisse uniformément avec la longueur, dans le sens de l'écoulement; en effet, D et U sont des quantités constantes pour toutes les sections.

Maintenant on a pour valeur du débit Q, suivant la définition même de la vitesse moyenne (nº 287),

$$(4) \qquad Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U.$$

On voit donc que les quatre quantités D, J, U, Q sont liées par deux équations (3) et (4), et que, deux d'entre elles étant données, on peut déterminer les deux autres. Si, par exemple, on connaissait les niveaux piézométriques aux deux extrémités et le diamètre, on aurait comme données $J = \frac{y}{L}$ et D; on tirerait U de l'équation (3), et l'équation (4) permettrait alors de calculer Q. Si l'on donnait Q et J, l'élimination de U entre les deux mêmes équations donnerait une équation d'où l'on déduirait D par tâtonnement; ayant D et Q, on tirerait U de l'équation (4). Nous nous bornons à une simple indication de ces calculs. On les simplifie dans la pratique, par des moyens que nous ne pouvons développer ici.

La démonstration des équations (1), (2), (3) a été faite dans l'hypothèse d'un tuyau rectiligne; mais le résultat peut s'étendre facilement au cas d'un tuyau formé de plusieurs cylindres de même diamètre, dont les axes dessineraient une ligne brisée, et qui se raccorderaient entre eux par des courbes ayant comparativement peu de longueur. En effet, dans le tuyau total ainsi défini, le débit doit être le même pour deux sections transversales quelconques, car autrement il y aurait variation de la masse d'eau comprise dans leur intervalle, ce qui ne peut être, à cause de l'incompressibilité des liquides; le produit $\frac{1}{4}\pi D^2 U$ est donc constant pour toutes les sections, et, puisque D est supposé constant, la vitesse moyenne U le sera aussi. Appliquons maintenant l'équation (2) successivement à chacun des tuyaux rectilignes partiels; en nommant L', L'', L''', ... leurs longueurs; y', y'', y''', ... les abaissements correspondants du niveau piézométrique, nous aurons

$$y' = \frac{4L'}{D}(aU + bU^2),$$

$$y'' = \frac{4L''}{D}(aU + bU^2),$$

$$y''' = \frac{4L'''}{D}(aU + bU^2),$$

....

et, en ajoutant membre à membre,

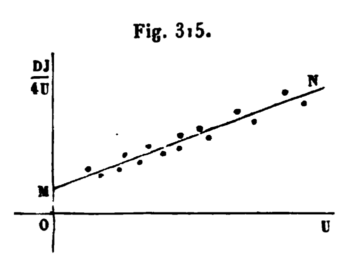
$$y' + y'' + y''' + \ldots = \frac{4(L' + L'' + L''' + \ldots)}{D}(aU + bU^2).$$

Or, $y' + y'' + y''' + \ldots$ n'est autre chose que l'abaissement total y du niveau piézométrique entre les deux extrémités du tuyau avec axe brisé; $L' + L'' + L''' + \ldots$ est de même la longueur de ce tuyau. L'équation précédente reproduit alors l'équation (2); donc cette équation (2) et ses transformées (1) et (3) sont applicables aux tuyaux composés de parties droites comme aux tuyaux rectilignes. Donc, enfin, les mêmes calculs peuvent être faits sur ces deux genres de tuyaux.

289. *Détermination de la fonction* F(U). — Il faut avoir à sa disposition les résultats d'un certain nombre d'expériences, dans lesquelles on aurait mesuré ou évalué les quantités D, J et U. Le diamètre D est connu par une mesure directe. Pour avoir J, on peut implanter sur le tuyau deux tubes piézométriques, en des sections distantes d'une longueur L, et mesurer directement la différence de niveau y des colonnes d'eau qui montent dans ces tubes; on en déduira $J = \frac{y}{L}$. Enfin, si l'on recueille dans un bassin de forme simple le liquide écoulé par le tuyau dans un certain temps observé, la variation du niveau de ce bassin fera connaître le volume qu'il a reçu dans ce même temps; on en déduit le débit Q par seconde et par suite la vitesse moyenne $U = \frac{4Q}{\pi D^2}$.

Prony, ayant à sa disposition les résultats de cinquante et une expériences de Couplet, Bossut et Dubuat, construisit une série d'un pareil nombre de points, en portant comme abscisses les valeurs de U, et comme ordonnées rectangulaires correspondantes les valeurs de $\frac{DJ}{4U}$. Il trouva que tous ces points se trouvaient dans le voisinage d'une certaine droite MN (*fig.* 315), qu'il était possible de tracer sans

Fig. 315.



s'écarter beaucoup d'aucun d'eux. Il en conclut que $\frac{DJ}{4D}$ était une fonction linéaire de U, et posa

$$\frac{DJ}{4U} = a + bU$$

ou bien

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2,$$

les nombres a et b étant regardés par lui comme des constantes, auxquelles il attribua les valeurs

$$a = 0{,}0000173, \quad b = 0{,}000348.$$

Pour avoir a, il suffisait de mesurer sur la figure, d'après l'échelle des ordonnées, la longueur $\overline{OM}$ ou l'ordonnée à l'origine; de même on aurait b en mesurant l'accroissement d'ordonnée pour un accroissement 1 de l'abscisse.

On se rappelle qu'on est arrivé à l'équation (3) du n° 288 en mettant $aU + bU^2$ au lieu de $\frac{1}{\Pi} F(U)$; on aurait donc, d'après Prony,

$$F(U) = \Pi(0{,}0000173\,U + 0{,}000348\,U^2) = 0{,}0173\,U + 0{,}348\,U^2;$$

cette formule suppose, d'ailleurs, l'emploi de nos unités ordinaires, savoir : la seconde pour le temps, le mètre pour les longueurs, le mètre carré pour les surfaces, le mètre cube pour les volumes, le kilogramme pour les forces.

Après Prony, d'Aubuisson et Eytelwein ont proposé de modifier les valeurs de a et de b, et ont indiqué les valeurs suivantes, s'accordant mieux avec l'ensemble des expériences dont ils disposaient :

$$a = 0{,}0000222, \quad b = 0{,}000280 \quad \text{(Eytelwein)};$$
$$a = 0{,}0000188, \quad b = 0{,}000343 \quad \text{(d'Aubuisson)}.$$

D'autres personnes, pour simplifier les calculs, ont proposé de supprimer le terme aU dans le binôme $aU + bU^2$; le coefficient a est, en effet, petit relativement à b, de sorte que, si U n'est pas très petit, on ne commet pas ainsi d'erreur bien notable. D'ailleurs, comme l'a fait observer Dupuit, lorsque U

est petit, le frottement des parois l'est aussi, et alors on n'a pas, en général, besoin de le connaître bien exactement; en outre, toutes les formules peuvent se trouver en défaut dans certains cas particuliers. Aussi Dupuit n'a-t-il pas hésité à poser une formule qui revient à prendre

$$a = 0, \quad b = 0{,}0003855;$$

en augmentant ainsi un peu la valeur de b, on compense dans une certaine mesure la suppression du terme aU.

M. Barré de Saint-Venant a reconnu que les résultats des cinquante et une expériences dont s'était servi Prony pouvaient être assez bien représentés en remplaçant le binôme $aU + bU^2$ par le monôme cU^m; il a indiqué pour m et c les valeurs

$$m = \frac{12}{7}, \quad c = 0{,}0002955.$$

Darcy a procédé avec un peu plus de rigueur que ses devanciers. Il a cherché à part les valeurs de a et de b pour une nature déterminée de paroi et pour des diamètres également déterminés; faisant ensuite varier successivement la nature de la paroi et le diamètre, il est arrivé aux conclusions que voici :

1° Lorsqu'il s'agit de tuyaux neufs, le frottement de l'eau contre les parois varie considérablement avec la nature et le poli des surfaces; ainsi la fonte neuve donne lieu à un frottement dépassant de moitié celui que produit une surface en bitume;

2° La nature de la surface tend à perdre son influence à mesure que les tuyaux se recouvrent d'une couche de dépôts amenés par l'eau elle-même; ainsi toutes les surfaces sont, après quelque temps d'usage, équivalentes au point de vue de leur frottement sur l'eau; ce frottement est à peu près le double de ce qu'il serait avec la fonte neuve;

3° Le frottement par unité de surface peut toujours être représenté par $\Pi(aU + bU^2)$; mais dans les tuyaux qui ont servi quelque temps il s'exprime d'une manière suffisamment exacte par le monôme $\Pi b_1 U^2$;

4° Les nombres a et b varient, non seulement avec la na-

ture de la surface (si elle est neuve), mais aussi avec le rayon R du tuyau; le nombre b_1 varie seulement avec cette dimension;

5° Ces nombres, dans le cas de tuyaux recouverts de dépôts, sont exprimés par les formules

$$a = 0,000032 + \frac{0,0000000376}{R^2},$$

$$b = 0,000443 + \frac{0,0000062}{R},$$

$$b_1 = 0,000507 + \frac{0,00000647}{R};$$

pour la fonte neuve il faudrait diminuer les nombres a et b environ de moitié ([1]).

Comme il faut toujours compter sur l'existence de dépôts après un temps plus ou moins long, on voit qu'en définitive on peut adopter le monôme $b_1 U^2$ au lieu du binôme $aU + bU^2$; seulement il paraît que ce nombre varie avec le rayon du tuyau, contrairement à l'opinion de Prony, et qu'il est plus grand pour les petits tuyaux que pour ceux d'un calibre assez fort.

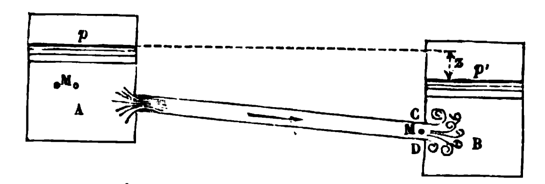
290. *Problèmes particuliers sur l'écoulement de l'eau par une conduite adaptée à un bassin.* — Soient d'abord donnés deux bassins A et B (*fig.* 316) communiquant par une conduite sensiblement rectiligne; on donne les pressions p, p' sur les niveaux de ces bassins et la distance verticale z de ces niveaux, ainsi que la longueur L et le diamètre D de la conduite. On demande de déterminer la vitesse U dans cette conduite et son débit Q par seconde.

Si nous considérons une molécule occupant actuellement

([1]) En réalité, Darcy a déterminé avec beaucoup de soin le frottement de l'eau sur la fonte neuve; il a ensuite admis (peut-être sans faire un assez grand nombre de vérifications) que les coefficients devaient se doubler après un certain temps, à cause des dépôts amenés par l'eau. On peut cependant s'en tenir à cette conclusion, qui tend à évaluer le frottement d'une manière assez large et peut éviter des mécomptes dans les applications pratiques.

la position M dans la section CD et ayant occupé antérieurement la position M_0 dans le bassin alimentaire A, il sera facile d'avoir la charge entre ces deux positions. Les mouvements étant très lents dans le bassin A, la pression en M_0 a la valeur

Fig. 316.



hydrostatique et par suite le niveau piézométrique au même point est à la hauteur $\frac{p}{\Pi}$ au-dessus de celui du bassin; de même la pression varie suivant la loi hydrostatique dans la section CD, en raison du parallélisme des filets (n° 277, quatrième règle), et au-dessus de CD, à cause de la lenteur des mouvements (n° 277, deuxième règle), d'où il suit que le niveau piézométrique en M est le niveau du bassin B relevé de $\frac{p'}{\Pi}$. Donc la charge entre M_0 et M a pour valeur $z + \frac{p-p'}{\Pi}$; et comme la vitesse est à peu près nulle en M_0, le théorème de D. Bernoulli généralisé (n° 276) donne

$$\frac{U^2}{2g} = z + \frac{p-p'}{\Pi} - \zeta,$$

en nommant ζ la perte de charge répondant au parcours M_0M. Cette perte comprend deux parties : 1° si la conduite entre dans le bassin A sans évasement, elle fonctionne à son origine comme un ajutage cylindrique dans lequel la vitesse de sortie serait U, et il se produit de ce chef une perte $\frac{1}{2}\frac{U^2}{2g}$ (n° 285); 2° le frottement sur toute la longueur de la conduite produit une autre perte exprimée par $\frac{4L}{D}(aU + bU^2)$ (n° 288). La perte totale est donc

$$\frac{1}{2}\frac{U^2}{2g} + \frac{4L}{D}(aU + bU^2),$$

et sa substitution dans l'équation précédente conduit à l'équation

$$(5)\qquad \frac{3}{2}\frac{U^2}{2g} + \frac{4L}{D}(aU + bU^2) = z + \frac{p - p'}{\Pi},$$

qui permet de calculer facilement U, puisque cette inconnue n'y entre qu'au second degré. L'équation (4) du n° 288 ferait ensuite connaître la valeur du débit Q.

Si l'on supposait Q donné et D inconnu, les autres données restant les mêmes, on éliminerait U e tre les équations (4) et (5), on obtiendrait une équation du degré supérieur qui permettrait d'avoir D par tâtonnement. On calculerait ensuite U par l'équation (4).

Supposons maintenant que la conduite partant du bassin A se termine par un orifice en mince paroi EF (*fig.* 317) n'aboutissant pas à un second bassin, mais versant directement l'eau dans une atmosphère à la pression p'. Nommons

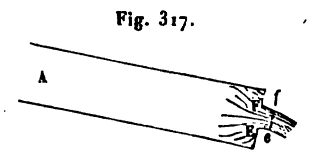


Fig. 317.

z_2 la distance verticale entre le point central de l'orifice EF et le niveau du bassin alimentaire A;
V la vitesse du liquide dans la section contractée ef qui suit l'orifice EF;
m le coefficient de contraction, c'est-à-dire le rapport des aires ef et EF;
S l'aire EF;

les autres notations seront les mêmes que dans le problème précédent. Alors on reconnaîtra, comme au n° 278, que la charge dans le parcours d'une molécule, depuis le bassin A jusqu'à ef, a sensiblement pour valeur $z_2 + \frac{p - p'}{\Pi}$; les pertes se calculant d'ailleurs comme dans le premier problème, le théorème de D. Bernoulli généralisé donnerait, au lieu de l'équation (5),

$$(6)\qquad \frac{V^2}{2g} = z_2 + \frac{p - p'}{\Pi} - \frac{1}{2}\frac{U^2}{2g} - \frac{4L}{D}(aU + bU^2).$$

D'un autre côté, on a pour expression du débit Q

$$Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U = mSV.$$

On tire de là

$$V = \frac{\pi D^2 U}{4mS},$$

valeur qui, portée dans l'équation (6), conduit à

$$(7)\quad \frac{U^2}{2g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2 D^4}{16m^2S^2}\right) + \frac{4L}{D}(aU + bU^2) = z_2 + \frac{p-p'}{\Pi}.$$

L'équation (7) remplacerait l'équation (5) du premier problème; en y joignant l'équation (4) on pourrait, soit calculer U et Q quand toutes les autres quantités sont connues, soit calculer le diamètre nécessaire pour un débit donné, et la vitesse correspondante.

291. *Généralités et faits d'expérience concernant le mouvement rectiligne et uniforme de l'eau dans les canaux découverts.* — Quand l'eau coule dans un canal découvert, par filets rectilignes, la pression dans une section transversale quelconque varie suivant la loi hydrostatique (nº **277**, quatrième règle). Les lignes d'égale pression doivent donc être des horizontales, comme dans le cas de l'équilibre (nº **261**), et il en est de même de la ligne qui marque la position de la surface libre dans le profil. Mais la règle sur laquelle nous nous appuyons pourrait se trouver en défaut dans le cas d'un mouvement sensiblement curviligne des filets, surtout si en même temps la vitesse était assez grande; on pourrait alors observer une certaine courbure ou pente de la surface libre dans un même profil. Toutefois ce sont là des circonstances qu'on peut regarder comme exceptionnelles, et nous ne nous en occuperons pas davantage.

Depuis longtemps l'expérience a fait connaître que les vitesses aux divers points d'une même section ne sont pas égales. La vitesse maximum V a lieu à la surface, vers le point qui répond à la plus grande profondeur; la vitesse minimum existe en quelque point de fond; nous nommerons W celle du point situé au fond, sur la même verticale que celui dont

la vitesse est V. On appelle encore ici *vitesse moyenne* celle qui, multipliée par l'aire de la section, donne le débit ou la dépense du cours d'eau, c'est-à-dire le volume de liquide traversant la section dans l'unité de temps. En désignant par U cette dernière vitesse, Dubuat a proposé la relation empirique

$$(8) \qquad U = \frac{1}{2}(V + W).$$

D'un autre côté, Prony a cherché le rapport entre U et V, et l'a trouvé variable avec V; les expériences de divers hydrauliciens l'ont conduit à poser

$$(9) \qquad U = V\frac{V + 2,37}{V + 3,15},$$

formule dans laquelle les vitesses sont censées évaluées en mètres parcourus dans une seconde. Si l'on calcule le rapport $\frac{U}{V}$ pour diverses valeurs de V, on trouve les résultats que voici :

$V = 0^m,0,$	$0^m,5,$	$1^m,0,$	$1^m,5,$	$2^m,0,$	$2^m,5,$
$\frac{U}{V} = 0,75,$	$0,79,$	$0,81,$	$0,83,$	$0,85,$	$0,87.$

On voit par conséquent que ce rapport, variable de 0,75 à 1,00 ne s'écarte pas beaucoup de 0,80 dans les circonstances ordinaires, où la vitesse est modérée, sans être très petite; aussi se contente-t-on souvent de la relation simple

$$(10) \qquad U = 0,8V.$$

Il serait difficile de croire à la complète généralité des formules (8), (9) et (10), qui ne tiennent aucun compte de toutes les circonstances par lesquelles un courant d'eau rectiligne et uniforme peut différer d'un autre. D'ailleurs les ex périences de Dubuat, qui ont contribué à l'établissement de ces formules, ont été faites dans des canaux en bois de petites dimensions, difficilement assimilables aux lits des cours d'eau naturels.

M. Bazin, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, qui a été le collaborateur et le continuateur de Darcy, a proposé

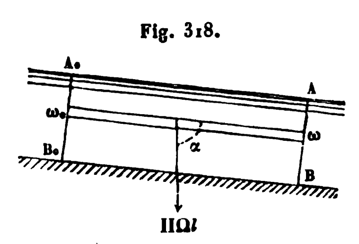
une nouvelle formule empirique, pour exprimer la relation entre U et V, savoir :

$$(11)\qquad V - U = 14\sqrt{Ri},$$

en désignant par i la pente du cours d'eau par unité de longueur; R ce qu'on nomme le *rayon moyen*, c'est-à-dire le quotient de la section transversale Ω du courant, par la longueur χ de la portion de son périmètre en contact avec les parois du lit ([1]). La longueur χ a reçu le nom de *périmètre mouillé*, ce qui suppose évidemment qu'on la considère comme appartenant à la section du lit, et non plus à celle du courant.

292. *Équation du mouvement rectiligne et uniforme de l'eau dans les canaux découverts.* — Soit donné un courant d'eau composé de filets parallèles et rectilignes, en mouvement permanent et par suite uniforme (n° 277); la section de chaque filet est alors constante, et leur ensemble figure un cylindre contenu dans une paroi solide ou lit de forme également cylindrique. Considérons une partie de ce courant comprise entre deux sections transversales A_0B_0, AB (*fig.* 318), et appliquons à ce système matériel le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe parallèle aux filets.

Fig. 318.



La projection des quantités de mouvement est constante, puisque chaque molécule se meut uniformément et en ligne droite; donc la projection totale, sur le même axe, des forces extérieures agissant sur ce système est constamment nulle, et elle est nulle en particulier pour la position initiale

---

([1]) Quand la section du courant est un demi-cercle de rayon r, on a $\Omega = \frac{1}{2}\pi r^2$, $\chi = \pi r$, $R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{r}{2}$. Le rayon moyen est alors égal à la moyenne arithmétique entre les rayons extrêmes (o et r) des couches concentriques en lesquelles on peut concevoir la section décomposée; la dénomination adoptée semble dans ce cas assez naturelle. On l'a généralisée arbitrairement et étendue au cas d'une section de figure quelconque.

A_0B_0AB [1]. Dans cette position, les forces extérieures à projeter sont : 1° le poids du volume d'eau A_0B_0AB; 2° les pressions sur les surfaces A_0B_0 et AB; 3° le frottement sur la paroi solide du lit; il n'y a pas à s'occuper des réactions normales du lit ni de la pression sur la surface libre du courant, car leurs directions sont perpendiculaires à l'axe et leurs projections nulles.

Désignons par

Ω la section transversale du courant;
χ le périmètre mouillé;
l la distance A_0A des deux sections considérées;
z la projection verticale de l, c'est-à-dire la pente totale entre les points A_0 et A;
i le quotient $\frac{z}{l}$ ou la perte commune du lit et du courant, par unité de longueur;
α l'angle des filets ou des génératrices du lit avec la verticale;
U la vitesse moyenne du liquide dans une section quelconque;
Π le poids de l'unité de volume d'eau.

Le poids du volume liquide A_0B_0AB sera $\Pi\Omega l$, et il aura pour projection $\Pi\Omega l \cos\alpha = \Pi\Omega z$ ou encore $\Pi\Omega li$. Les pressions sur A_0B_0 et AB seront égales et contraires et se détruiront dans la somme algébrique des projections; en effet, le filet liquide ayant pour section un élément ω_0 de A_0B_0 découpe sur AB un élément ω égal et situé de la même manière; les pressions p_0 et p par unité de surface sur ces deux éléments sont égales, parce que dans chacune des sections A_0B_0, AB la pression varie suivant la loi hydrostatique et que l'excès de p_0 ou p sur la pression atmosphérique est représenté par une même hauteur, projection verticale de $A_0\omega_0$ ou de $A\omega$; donc enfin, les surfaces A_0B_0, AB sont composées des mêmes éléments supportant des pressions égales,

---

(1) La nullité de cette somme de projections pourrait encore se justifier ici par un raisonnement identique à celui qu'on a fait dans le cas des tuyaux (n° 288).

et, comme ces pressions agissent en sens contraires, elles se détruisent, ainsi que nous l'avons dit. Enfin nous admettrons, par analogie avec ce qui a été fait pour les tuyaux (n° 287), que le frottement du lit dans l'intervalle compris entre A_0B_0 et AB peut s'exprimer assez approximativement par $l\chi F_1(U)$, la fonction $F_1(U)$ devant être choisie de manière à reproduire le mieux possible les résultats d'expériences. Alors on aura l'équation

$$\Pi\Omega li = l\chi F_1(U),$$

qui, divisée par $\Pi l\chi$, prend la forme

$$(12) \qquad Ri = \frac{1}{\Pi} F_1(U).$$

293. *Détermination de la fonction* $F_1(U)$; *expressions diverses en usage.* — La fonction $F_1(U)$ se détermine par des moyens semblables à ceux qu'on a indiqués au n° 289, à l'occasion des tuyaux. Un courant découvert étant donné, on peut d'abord mesurer directement la pente i, la section Ω, le périmètre mouillé χ, et par suite on a le rayon moyen $R = \frac{\Omega}{\chi}$ ainsi que le produit Ri. On mesure ensuite le débit Q comme pour les tuyaux, s'il s'agit d'un courant artificiel de dimensions transversales assez petites; dans le cas d'un courant naturel, si ce procédé devient inapplicable, on peut en employer d'autres, dont l'exposition ne rentre pas dans notre programme. Du débit on déduit la vitesse $U = \frac{Q}{\Omega}$. On connaît ainsi les valeurs de la fonction $F_1(U)$, égales à ΠRi, pour une série de valeurs de la variable U; on cherche alors une formule telle que

$$F_1(U) = \beta U + \gamma U^2 + \delta U^3 + \ldots$$

qui reproduise le mieux possible les valeurs de $F_1(U)$.

Prony a constaté, en se servant de diverses expériences connues avant lui, que les points ayant pour abscisses les vitesses U et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $\frac{Ri}{U}$ se trouvaient à peu près en ligne droite; il a posé, en con-

séquence,

$$\frac{Ri}{U} = a + bU,$$

ou, d'après l'équation (12),

$$F_1(U) = \Pi(aU + bU^2),$$

les lettres a et b représentant des coefficients numériques auxquels il attribuait les valeurs

$$a = 0{,}000044, \quad b = 0{,}000309.$$

Suivant Eytelwein, qui prenait en considération d'autres expériences, il serait mieux d'adopter les valeurs

$$a = 0{,}000024, \quad b = 0{,}000366.$$

M. de Saint-Venant a proposé l'expression monôme

$$F_1(U) = \Pi c U^m,$$

dans laquelle il fait $m = \frac{21}{11}$ et $c = 0{,}000401$. Diverses personnes ont adopté la formule plus simple et peu différente

$$F_1(U) = \Pi \times 0{,}0004\,U^2;$$

l'équation (12) devient alors

$$Ri = 0{,}0004\,U^2,$$

d'où l'on tire la formule

$$U = 50\sqrt{Ri},$$

donnée en France dès 1775 par Chézy et connue plus ordinairement sous le nom de *formule de Tadini*.

M. Bazin a reconnu qu'on ne pouvait arriver à une expression passablement exacte de $F_1(U)$, sans tenir compte à la fois des dimensions de la section transversale et de la nature du lit. Adoptant la formule monôme

$$F_1(U) = \Pi b_1 U^2,$$

il exprime le coefficient b_1 par la formule

$$b_1 = k\left(1 + \frac{n}{R}\right),$$

dans laquelle R désigne le rayon moyen $\frac{\Omega}{\chi}$ de la section, k et n étant des coefficients variables suivant la nature des parois du lit. A cet égard, M. Bazin distingue quatre catégories de parois :

1° Parois très unies : ciment lissé, planches rabotées;

2° Parois moyennement unies : pierres de taille, planches brutes;

3° Parois peu unies : maçonnerie de moellons;

4° Parois rugueuses : terrain naturel.

Ces quatre catégories sont comme des types, entre lesquels on conçoit facilement des catégories intermédiaires. M. Bazin donne les formules qui leur correspondent respectivement :

Première catégorie.... $b_1 = 0,00015\left(1 + \frac{0,03}{R}\right)$,

Deuxième catégorie.... $b_1 = 0,00019\left(1 + \frac{0,07}{R}\right)$,

Troisième catégorie.... $b_1 = 0,00024\left(1 + \frac{0,25}{R}\right)$,

Quatrième catégorie... $b_1 = 0,00028\left(1 + \frac{1,25}{R}\right)$.

Toutes les formules numériques par lesquelles on vient d'exprimer $F_1(U)$ supposent l'emploi de nos unités ordinaires, rappelées au n° 289.

294. *Problèmes divers sur le mouvement uniforme de l'eau dans un canal découvert.* — On peut se proposer, au sujet du mouvement uniforme de l'eau dans un canal découvert, divers problèmes, qui ont un certain intérêt pratique et que nous allons passer en revue.

PROBLÈME I. — *Étant donnés le profil transversal d'un lit prismatique à pente constante, la pente et la dépense, trouver la hauteur à laquelle s'élève l'eau dans chaque section, quand le mouvement est supposé uniforme.* — La solution peut s'obtenir par tâtonnement. Une hypothèse faite sur la position du niveau de l'eau relativement au lit permet de calculer ou de mesurer sur un dessin la section Ω du courant, le périmètre

mouillé χ, le rayon moyen $\frac{\Omega}{\chi}$, et enfin la vitesse moyenne U, égale au quotient de la dépense donnée Q divisée par Ω; par suite on vérifie si l'équation (12) est satisfaite. On arrive à y satisfaire avec l'approximation qu'on veut, en multipliant suffisamment les essais, et le problème est alors résolu.

Adoptons, comme M. Bazin, la formule

$$\frac{1}{\Pi} F_1(U) = k\left(1 + \frac{n}{R}\right) U^2 = k\left(1 + \frac{n\chi}{\Omega}\right) U^2;$$

l'équation (12) deviendra, en remplaçant R par $\frac{\Omega}{\chi}$ et U par $\frac{Q}{\Omega}$,

$$\frac{\Omega i}{\chi} = k\left(1 + \frac{n\chi}{\Omega}\right) \frac{Q^2}{\Omega^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$(13) \qquad \frac{\Omega^4}{\chi(\Omega + n\chi)} = \frac{kQ^2}{i}.$$

Avec les figures ordinaires que présentent les profils des lits naturels ou artificiels, le premier membre est une fonction toujours croissante, depuis o jusqu'à ∞, quand la hauteur de l'eau en dessus du point le plus bas du profil varie elle-même de o à ∞. Cela prouve d'abord que dans un lit donné la dépense correspondant à un mouvement uniforme croît à mesure que le niveau du courant s'élève; secondement que, si l'on donne la dépense en même temps que le profil du lit, il n'y a qu'une seule hauteur d'eau capable de faire prendre au premier membre la valeur donnée du second, et que, par conséquent, le problème tel qu'il est posé comporte une solution unique.

Problème II. — *Réciproquement, la ligne d'eau étant connue, ainsi que la pente et le profil du lit, trouver la dépense.* — Les données permettent d'avoir Ω, χ et $R = \frac{\Omega}{\chi}$; l'équation (12) donne alors U, et l'on en déduit la dépense $Q = U\Omega$. Si l'on adoptait les formules de M. Bazin, on aurait

$$Ri = k\left(1 + \frac{n}{R}\right) U^2,$$

d'où résultent

$$U = \sqrt{\frac{Ri}{k\left(1+\frac{n}{R}\right)}}, \quad Q = \Omega\sqrt{\frac{Ri}{k\left(1+\frac{n}{R}\right)}}.$$

Nous devons faire observer que, par suite de l'incertitude qui affecte l'expression de $F_1(U)$, les résultats de ce calcul pourront être assez inexacts, surtout si le profil transversal présente beaucoup d'irrégularités dans sa forme et s'il ne se maintient pas bien constant sur une certaine étendue. Dans la pratique on préfère mesurer le débit par les moyens directs que nous avons déjà mentionnés (n° 293).

Problème III. — *Connaissant la dépense et la section transversale, on demande la pente.* — On chercherait d'abord la vitesse moyenne $U = \frac{Q}{\Omega}$, et le rayon moyen $R = \frac{\Omega}{\chi}$; l'équation (12) ne renfermerait plus, comme inconnue, que la pente i et en donnerait facilement la valeur.

Problème IV. — *Étant données la pente i et la nature des parois du lit, on demande la section transversale capable de dépenser un volume d'eau Q également donné.* — Supposons qu'on adopte les formules de M. Bazin; alors l'équation (13) est applicable, et l'on connaît le second membre, puisque Q et i sont donnés et que k est connu par l'indication de la nature des parois. La section cherchée doit donc être telle que le quotient $\frac{\Omega^4}{\chi(\Omega + n\chi)}$ ait une valeur donnée. Mais cela ne suffit pas pour la définir, et il faut ajouter d'autres conditions pour que le problème ne soit pas indéterminé.

Par exemple, on peut admettre que le profil transversal du lit sera composé d'une horizontale AB (*fig.* 319) et de deux lignes inclinées faisant un même angle α avec la verticale. Soit CD la ligne horizontale du niveau de l'eau; posons

$$\overline{AB} = x, \quad \overline{AE} = y.$$

Alors on a

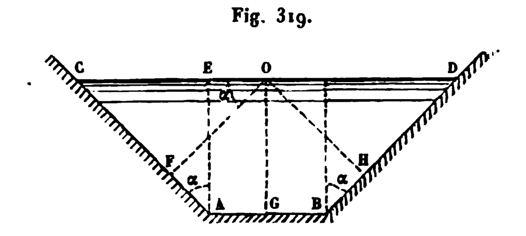
$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= xy + y^2 \operatorname{tang}\alpha, \\ \chi &= x + \frac{2y}{\cos\alpha}, \end{aligned} \right.$$

et l'équation (13) devient en conséquence

$$\frac{y^4(x+y\,\mathrm{tang}\,\alpha)^4}{\left(x+\dfrac{2y}{\cos\alpha}\right)\left(xy+y^2\,\mathrm{tang}\,\alpha+nx+\dfrac{2ny}{\cos\alpha}\right)}=\frac{kQ^2}{i}.$$

L'angle α étant supposé donné, on aurait encore la faculté de choisir arbitrairement x ou y, ou d'établir une relation entre ces deux quantités; l'équation précédente permettrait alors d'en avoir les valeurs, ce qui résoudrait la question.

Fig. 319.



On pourrait aussi faire disparaître l'indétermination en se donnant une figure semblable à la section cherchée. On aurait dans ce cas

$$\Omega=qx^2,\quad \chi=rx,$$

x désignant l'une quelconque des dimensions de la section, q et r des nombres déterminés et connus. La substitution de ces valeurs dans l'équation (13) conduit à

$$\frac{q^4x^6}{r(qx+nr)}=\frac{kQ^2}{i},$$

d'où l'on déduirait x et par suite toutes les dimensions de la section inconnue.

Enfin, comme il arrive souvent que le canal doit être creusé à fleur de terre, on peut alors s'imposer la condition que Ω soit minimum, afin de rendre aussi petit que possible le volume des déblais. Sans traiter la question d'une manière générale, voyons ce qui résulte de cette condition de minimum dans le cas simple d'une section en trapèze isoscèle, comme celle que représente la *fig.* 319. Reprenons l'équation (13),

sous la forme

$$\frac{\Omega^4 i}{kQ^2} = \Omega\chi + n\chi^2;$$

on en déduit, par la différentiation, dans l'hypothèse où χ et Ω varient pendant que i et Q restent constantes,

$$\frac{4\Omega^3 i}{kQ^2}\,d\Omega = \chi\,d\Omega + (\Omega + 2n\chi)\,d\chi.$$

Or, si Ω est minimum, $d\Omega$ est nul; l'équation précédente se réduit alors à

$$(\Omega + 2n\chi)\,d\chi = 0,$$

ce qui entraîne la condition $d\chi = 0$. Égalant alors à zéro les différentielles des expressions (14), il vient

$$y\,dx + (x + 2y\,\text{tang}\,\alpha)\,dy = 0,$$

$$dx + \frac{2\,dy}{\cos\alpha} = 0;$$

d'où résulte, par l'élimination de $\frac{dy}{dx}$,

$$(15)\qquad x + 2y\,\text{tang}\,\alpha - \frac{2y}{\cos\alpha} = 0.$$

Cette dernière équation détermine $\frac{y}{x}$ et par suite une section semblable à celle qu'on cherche; on rentre ainsi dans un cas déjà traité.

La même équation met en évidence une propriété intéressante de la section inconnue. Abaissons du milieu O de la ligne d'eau CD les perpendiculaires OF, OG, OH, sur les côtés de la section, et cherchons-en les longueurs. On aura

$$\overline{OG} = y,\quad \overline{OF} = \overline{OH} = \overline{OC}\cos\alpha = \frac{1}{2}(x + 2y\,\text{tang}\,\alpha)\cos\alpha,$$

et par conséquent, d'après (15),

$$\overline{OF} = \overline{OH} = y.$$

Donc le trapèze minimum a ses trois côtés à égale distance du point O; donc il est circonscriptible à un cercle dont le

centre est au milieu de la droite marquant le niveau de l'eau dans la section.

§ IV. — Écoulement des gaz à température constante; travail exercé par un gaz sur son enveloppe; notions succinctes concernant l'action mutuelle d'un solide et d'un fluide pendant leur mouvement relatif.

295. — *Équation analogue au théorème de D. Bernoulli.* — Nous avons démontré au n° 273 une équation générale applicable au mouvement permanent d'un gaz à température constante, soumis à des forces directement appliquées qui dériveraient d'un potentiel, et censé dépourvu de viscosité; cette équation est

$$T - \frac{1}{K} Lp - \frac{1}{2} V^2 = \text{const.}$$

Dans le premier membre, T désigne le potentiel des forces rapportées à l'unité de masse, p la pression, V la vitesse, K le rapport de la densité ρ à la pression p; de plus il est sous-entendu que ce premier membre ne conserve une valeur invariable qu'à la condition de prendre une suite de points situés sur la trajectoire d'une même molécule.

Dans le cas où la pesanteur serait la seule force directement appliquée aux molécules gazeuses (indépendamment des pressions qui peuvent agir sur le contour de la masse totale du gaz), si l'on prend un système d'axes rectangulaires dans lequel l'axe des z serait vertical et descendant, on aurait pour les trois composantes d'un poids élémentaire rapporté à l'unité de masse

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

et par suite

$$T = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = gz;$$

l'équation précédente se réduit alors à

$$gz - \frac{1}{K} Lp - \frac{1}{2} V^2 = \text{const.},$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z - z_0 + \frac{1}{gK} L \frac{p_0}{p},$$

en désignant par V_0, z_0, p_0 les valeurs de V, z, p pour une position initiale de la même molécule. On voit en effet, par l'équation mise sous la dernière forme, que la quantité $z - Lp - \frac{V^2}{2g}$ a des valeurs égales dans les deux positions attribuées à la molécule dont il s'agit.

La constante gK se remplace par une autre expression. Si l'on nomme

Π le poids du mètre cube de gaz;

δ le rapport de sa densité à celle de l'air, à égalité de pression et de température;

α le coefficient de dilatation des gaz, égal à 0,00366 ou $\frac{1}{273}$;

θ la température du gaz considéré, en degrés centigrades;

on a démontré au n° 261 la relation

$$\Pi = \frac{p\delta}{7991(1 + \alpha\theta)}.$$

Or on a par définition $\rho = Kp$ et, par suite,

$$gK = \frac{\rho g}{p} = \frac{\Pi}{p} = \frac{\delta}{7991(1 + \alpha\theta)};$$

donc finalement

$$(1) \qquad \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z - z_0 + \frac{7991(1 + \alpha\theta)}{\delta} L \frac{p_0}{p},$$

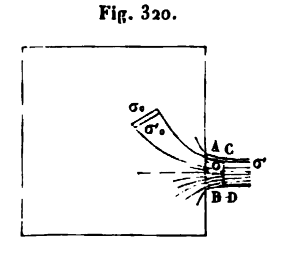
ou, si l'on remplace les logarithmes népériens par les logarithmes vulgaires,

$$(2) \qquad \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z - z_0 + \frac{18401(1 + \alpha\theta)}{\delta} \log \frac{p_0}{p}.$$

Les équations (1) et (2) sont, pour les gaz pesants à température constante, l'analogue du théorème de D. Bernoulli.

296. *Vitesse d'écoulement d'un gaz à température constante, sortant par un petit orifice en mince paroi.* — Un réservoir dans lequel le gaz est supposé entretenu dans un état constant présente un petit orifice en mince paroi AB (*fig.* 320); le gaz s'écoule en possédant un mouvement permanent et une température constante. Considérons un filet gazeux ayant une section σ_0 dans l'intérieur du réservoir et une section σ lorsqu'il traverse la section contractée CD, placée un peu au delà de l'orifice; et appliquons l'équation (1) ci-dessus à une molécule de gaz, pendant son passage de σ_0 à σ. Nous pourrons considérer V_0 comme négligeable relativement à V, et réduire l'équation à

Fig. 320.



$$\frac{V^2}{2g} = z - z_0 + \frac{7991(1+\alpha\theta)}{\delta} \mathrm{L} \frac{p_0}{p}.$$

Supposons en effet un déplacement élémentaire, accompli pendant le temps dt, du gaz contenu dans le filet entre σ_0 et σ; la nouvelle position $\sigma'_0\,\sigma'$ de la masse différera de la première par les tranches $\sigma_0\sigma'_0$ et $\sigma\sigma'$, qui doivent avoir des masses égales, puisque les masses comprises dans $\sigma_0\sigma$ et $\sigma'_0\sigma'$ sont composées en tout des mêmes molécules et que la partie commune $\sigma'_0\,\sigma$ est identique, par raison de permanence. Or les volumes de ces tranches sont $\sigma_0 V_0\,dt$, $\sigma V\,dt$, et leurs masses sont par conséquent $\mathrm{K}p_0\sigma_0 V_0\,dt$, $\mathrm{K}p\sigma V\,dt$; on a donc

$$p_0\sigma_0 V_0 = p\sigma V \quad \text{ou} \quad \frac{V_0}{V} = \frac{p\sigma}{p_0\sigma_0}.$$

Ce rapport $\frac{V_0}{V}$ est petit, principalement parce que les filets affluent à l'orifice dans toutes les directions et que cette convergence rend nécessairement σ petit en comparaison de σ_0; de plus la pression extérieure p, en général peu différente de p_0, est au-dessous de cette dernière, et l'on a $\frac{p}{p_0} < 1$.

Habituellement on néglige aussi la hauteur $z - z_0$, à moins qu'elle n'ait une valeur exceptionnellement grande; cela se

justifie par ce que, les gaz étant très légers, on peut le plus souvent négliger leur poids, d'où provient le terme $z - z_0$, en comparaison des pressions exercées à leur surface ([1]). Il est alors assez indifférent de mesurer la pression p_0 en tel ou tel point du réservoir, pourvu que ce ne soit pas trop près de l'orifice, parce que ses variations sont insensibles. On peut du reste rendre la suppression de $z - z_0$ complètement légitime, par le moyen que voici. Nommons p_1 la pression en un point du réservoir assez éloigné de l'orifice et répondant à la même ordonnée z que l'élément σ; comme on peut aller de ce point à l'élément σ_0 en traversant une masse gazeuse où les vitesses sont presque nulles, le rapport $\frac{p_1}{p_0}$ doit satisfaire à l'équation démontrée dans l'Hydrostatique (n° 261)

$$L\frac{p_1}{p_0} = \frac{\delta}{7991(1+\alpha\theta)}(z - z_0);$$

en portant dans l'expression de $\frac{V^2}{2g}$ la valeur de $z - z_0$ tirée de cette équation, il vient

$$(3) \qquad \frac{V^2}{2g} = \frac{7991(1+\alpha\theta)}{\delta} L\frac{p_1}{p}$$

ou bien, si l'on emploie les logarithmes vulgaires,

$$(4) \qquad \frac{V^2}{2g} = \frac{18401(1+\alpha\theta)}{\delta} \log\frac{p_1}{p}.$$

La pression p sur l'élément σ de la section contractée est ordinairement confondue avec celle de l'atmosphère qui entoure la veine. Cela semble exiger que la vitesse soit modérée et que, par suite, le rapport $\frac{p_1}{p}$ ne soit pas beaucoup au-dessus de l'unité. Car, s'il en était différemment, l'épanouissement des filets deviendrait très rapide après la contraction, et les molécules décriraient, avec une grande vitesse, des trajec-

---

([1]) Ainsi, un cube d'air de 1^m de côté, à la température $0°$ et sous la pression atmosphérique moyenne, ne pèserait que $1^{kg},293$, pendant que la pression sur chaque face du cube serait de $10\,333^{kg}$.

toires fortement courbées; les forces d'inertie centrifuges dont on aurait à tenir compte, conformément au principe de d'Alembert, pour déterminer les différences de pression dans la section contractée, auraient des valeurs très grandes, et les pressions dans l'intérieur pourraient surpasser beaucoup celles du dehors. Les formules (3) et (4) seraient toujours bonnes, mais on ne pourrait pas les utiliser pour calculer la vitesse, parce qu'on ne connaîtrait pas la pression p, et sans doute elles conduiraient à un résultat trop grand si l'on y mettait, au lieu de p, la pression autour de la veine.

La rapport $\frac{p_1}{p}$ devant être peu supérieur à 1, on peut aisément substituer aux formules (3) et (4) une autre formule sans logarithmes. On a, en effet,

$$\mathrm{L}\frac{p_1}{p} = \mathrm{L}\frac{1+\frac{p_1-p}{p_1+p}}{1-\frac{p_1-p}{p_1+p}} = \mathrm{L}\left(1+\frac{p_1-p}{p_1+p}\right) - \mathrm{L}\left(1-\frac{p_1-p}{p_1+p}\right)$$

ou, en vertu de la formule connue qui donne le développement de $\mathrm{L}(1 \pm x)$,

$$\mathrm{L}\frac{p_1}{p} = \frac{2(p_1-p)}{p_1+p}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{p_1-p}{p_1+p}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{p_1-p}{p_1+p}\right)^4+\ldots\right].$$

Lorsque p_1 diffère peu de p, le rapport $\frac{p_1-p}{p_1+p}$ est très petit, et l'on peut prendre simplement

$$\mathrm{L}\frac{p_1}{p} = \frac{2(p_1-p)}{p_1+p};$$

le rapport de $\mathrm{L}\frac{p_1}{p}$ à cette valeur approchée est, en effet,

1,0000, 1,0002, 1,0008, 1,0391

quand on suppose $\frac{p_1}{p}$ respectivement égal à

1,00, 1,05, 1,10, 2,00.

La valeur 2 étant déjà bien au delà de celles qu'on peut

attribuer à $\frac{p_1}{p}$ sans rendre impossible l'application de la formule (3), on voit qu'on a simplement, avec une approximation bien suffisante dans la pratique,

$$(5) \qquad \frac{V^2}{2g} = 15982 \frac{1+\alpha\theta}{\delta} \frac{p_1 - p}{p_1 + p}.$$

C'est la formule à laquelle on serait arrivé en traitant le gaz comme un fluide homogène, ce qui est permis, puisque sa densité varie peu. En effet, le poids du mètre cube, sous la pression moyenne $\frac{1}{2}(p_1 + p)$ et à la température θ, est exprimé par la relation

$$\Pi = \frac{\delta(p_1 + p)}{2 \times 7991(1+\alpha\theta)};$$

la formule (5) équivaut donc à

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_1 - p}{\Pi},$$

et alors elle exprime, comme la formule (1) du n° 278, que la hauteur due à la vitesse V est égale à la charge entre l'intérieur du réservoir et l'élément σ de la section contractée.

297. *Calcul de la dépense par un orifice en mince paroi, ou par un orifice muni d'un ajutage.* — Quand l'orifice est en mince paroi, les filets gazeux éprouvent d'abord, après leur sortie, une contraction due à la convergence qu'ils ont dans l'intérieur du réservoir, pour affluer de toute part vers le point de sortie ; puis ils deviennent sensiblement parallèles à une petite distance de l'orifice, en traversant une section minimum, dite section contractée. Soient

Ω l'aire de la section contractée ;
A celle de l'orifice ;
V la vitesse d'écoulement ;
Q le volume dépensé par seconde, mesuré sous la pression p et à la température θ.

Il est clair d'abord que le volume gazeux qui traverse la

section contractée dans chaque seconde est ΩV, et que ce gaz, soumis à la pression p par l'atmosphère ambiante, a conservé sa température θ, puisque nous admettons toujours l'hypothèse d'une température constante; d'ailleurs l'expérience prouve, suivant d'Aubuisson, que Ω est égal à 0,65 A; on aurait donc

$$(6) \qquad Q = 0,65\,AV,$$

résultat fort semblable à ce qu'on a vu pour les liquides (n° 278), car la seule différence est le changement du coefficient 0,62 en 0,65. La vitesse V ayant été calculée plus haut (n° 296), on peut donc aussi calculer la dépense Q.

Si l'on voulait savoir le volume Q' occupé par Q à une autre température θ' et sous une autre pression p', on aurait immédiatement, par application des lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$Q' = Q\,\frac{1+\alpha\theta'}{1+\alpha\theta}\,\frac{p}{p'}.$$

Si l'on demandait enfin, non pas le volume, mais le poids P dépensé par seconde, il faudrait multiplier Q par le poids Π du mètre cube de gaz, c'est-à-dire (n° 261) par $\frac{p\delta}{7991(1+\alpha\theta)}$, ce qui donnerait

$$P = \frac{0,65\,AVp\delta}{7991(1+\alpha\theta)}$$

ou, en remplaçant V par sa valeur tirée de l'équation (3),

$$(7) \qquad P = 0,65\,Ap\sqrt{2g\,\frac{\delta}{7991(1+\alpha\theta)}\,L\frac{p_1}{p}}.$$

Dans le cas où p_1, θ, A et δ seraient supposés invariables, cette expression varierait encore avec la pression extérieure p, et il est naturel d'en chercher le maximum. Il suffit de considérer le facteur variable $p\sqrt{L\frac{p_1}{p}}$ ou plutôt son carré $p^2(Lp_1 - Lp)$; on aura son maximum en égalant la dérivée à 0, ce qui conduit à l'équation

$$2p(Lp_1 - Lp) - p^2\,\frac{1}{p} = 0,$$

soit

$$2p\left(\mathrm{L}\frac{p_1}{p} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

La solution $p = 0$ doit être rejetée, car elle annule $p^2(\mathrm{L}p_1 - \mathrm{L}p)$ et ne donne pas le maximum; il reste donc

$$\mathrm{L}\frac{p_1}{p} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad p_1 = pe^{\frac{1}{2}} = 1,649p.$$

Nous avons dit que les calculs faits pour obtenir la valeur de la vitesse supposent $\frac{p_1}{p}$ voisin de 1; il est donc très douteux que l'expression (7) de P reste passablement exacte pour $p_1 = 1,649p$. Comme l'équation (3) exagère la vitesse en pareil cas, le maximum théorique du poids dépensé doit être regardé comme une limite supérieure, qu'on n'atteindrait jamais dans la réalité. En nommant P_1 cette limite, on aurait, par la substitution de $\frac{p_1}{1,649}$ au lieu de p dans l'équation (7),

$$P_1 = \frac{0,65\,\mathrm{A}p_1}{1,649}\sqrt{\frac{g\delta}{7991(1+\alpha\theta)}} = 0,0138\,\mathrm{A}p_1\sqrt{\frac{\delta}{1+\alpha\theta}}.$$

La valeur correspondante V_1 de la vitesse s'obtient en faisant $\mathrm{L}\frac{p_1}{p} = \frac{1}{2}$ dans l'équation (3); elle serait

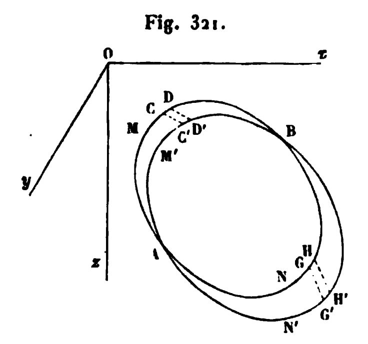
$$V_1 = \sqrt{g \times 7991\,\frac{1+\alpha\theta}{\delta}} = 280\sqrt{\frac{1+\alpha\theta}{\delta}}.$$

C'est une vitesse très considérable, qui, par les raisons déjà indiquées, ne serait sans doute pas atteinte.

Lorsque l'orifice de sortie est muni d'un ajutage cylindrique, il faut, d'après d'Aubuisson, calculer encore la dépense par la formule (6) où l'on aurait remplacé le coefficient 0,65 par 0,93. Si l'ajutage est légèrement conique, l'angle de convergence ne dépassant pas 12°, le coefficient augmente encore un peu et passe à 0,94. Le poids dépensé P et sa limite P_1 éprouveraient évidemment des modifications proportionnelles.

298. *Travail exercé par un gaz sur son enveloppe.* — Proposons-nous d'évaluer le travail exercé par un gaz sur une enveloppe ou enceinte à parois mobiles dans laquelle il se trouve renfermé. Soient MN (*fig.* 321) une position quelconque de cette enveloppe; M'N' une position infiniment voisine. Pendant ce déplacement, certains éléments ω de MN ont

Fig. 321.



pu entrer dans le volume primitif, et d'autres éléments ω_1 ont pu en sortir; une des deux catégories peut aussi se réduire à o, mais cela est indifférent pour le calcul que nous allons faire. Si p est la pression par unité de surface sur ω, cet élément supporte de la part du gaz une pression $p\omega$ dirigée vers l'extérieur; le travail de $p\omega$ sera négatif et égal au produit de $p\omega$ par la projection du chemin parcouru sur la direction de la force, ce qui donne $-p\varepsilon$ pour sa valeur, en nommant ε le volume du cylindre oblique $\omega\omega'$. Donc le travail élémentaire sur la portion AMB qui pénètre dans le volume primitif aura pour valeur totale $-\Sigma p\varepsilon$, la somme Σ devant s'étendre à tous les volumes ε engendrés par les éléments ω. On verrait d'une manière semblable que la pression $p_1\omega_1$ sur l'un des éléments ω_1 fait un travail élémentaire positif égal au produit de p_1 par le volume ε_1 du cylindre oblique $\omega_1\omega'_1$, et le total de ces travaux aurait une expression analogue $\Sigma p_1\varepsilon_1$. Le travail élémentaire $d\varpi$ du gaz sur toute l'enveloppe est donc

$$\Sigma p_1\varepsilon_1 - \Sigma p\varepsilon = d\varpi.$$

Pour être en mesure d'effectuer les deux sommations indiquées, il faut nécessairement connaître comment varie la

pression aux différents points de l'enveloppe. Nous ferons à cet égard deux hypothèses simplificatives. D'abord nous admettrons que les mouvements des molécules gazeuses sont assez lents pour que la pression s'écarte peu de ce qu'elle serait dans l'état de repos (n° 277, deuxième règle). En second lieu l'enveloppe MN sera supposée avoir des dimensions modérées, de manière à ne pas comporter de grandes inégalités de pression, à un instant donné, pour les divers points du gaz qu'elle renferme; dès lors ce gaz peut être assimilé à un fluide homogène pesant, dans lequel la pression serait donnée par la relation

$$p = p_0 + \Pi z,$$

p_0 désignant une constante, Π le poids de l'unité de volume du gaz, sensiblement constant en tous ses points, et z la hauteur d'un point au-dessous d'un plan horizontal de comparaison xOy.

La substitution de cette valeur de p dans les produits $p\varepsilon$ ou $p_1\varepsilon_1$ permet de décomposer chacune des deux sommes $\Sigma p\varepsilon$, $\Sigma p_1\varepsilon_1$ en deux autres, l'une proportionnelle à p_0, l'autre à Π, et l'on trouve

$$d\mathfrak{T} = \Sigma p_1\varepsilon_1 - \Sigma p\varepsilon = p_0(\Sigma\varepsilon_1 - \Sigma\varepsilon) + \Pi(\Sigma z_1\varepsilon_1 - \Sigma z\varepsilon).$$

Or $\Sigma\varepsilon_1$ et $\Sigma\varepsilon$ ne sont autres que les volumes AN'BN, AM'BM; en leur ajoutant à chacun le volume ANBM', commun à MN et M'N', on voit que $\Sigma\varepsilon_1 - \Sigma\varepsilon$ est égal à la différence de ces derniers volumes. Ainsi donc, dV représentant la différentielle du volume occupé par le gaz quand il passe de sa première à sa seconde position, nous pouvons d'abord remplacer $p_0(\Sigma\varepsilon_1 - \Sigma\varepsilon)$ par $p_0\,dV$. De même si l'on ajoute à $\Sigma z_1\varepsilon_1$ et à $\Sigma z\varepsilon$ le moment du volume ANBM' relativement au plan xOy, ce qui n'altère pas la différence de ces quantités, on voit que cette différence représente l'accroissement du moment du volume total $MN = V$, relativement au même plan. Désignant donc par ζ l'ordonnée z de son centre de gravité, on aura

$$\Sigma z_1\varepsilon_1 - \Sigma z\varepsilon = d.V\zeta = \zeta\,dV + V\,d\zeta$$

et, par suite,

$$d\mathfrak{T} = (p_0 + \Pi\zeta)\,dV + \Pi V\,d\zeta.$$

On peut observer enfin que $p_0 + \Pi\zeta$ représente la pression au centre de gravité du gaz, c'est-à-dire une valeur moyenne entre les pressions, du reste peu différentes, de ces divers points, et, secondement, que ΠV exprime son poids total. Si l'on désigne respectivement ces deux quantités par p' et P, la formule précédente deviendra

$$(8)\qquad d\mathfrak{T} = p'\,dV + P\,d\zeta.$$

S'il s'agissait de calculer, non pas le travail élémentaire du gaz sur son enveloppe, mais celui de l'enveloppe sur le gaz, on remarquerait d'abord que toutes les forces ci-dessus représentées par $p\omega$, $p_1\omega_1$ conserveraient leurs intensités, mais changeraient de sens en vertu du principe général de l'égalité entre l'action et la réaction (n° 95). On admet de plus que, si un fluide en mouvement touche une paroi fixe ou mobile, les molécules qui sont au contact à une certaine époque y restent indéfiniment; il suit de là que les molécules gazeuses en contact avec un élément ω de la paroi ne possèdent, outre le mouvement de ω, qu'un glissement parallèle à son plan tangent, et que, par conséquent, la projection de leur déplacement sur la normale ou sur la direction de la force $p\omega$ est encore égale à la hauteur du cylindre oblique $\omega\omega'$. Donc le travail élémentaire de $p\omega$ sera $p\varepsilon$, c'est-à-dire égal et de signe contraire à celui qui avait lieu dans le premier cas; et, comme il en est de même pour tous les éléments ω ou ω_1, nous pouvons conclure que le travail élémentaire total de l'enveloppe sur le gaz a pour valeur $-d\mathfrak{T}$ ou $-p'\,dV - P\,d\zeta$.

Les deux termes qui entrent dans l'expression du travail $d\mathfrak{T}$ ont chacun une signification simple et remarquable. On aperçoit de suite que $P\,d\zeta$ représente le travail du poids de la masse gazeuse (n° 153) pendant son déplacement infiniment petit; pour voir la signification du terme $p'\,dV$, nous appliquerons au gaz, et pour ce même déplacement, le théorème des forces vives (n° 205). Ici l'accroissement de forces vives peut être regardé comme nul, parce que les gaz sont des corps très légers, ayant peu de masse, et parce que nous avons admis l'hypothèse de mouvements assez lents; la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, auxquelles

le gaz est soumis, doit donc également s'annuler. Or, dans le déplacement considéré, ces travaux sont : 1° celui de la pesanteur ou $P\,d\zeta$; 2° celui qu'effectue l'enveloppe ou

$$-p'dV - P\,d\zeta;$$

3° celui des actions intérieures. La nullité de la somme exige que ce dernier ait pour valeur $p'dV$. Le terme $p'dV$ est donc le travail des actions mutuelles entre les molécules du gaz.

Dans les applications usuelles de la formule (8), il arrive ordinairement que le centre de gravité du gaz n'éprouve pas de grands déplacements verticaux; d'ailleurs la grande légèreté des gaz autorise le plus souvent à négliger leur poids en comparaison des pressions exercées à leur surface, comme nous l'avons déjà fait remarquer (n° 296). Alors on pourrait réduire la formule (8) simplement à

$$(9) \qquad d\mathfrak{T} = p'dV.$$

L'expression de $d\mathfrak{T}$ peut s'intégrer dans certains cas particuliers, et l'on détermine alors le travail effectué par le gaz pour un déplacement fini. Nous nous bornerons quant à présent à citer deux exemples.

1° Si l'intérieur de l'enveloppe communique avec un réservoir indéfini à pression p', la pression p' du gaz qu'elle renferme demeure constante pendant que son volume varie de V_0 à V_1. En négligeant le poids du gaz, le travail reçu par l'enveloppe dans le passage de V_0 à V_1 serait

$$\mathfrak{T} = p'\int_{V_0}^{V_1} dV = p'(V_1 - V_0).$$

2° Si l'intérieur de l'enveloppe est sans communication avec l'extérieur, et que le gaz, conservant une température invariable, change à la fois de volume et de pression, conformément à la loi de Mariotte, on aura, en nommant p'_0, p'_1 les valeurs initiale et finale de la pression p', ζ_0, ζ_1, V_0, V_1 les ordonnées ζ et volumes V correspondants,

$$p'V = p'_0V_0 = p_1V_1;$$

la formule (8), mise sous la forme

$$d\mathfrak{T} = p'V\frac{dV}{V} + P\,d\zeta,$$

peut alors s'intégrer, parce que $p'V$ et P sont des constantes, et l'on trouve

$$\mathfrak{T} = p'V\,L\frac{V_1}{V_0} + P(\zeta_1 - \zeta_0)]$$

ou encore, en vertu de l'égalité $p'_1 V_1 = p'_0 V_0$,

$$\mathfrak{T} = p'V\,L\frac{p'_0}{p'_1} + P(\zeta_1 - \zeta_0).$$

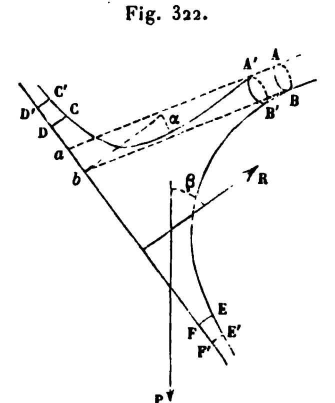
Le produit $p'V$ pourrait se remplacer par $p'_0 V_0$ ou par $p'_1 V_1$; d'ailleurs, comme nous l'avons dit plus haut, on néglige le plus souvent le terme proportionnel au poids P.

299. *Notions succinctes concernant les actions mutuelles d'un solide et d'un fluide, en mouvement l'un par rapport à l'autre.* — Si l'on connaissait complètement le mouvement d'un fluide parfait, on pourrait connaître aussi la pression en chacun de ses points, en se servant des équations de l'hydrostatique modifiées par l'introduction des forces d'inertie, conformément au principe de d'Alembert. La recherche de la pression totale reçue par un solide en contact avec ce fluide ressemblerait alors tout à fait à celle qu'on a indiquée d'une manière générale au n° 266, dans le cas de l'équilibre. Mais on reconnaît bien vite que ce procédé est en réalité inapplicable. En effet, les fluides naturels présentent une certaine viscosité, dont les lois sont trop mal connues pour qu'on puisse en tenir compte. En second lieu, les questions de ce genre se présentent ordinairement sans comporter, comme donnée préalable, la connaissance entière du mouvement du fluide, tout au plus donne-t-on le mouvement qu'il aurait si le solide était supprimé. Par exemple, un courant d'eau existe, et l'on donne la vitesse primitive de ses divers filets; un corps solide est ensuite placé dans ce courant et assujetti au repos absolu. Alors le mouvement des filets est dérangé par la présence de ce corps, et, pour déterminer la pression résultante, il faudrait d'abord

chercher en quoi consiste le dérangement. Or cette question préliminaire n'a pas encore été résolue. Aussi ne peut-on donner sur tout ce qui concerne les actions mutuelles dont il s'agit que des indications bien vagues et bien incomplètes. Dans un seul cas, celui du choc d'une veine liquide contre un plan, on a pu traiter la question théoriquement d'une manière satisfaisante; voici comment.

Considérons un liquide pesant et homogène, sortant d'un vase par un orifice et tombant dans l'air sous forme d'un jet sensiblement parabolique sur une certaine étendue. Ce jet rencontre un plan fixe FD (*fig.* 322) qui l'oblige à se dévier; l'expérience prouve alors que la veine se gonfle aux environs de sa rencontre avec le plan, mais qu'à une certaine distance, à partir de la section AB par exemple, le mouvement reste ce qu'il serait sans la présence de l'obstacle; d'ailleurs, en vertu de l'inflexion subie par les trajectoires en dessous de AB, les filets tendent à devenir parallèles au plan choqué, et nous admettrons qu'effectivement, en tous les points de la surface d'un cylindre droit représenté en coupe par EFCD, les molécules liquides se meuvent avec des vitesses parallèles au plan. Le mouvement est censé arrivé à l'état de permanence. On demande la réaction totale R exercée normalement par le plan sur le liquide dans l'étendue de la base FD du cylindre EFCD, déduction faite de la pression atmosphérique.

Fig. 322.



La question se résout en appliquant au système formé du liquide compris entre AB et le cylindre le théorème général des quantités de mouvement projetées (n° 199). Soient

V la vitesse dans la section AB;
α son angle avec la normale au plan;
β l'angle de celui-ci avec l'horizon;
P le poids du liquide ABCDEF;

Π le poids de l'unité de volume;
Ω la section AB;
dt un temps infiniment petit pendant lequel le système est passé de la position ABCDEF à la position A′B′C′D′E′F′.

La quantité de mouvement de la partie commune A′B′CDEF, étant la même au commencement et à la fin du temps *dt*, disparaît dans l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées durant cet intervalle de temps. Nous projetterons sur la direction même de la force R; alors la projection des quantités de mouvement des molécules comprises dans la tranche annulaire CDEFC′D′E′F′ disparaît aussi, et l'accroissement dont nous parlons se réduit à la projection, changée de signe, de la quantité de mouvement que possède la tranche ABA′B′. Or la masse de cette tranche a pour valeur $\frac{\Pi}{g}\Omega V\,dt$, et sa quantité de mouvement projetée est $-\frac{\Pi}{g}\Omega V^2\,dt\cos\alpha$; il faut donc égaler $\frac{\Pi}{g}\Omega V^2\,dt\cos\alpha$ à la somme des impulsions élémentaires des forces extérieures, projetées sur le même axe.

Nous avons d'abord le poids P, dont la projection sur R est $-P\cos\beta$ et l'impulsion correspondante $-P\,dt\cos\beta$. En second lieu, il y a la pression atmosphérique. Elle s'exerce d'abord sur tout le contour ACBE; elle existe aussi sur AB, puisque cette section appartient à la portion parabolique de la veine; de plus, comme nous cherchons, non pas la réaction totale de la surface FD dans le sens de la normale, mais seulement son excès sur celle qui se produirait si la pression sur FD était partout égale à celle de l'atmosphère, nous devons supposer aussi la pression atmosphérique agissant sur le liquide dans l'étendue FD, car ce serait la force qui, jointe à R, donnera la réaction totale; enfin nous pouvons la considérer également comme agissant sur la surface cylindrique CDEF, car les pressions sur cette surface disparaissent en projection, et leur altération ne produit aucune erreur. De cette manière la pression atmosphérique agit sur tout le contour du système matériel; elle donne donc une résultante et une impulsion nulle (nº 266, 3º). Il ne reste plus après cela que la force R,

dont l'impulsion $R\,dt$ se projette en vraie grandeur. Donc on a

$$\frac{\Pi}{g}\Omega V^2 dt \cos\alpha = -P\,dt\cos\beta + R\,dt,$$

d'où l'on tire l'inconnue

$$R = P\cos\beta + \frac{\Pi}{g}\Omega V^2\cos\alpha. \tag{10}$$

La pression subie par le plan se compose de la pression atmosphérique et de la même force R dirigée en sens contraire. Le premier terme $P\cos\beta$, qui figure dans l'expression de R, représente la composante normale du poids P, c'est-à-dire la pression normale sur le plan, dans le cas où le système ABCDEF solidifié resterait en repos ou glisserait en s'appuyant sur lui. L'autre terme peut se nommer *pression vive* ou pression supplémentaire due à l'existence de la vitesse V; on voit que ce terme est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel au carré de la vitesse. Dans le cas d'un plan vertical choqué horizontalement, il faut faire $\beta = 90°$, $\alpha = 0$; alors R devient égal à la seule pression vive, dont l'expression fort simple est alors $\Pi\Omega\frac{V^2}{g}$, c'est-à-dire le poids d'un cylindre liquide ayant pour base Ω et pour longueur le double de la hauteur due à la vitesse.

L'expression générale $\frac{\Pi}{g}\Omega V^2\cos\alpha$ de la pression vive peut encore s'écrire $\Pi\frac{\Omega}{\cos\alpha}\frac{(V\cos\alpha)^2}{g}$. Sous cette forme, on voit qu'elle est égale au poids d'un cylindre liquide ayant pour longueur le double de la hauteur due à la composante normale de la vitesse, soit $\frac{(V\cos\alpha)^2}{g}$, et pour base $\frac{\Omega}{\cos\alpha}$, c'est-à-dire la portion du plan qu'intercepterait la veine si toutes les molécules se mouvaient en ligne droite à partir de la section AB, en conservant la direction de V.

La section AB occupe une position indéterminée dans la partie parabolique de la veine liquide, et cependant la force R doit conserver évidemment une valeur unique et bien déter-

minée, quoique son expression (10) contienne des quantités P, Ω, V et α variables avec la position de AB. Voici comment on peut vérifier *a posteriori* qu'il en est effectivement ainsi. Nous allons montrer que la différentielle dR est nulle, quand on passe de AB à la section infiniment voisine A'B'. Le produit ΩV, égal au débit, ne varie pas, et l'on a, par conséquent,

$$dR = \cos\beta\, dP + \frac{\Pi}{g}\, \Omega V\, d(V\cos\alpha).$$

Or chaque molécule se meut comme un point matériel isolé, et par suite, en nommant dt le temps employé pour aller de AB à A'B', la vitesse V' dans cette seconde section sera la résultante de V et d'une vitesse verticale $g\,dt$ (n° 15), puisque g est l'accélération totale du mouvement de la molécule sous l'action de son poids. En projetant sur la normale au plan FD, on aurait donc

$$V'\cos\alpha' = V\cos\alpha + g\,dt\cos\beta$$

ou bien

$$d(V\cos\alpha) = g\,dt\cos\beta.$$

D'ailleurs dP est égal à $-\Pi \times$ vol(ABA'B') ou à $-\Pi\Omega V\,dt$. La substitution de ces valeurs de dP et de $d(V\cos\alpha)$ dans l'expression de dR donne bien $dR = 0$ identiquement.

En dehors du cas simple que nous venons d'examiner, la théorie ne peut pas faire connaître exactement la pression exercée sur un solide par un fluide en mouvement relatif; il faut alors avoir recours aux indications de l'expérience. Mais nous n'avons pas à exposer ici les résultats des expériences faites sur ce sujet. Nous nous contenterons de dire que si une surface plane de petite étendue se trouve en mouvement par rapport à un fluide indéfini, qui l'environne de toute part, elle reçoit du fluide, outre la pression hydrostatique, une pression vive excédante, approximativement proportionnelle à son étendue et au carré de la composante normale de sa vitesse relative. Nous remarquerons aussi que, si la surface plane FD (*fig.* 322) était remplacée par une surface concave du côté de la veine, les molécules liquides qui traversent la section cylindrique CDEF auraient une vitesse dont la projec-

tion sur la direction de R ne serait pas nulle; par conséquent on aurait à tenir compte, en appliquant le théorème des quantités de mouvement projetées, de la quantité de mouvement de la tranche annulaire CDEFC'D'E'F', qui s'ajouterait en projection à celle de la tranche ABA'B' et produirait ainsi une augmentation de la force R. Au contraire, cette force serait diminuée dans le cas où la veine choquerait une surface convexe ou un plan trop peu étendu pour la dévier complètement, parce que les molécules liquides conserveraient, après le choc, une vitesse ayant, en projection sur R, le même sens que leur vitesse primitive.

SIXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES MACHINES A L'ÉTAT DE MOUVEMENT. THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES; APPAREILS DESTINÉS A MESURER LE TRAVAIL DES FORCES.

§ I. — Considérations générales sur les machines et les résultats de leur emploi.

300. *Définition des machines; importance que présente le calcul du travail des forces dans les machines; effet dynamique.* — Une machine est un ensemble de corps, dont les uns nous paraissent fixes ([1]) et dont les autres, susceptibles de mouvement, sont destinés à recevoir en quelques-uns de leurs points certaines forces, et à exercer en d'autres points d'autres forces, qui diffèrent ordinairement des premières par leur intensité, leur direction et la vitesse de leurs points d'application.

Il y a toujours une certaine utilité à savoir calculer les forces qui agissent sur les diverses parties d'une machine. Leur connaissance permet de fixer les dimensions des pièces de manière à leur donner une résistance suffisante et des garanties de conservation à peu près indéfinie; en outre, la grandeur de l'effort que la machine permet d'exercer en tel

([1]) Abstraction faite, bien entendu, du mouvement de la Terre dans l'espace.

ou tel point est quelquefois une chose importante pour le résultat qu'on veut obtenir par son emploi. La recherche de ces forces est un problème de Statique, si les machines sont en équilibre ou (dans certains cas particuliers) en mouvement uniforme; on en a vu un assez grand nombre d'exemples dans le Cours de première année (IIIe Partie, Chapitre III). Si les machines sont, au contraire, en mouvement, c'est un problème de Dynamique, qui peut offrir plus ou moins de complication et sur lequel nous ne donnerons ici aucun détail; les déterminations de mouvement ou de réactions mutuelles faites sur la dynamique spéciale des solides (IVe Partie, Chapitres II et III) peuvent servir d'exemple et donner une idée de la marche à suivre pour résoudre les questions de cette nature.

Le plus souvent, ce qui est beaucoup plus important à connaître que les forces elles-mêmes, c'est leur travail. L'emploi des machines dans les arts industriels a bien rarement pour unique but de faire naître un effort de telle ou telle intensité; presque toujours il s'agit de surmonter une résistance et simultanément de déplacer son point d'application. La machine exerce donc un travail sur le corps soumis à son action, et en reçoit un travail de sens contraire; presque toujours aussi, le premier de ces travaux est positif et le second négatif; cependant ce n'est pas une règle sans exception. Quand, par exemple, on descend lentement un fardeau par le moyen d'une corde enroulée sur une poulie, le poids du fardeau fait un travail positif sur le système de la corde et de la poulie, et en reçoit un travail négatif. Mais ce cas est exceptionnel, et, pour plus de simplicité, nous en ferons abstraction dans ce qui va suivre.

On nomme *effet dynamique* d'une machine le travail total, généralement négatif ou résistant, mais pris en valeur absolue, reçu par elle des corps extérieurs qu'on a en vue de soumettre à son action; la même quantité se nomme aussi le *travail utile*.

L'effet dynamique ou travail utile d'une machine mérite une attention particulière, car on peut dire d'une manière générale qu'il donne la mesure du service rendu par la machine. C'est ce que nous allons faire concevoir par un exemple. Suppo-

sons qu'une machine élève dans une journée un poids P d'une matière quelconque (terre, briques, pierres, liquides, etc.) à une hauteur H; si l'on veut arriver au même résultat avec des journées d'ouvriers, il est facile de voir que le nombre N de ces journées et leur prix total en argent varieront proportionnellement à chacun des facteurs P et H, et par conséquent proportionnellement au produit PH ou à l'effet dynamique de la machine. Soient en effet n le nombre d'ouvriers et n' le nombre des journées de chacun d'eux, d'où résulte $N = nn'$. Quand on voudra monter à la même hauteur H non plus le poids P, mais un poids double, triple, quadruple, ..., on pourra le faire dans le même nombre de jours n' pourvu qu'on prenne 2, 3, 4, ... fois plus d'ouvriers; donc alors, H et n' restant constants, n et N auront varié en proportion directe de P. D'un autre côté, s'il s'agissait de monter le même poids P à des hauteurs 2H, 3H, 4H, ..., on serait libre de n'employer toujours que n ouvriers, dont chacun ferait dans sa journée (ou ferait exécuter par un véhicule quelconque) un certain nombre de voyages, en produisant à chaque fois l'élévation d'une partie déterminée de P. Mais la distance à franchir pour chaque voyage devenant 2, 3, 4, ... fois plus grande, l'ouvrier emploiera pour cela 2, 3, 4, ... fois plus de temps; au bout de n' journées on aurait monté seulement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... du poids total P, et pour arriver à l'achèvement de l'opération proposée il faudrait travailler pendant $2n'$, $3n'$, $4n'$, ... journées; donc cette fois, P et n ne changeant pas, n' et N auraient changé dans le même rapport que H. La proposition énoncée se vérifie donc dans notre exemple particulier. On pourrait, par des considérations analogues, reconnaître son exactitude dans le cas où l'on aurait en vue la plupart des grandes opérations de la Mécanique industrielle, comme par exemple le transport horizontal des fardeaux, le polissage ou le sciage des métaux ou des bois, etc.

La cause de l'effet dynamique d'une machine, ce sont les forces qui lui sont appliquées pour produire et entretenir son mouvement, forces dites *motrices*, qui exercent sur elle un travail positif nommé *travail moteur*. Nous allons mainte-

nant nous occuper de la relation entre cette cause et son effet, et pour cela nous appliquerons à la machine, considérée comme système matériel, le théorème général des forces vives (nº 205).

301. *Relation entre le travail moteur d'une machine et son effet dynamique.* — On a dit que les corps soumis à l'action de la machine font sur elle un travail négatif ou résistant, qui est l'effet dynamique ou le travail utile. La résistance qui le produit se nomme la *résistance principale*. Indépendamment de celle-là, il en existe d'autres, dites *résistances secondaires,* qu'un bon constructeur cherche à diminuer autant que possible, sans parvenir à les supprimer entièrement : ce sont celles qui sont produites par les frottements, la raideur des cordes, la communication inutile du mouvement à l'air ou au sol sur lequel repose la machine, la déformation des solides qui la constituent, etc. D'autre part, il y a les forces motrices auxquelles correspond le travail moteur, et enfin la pesanteur, qui agit tantôt comme force motrice et tantôt comme résistance. Afin d'exprimer l'égalité entre la somme des travaux de toutes ces forces et le demi-accroissement de force vive, désignons par

m la masse d'un point de la machine;
v sa vitesse à un instant quelconque;
H la hauteur du centre de gravité de la machine au même instant, en dessous d'un plan horizontal de comparaison;
v_0 et H_0 les valeurs de v et H à l'instant initial;
$\mathfrak{T}_m$, $\mathfrak{T}_e$, $\mathfrak{T}_f$ les travaux accomplis, entre l'instant initial et l'instant quelconque répondant à v et H, par les forces motrices (non compris la pesanteur), la résistance principale et les résistances secondaires, ces travaux étant pris en valeur absolue.

Alors l'équation des forces vives sera

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_e - \mathfrak{T}_f + (H - H_0)\Sigma mg.$$

Le dernier terme du second membre représente le travail de la pesanteur (nº 153); quant à $\mathfrak{T}_e$, ce n'est autre chose que

l'effet dynamique. On en tire la valeur de l'équation précédente, qui donne

$$(1) \quad \mathfrak{T}_e = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_f + (\mathrm{H} - \mathrm{H}_0)\Sigma mg - \frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2).$$

L'effet dynamique est donc égal au travail moteur augmenté du travail de la pesanteur (pris avec le signe de $\mathrm{H} - \mathrm{H}_0$), et diminué : 1° du travail des résistances secondaires, 2° du demi-accroissement de force vive (pris aussi avec son signe algébrique).

Lorsque la machine s'accélère, comme par exemple lors de sa mise en marche, $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2$ est positif et sa moitié se retranche effectivement de l'effet dynamique; l'inverse a lieu quand il y a ralentissement, parce que $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2$ change de signe. Dans le premier cas, une partie du travail moteur s'emmagasine en quelque sorte, sous la forme d'une force vive, dans les masses qui composent la machine; dans le second, au contraire, la machine rend ce qu'elle a reçu et transforme de la force vive en effet dynamique.

Si, au commencement et à la fin d'un intervalle de temps quelconque, la machine se trouve dans la même position et avec les mêmes vitesses, on a

$$(2) \qquad \mathfrak{T}_c = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_f,$$

c'est-à-dire que l'effet dynamique est simplement égal à l'excès du travail moteur sur le travail des résistances secondaires, car alors le travail de la pesanteur et le demi-accroissement de force vive s'annulent tous les deux. La même relation simple doit être conservée quand on considère la marche indéfiniment prolongée de la machine. En effet, les trois termes $\mathfrak{T}_e$, $\mathfrak{T}_m$, $\mathfrak{T}_f$ croissent alors indéfiniment, parce que les forces motrices et les résistances principales ou secondaires existent toujours et ajoutent, pendant chaque élément du temps, aux quantités de travail antérieurement produites par elles, de nouvelles quantités de même ordre que celles qu'on avait eues pendant les éléments précédents; au contraire, la hauteur H et les vitesses v sont renfermées entre des maxima et des minima dont elles ne peuvent sortir, et il y a par conséquent des limites supérieures pour les valeurs

des termes $(H - H_0)\Sigma mg$ et $\frac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2)$. Ces termes tendent donc à devenir nuls en comparaison des trois autres, et à la limite on peut les supprimer sans erreur.

On peut donc dire que l'effet dynamique ou le travail utile est toujours moindre que le travail moteur exercé sur la machine, ce qui montre une différence essentielle entre la transformation des forces et celle des travaux, par l'intermédiaire des machines. Une force peut se multiplier dans un rapport quelconque; même en tenant compte de la déperdition produite par le frottement, on peut, si l'on choisit convenablement les dimensions d'une machine, produire au moyen d'une petite force une autre force aussi grande qu'on voudra; dans le cas du treuil, par exemple, en augmentant de plus en plus celle qui serait le bras de levier de la puissance, on ferait décroître celle qui serait capable de surmonter une résistance donnée, et la diminution ne serait limitée que par les difficultés pratiques de la construction [1]. Mais le travail moteur qu'on donne à une machine s'amoindrit toujours dans sa transformation en travail utile; la machine ne restitue jamais intégralement ce qu'on lui a confié. Il est clair que le rapport $\frac{\mathfrak{T}_f}{\mathfrak{T}_m}$ mesure la perte proportionnelle qu'on fait sur le travail moteur, tandis que le rapport $\frac{\mathfrak{T}_c}{\mathfrak{T}_m}$ mesure la proportion du travail utilisé. Ce dernier rapport est ce qu'on nomme le *rendement;* il est nécessairement plus petit que 1, car dans les meilleures machines $\mathfrak{T}_f$ ne se réduit jamais à zéro. Tout l'art du constructeur consiste à faire le rendement aussi voisin que possible de l'unité.

L'équation (2) montre l'absurdité d'un problème qui a exercé et exerce encore aujourd'hui l'imagination d'un grand

---

[1] On rapporte qu'Archimède a dit : « Avec un levier et un point d'appui, je pourrais soulever le monde (la Terre) ». En toute rigueur Archimède avait raison. Cependant il eût peut-être été plus correct de dire : « je ferais équilibre au monde »; la masse de la Terre est, en effet, tellement considérable, que l'effet dynamique répondant au travail moteur donné par Archimède, pendant toute sa vie, n'aurait pu imprimer à cette masse qu'une vitesse absolument imperceptible.

nombre d'inventeurs, et qu'on a nommé le *mouvement perpétuel.* Il s'agit toujours, pour ces inventeurs, de former un système en mouvement sous la seule action des poids qui le composent et repassant périodiquement, un nombre de fois indéfini, par une position déterminée; en d'autres termes, si l'on considère un nombre entier de périodes, il faut qu'un mouvement s'entretienne et se reproduise constamment sans aucune dépense de travail moteur. Cela n'aurait certainement rien d'absurde ni d'impossible, si les frottements et autres résistances secondaires n'existaient pas; un pendule oscillant autour d'un axe horizontal, symétriquement des deux côtés du plan vertical mené par l'axe, donnerait immédiatement une solution du problème, et il serait facile d'en trouver une foule d'autres. Mais, quand on tient compte des frottements et autres résistances secondaires inévitables, on voit que l'équation (2) est impossible à satisfaire lorsque $\mathfrak{G}_m$ s'annule, même lorsqu'on supprimerait toute résistance principale et qu'on ferait $\mathfrak{G}_e = 0$, et, par conséquent, qu'il n'y a pas de solution pour le problème dont il s'agit.

Mais, si les machines sont impuissantes à créer le travail, et même si elles dépensent en pure perte une partie de celui qu'on leur donne, cela n'empêche pas qu'elles puissent rendre de grands services, en transformant et appropriant à une foule d'usages divers le travail des forces que la nature met à notre disposition. Ces forces sont celles de l'homme ou des animaux, celles qui sont produites par la pesanteur, celles qu'un courant fluide peut exercer sur divers obstacles, celles qui proviennent de l'expansion des gaz ou vapeurs, enfin les forces dues à l'électricité ou au magnétisme. Très souvent elles ne seraient pas immédiatement applicables à telle ou telle opération, mais elles le deviennent au moyen des machines. Par exemple, une chute d'eau ne contient pas en elle-même un moyen direct et immédiat de moudre du blé et de laminer du fer; mais, si l'on emploie la chute d'eau à faire tourner une roue hydraulique et celle-ci à faire tourner des meules ou un laminoir, on rend ces opérations parfaitement exécutables.

302. *Diverses parties d'une machine : récepteur, transmission, outil.* — On distingue assez ordinairement dans une ma-

chine plusieurs parties : 1° le *récepteur*, qui subit directement l'action du *moteur*, c'est-à-dire de l'agent naturel fournissant la force motrice ; 2° la transmission de mouvement du récepteur à la partie suivante; 3° l'*outil*, qui exécute une opération déterminée sur le corps soumis à la machine. Cette distinction n'a au surplus rien de bien essentiel au point de vue de la mécanique théorique. Chaque pièce mobile d'une machine peut être elle-même considérée comme une machine recevant d'un côté un travail moteur et produisant, d'un autre côté, un effet dynamique.

303. *Unité de travail; unité spéciale usitée dans l'étude des machines.* — Le travail est une quantité complexe, produit d'une force par une longueur; l'unité qui sert à l'évaluer résulte donc naturellement du choix des unités de force et de longueur, indiqué précédemment (n°s 2 et 94). Quand les deux facteurs du produit sont tous deux égaux à 1, le produit prend aussi la valeur 1. L'unité de travail est donc le travail effectué par une force de 1^{kg}, déplaçant son point d'application de 1^{m}, dans sa propre direction; cette unité se nomme *kilogrammètre*.

Dans l'étude des machines, on considère souvent la production régulière d'une certaine quantité de travail pendant un temps indéfini, et l'on se fait idée de ce qu'une machine donne ou reçoit, en indiquant les valeurs moyennes de l'effet dynamique ou du travail moteur dans chaque seconde. Rien n'empêcherait sans doute d'évaluer ces quantités en kilogrammètres; mais cela aurait assez ordinairement l'inconvénient de donner des nombres incommodes à cause de leur grandeur. On fait alors ici la même chose que lorsqu'il s'agit des poids et que, au lieu de les exprimer en kilogrammes, on les exprime en quintaux ou en tonneaux, on emploie une unité plus grande. L'usage s'est depuis longtemps introduit de prendre pour unité une quantité moyenne de 75^{kgm} par seconde, produite indéfiniment et régulièrement dans une suite de périodes assez courtes. Cette unité se nomme *cheval-vapeur*, parce qu'on s'en est d'abord servi à l'occasion des machines à vapeur; on emploie aussi la dénomination de *cheval dynamique* ou simplement celle de *cheval*.

Beaucoup de personnes disent à tort : « une machine de la *force* de 50 chevaux, 100 chevaux, etc. » ; il s'agit ici, non d'une force, mais d'un travail. Il est mieux de ne pas détourner le mot *force* de la signification précise qu'on lui donne en Mécanique et de lui substituer un autre mot, par exemple le mot *puissance*, en entendant par là la faculté ou capacité de produire du travail. Ainsi une machine de la puissance de 50 chevaux serait une machine qui mettrait régulièrement et indéfiniment à notre disposition un effet dynamique moyen de 50×75 ou 3750^{kgm} par seconde.

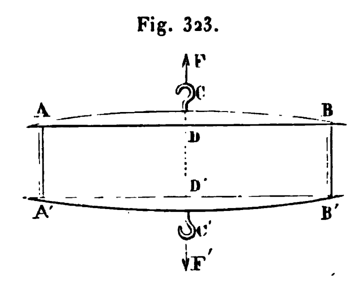
Après ces considérations générales, nous avons à passer en revue les principaux moteurs (c'est-à-dire les sources du travail moteur) en usage dans l'industrie, pour les étudier soit au point de vue du travail qu'il est possible d'en tirer, soit au point de vue du récepteur sur lequel se développe ce travail; exceptionnellement nous étudierons aussi quelques machines rentrant dans la classe des outils. Mais auparavant nous allons nous arrêter quelque temps dans une digression destinée à faire connaître un certain nombre d'appareils destinés à la mesure expérimentale du travail des forces.

§ II. — Appareils destinés à la mesure expérimentale du travail des forces.

304. *Dynamomètre de traction à bande ou à compteur.* — Cet appareil est destiné à mesurer le travail produit par un moteur quelconque, un cheval par exemple, attelé à une voiture. Il comprend d'abord une pièce composée de deux ressorts parallèles en acier AB, A'B' (*fig.* 323), dont les épaisseurs décroissent du milieu aux extrémités, parce qu'on a reconnu qu'on augmente ainsi la flexibilité d'un ressort sans nuire à sa solidité. Les extrémités sont réunies par les tiges AA', BB', qui rendent les deux ressorts solidaires; deux crochets C, C' sont adaptés en leurs milieux. Si l'on considère d'abord à part l'ensemble des deux ressorts, on constate par l'expérience qu'en le soumettant à deux forces F égales et contraires, contenues dans le plan moyen ABA'B' et perpendiculaires à AB, les milieux D, D' des deux lames s'écartent d'une quantité f proportionnelle à F. Après avoir déterminé

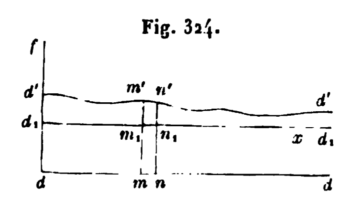
par des essais directs le rapport $k = \frac{f}{F}$, qui varie avec les dimensions des ressorts et la qualité de l'acier employé à leur construction, la mesure de la longueur f donnera le moyen d'évaluer numériquement la force F; et ici se manifeste l'utilité de la disposition indiquée plus haut pour augmenter la flexibilité des ressorts, car plus f est grand pour une force donnée, plus l'instrument est sensible.

Fig. 323.



Concevons maintenant que le système ABA'B' placé horizontalement soit attaché à une voiture par le crochet C, pendant que le moteur qui traîne la voiture agit sur le crochet C', les lignes AB, A'B' étant disposées parallèlement à l'essieu ou aux essieux des roues. La force de traction F, exercée sur C' par le moteur, se transmet à la voiture par l'intermédiaire de C, et en même temps la distance $\overline{DD'}$ entre les milieux des ressorts prend un accroissement f comparativement à sa valeur initiale répondant à $F = 0$. Au-dessous des ressorts se trouve un appareil à bande de papier (n° 89); la bande se meut, relativement à la voiture, d'un mouvement de translation proportionnel au déplacement de celle-ci et dans une direction parallèle à AB; deux crayons attachés l'un en D, l'autre en D', marquent chacun leur trace sur le papier. Lorsqu'on examine la feuille déroulée après l'expérience finie, on y trouve deux lignes dd, $d'd'$ (*fig.* 324), l'une droite, tracée par le crayon D, l'autre courbe tracée par le crayon D'. Si entre ces deux lignes on trace la droite d_1d_1 parallèle à dd et telle que $\overline{dd_1}$ soit égale à la distance initiale $\overline{DD'}$ des ressorts, les ordonnées $\overline{m_1m'}$ de $d'd'$ relativement à cette dernière droite indiqueront les valeurs successivement prises par f. Ces ordonnées sont donc proportionnelles à la force de traction F, et, comme les abscisses x

Fig. 324.



sont proportionnelles aux espaces parcourus par la voiture, il en résulte que le travail de F est proportionnel à l'aire comprise entre la courbe $d'd'$ et la droite d_1d_1. On a, en effet,

$$F = \frac{f}{k},$$

et si l'on nomme k' le rapport des abscisses x (ou des déplacements relatifs du papier) aux déplacements correspondants ξ de la voiture,

$$d\xi = \frac{dx}{k'}.$$

Donc aussi

$$F\,d\xi = \frac{f\,dx}{kk'} \quad \text{et} \quad \int_0^{\xi} F\,dx = \frac{1}{kk'}\int_0^{x} f\,dx,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Nous avons déjà dit que le rapport k se détermine par des essais directs sur le système des deux ressorts. Le rapport k' pourrait se calculer sans peine, si l'on donnait la définition géométrique des engrenages ou poulies qui transmettent au papier son mouvement relatif. On peut déterminer aussi tout d'un coup, par une expérience directe, le produit kk' des deux coefficients. On fait agir sur la voiture, toujours par l'intermédiaire du dynamomètre, une force constante et connue, pendant un parcours déterminé. Les lignes tracées sur le papier feront connaître $\int_0^x f\,dx$ pour cette expérience, et comme on connaît aussi le travail de la force, on en déduira son rapport $\frac{1}{kk'}$ avec $\int_0^x f\,dx$, rapport qui reste le même quand on fait d'autres expériences avec le même dynamomètre et la même voiture.

On peut substituer à l'appareil à bande de papier un système à compteur. La lame antérieure A'B' est solidaire avec une boîte E qui porte à sa partie inférieure une roulette R, mobile autour d'un axe horizontal passant par son centre et perpendiculaire à A'B' (*fig.* 325). Cette roulette s'appuie sur un plateau circulaire horizontal GH, possédant, outre le mou-

vement de translation de la voiture, un mouvement de rotation autour de la verticale de son centre O avec une vitesse angulaire sans cesse proportionnelle à cette translation. Le plateau est placé de telle manière que son point de contact avec la roulette coïncide avec O quand les ressorts ne sont pas tendus. Lorsqu'au contraire on fait agir la force de traction F sur A'B', comme précédemment, la roulette s'écarte du centre et se place à une distance $\overline{OR} = f$, proportionnelle à F. Maintenant, si la voiture se déplace, le plateau tourne en même temps autour de l'axe O, et détermine par adhérence le mouvement de rotation de la roulette autour de son axe; le nombre N de tours de la roulette pendant un déplacement fini est enregistré par un compteur solidaire avec la boîte E (n° 85), et nous allons montrer que ce nombre est proportionnel au travail de la force F dans le même temps.

Fig. 325.

Supposons, en effet, un déplacement élémentaire $d\xi$ de la voiture; le plateau tourne simultanément d'un angle $d\alpha$, en rapport constant p avec $d\xi$, de sorte que $d\alpha = p\,d\xi$; le point de contact de la roulette avec le plateau décrit donc un arc $f\,d\alpha = pf\,d\xi$. Si l'adhérence est suffisante pour empêcher le glissement, la roulette tourne autour de son axe d'une quantité $d\beta$ égale au quotient de $pf\,d\xi$ par son rayon r, car le point de contact doit avoir même déplacement élémentaire comme point de la roulette et comme point du plateau (n° 41). L'angle $d\beta$, égal à $\frac{pf\,d\xi}{r}$, sera donc dans le rapport constant $\frac{kp}{r}$ avec le travail élémentaire $F\,d\xi$, en continuant de nommer k la constante $\frac{f}{F}$. Par suite β ou $2\pi N$ sera dans le même rapport avec le travail fini $\int_0 F\,d\xi$.

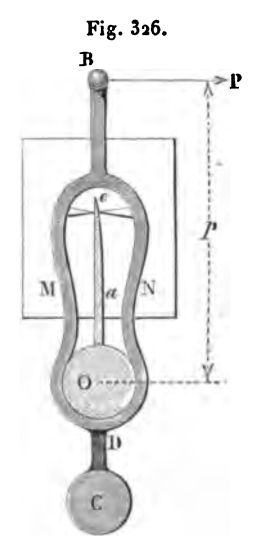
Le rapport du nombre de tours au travail peut encore se calculer dès qu'on a la valeur de k et la définition géomé-

trique du système; ou bien on le déterminerait par une expérience directe, en constatant la valeur de N pour un travail connu d'avance.

Remarquons enfin que le roulement des roues de la voiture sur le sol constitue un mouvement composé : 1° de la translation de leur centre avec une vitesse v égale à celle de la voiture; 2° d'une rotation autour de leur essieu, avec une vitesse angulaire ω proportionnelle à v, car elle est égale au quotient de v par le rayon de la roue. Si donc on fait passer une corde ou courroie sans fin sur une poulie faisant corps avec le moyeu d'une roue, elle communiquera une vitesse angulaire, proportionnelle à v, à un cylindre ayant son axe fixe relativement à la voiture. On partira ensuite de ce cylindre pour établir les engrenages et transmissions convenables, soit pour l'appareil à bande de papier, soit pour le plateau.

305. *Manivelle dynamométrique.* — Cet appareil est destiné à mesurer le travail fourni par un homme qui fait tourner un arbre, en agissant sur une manivelle. La manivelle BMDN, équilibrée par un contrepoids C (*fig.* 326), est folle sur l'arbre O, mais lui transmet le moment moteur Pp, en agissant sur un ressort implanté dans l'arbre et solidaire avec lui. La force P ainsi que son moment Pp sont mesurés par la flexion f à l'extrémité du ressort. En arrière du ressort se trouve un appareil à bande de papier, porté par un châssis animé du même mouvement que la manivelle et l'arbre; un crayon placé à l'extrémité e du ressort trace sur le papier une courbe dont les ordonnées, par rapport à une droite facile à retrouver, donnent les valeurs successives de f. Si la bande de papier possède relativement au châssis un mouvement de translation parallèle à OB et proportionnel au mouvement de l'arbre,

Fig. 326.

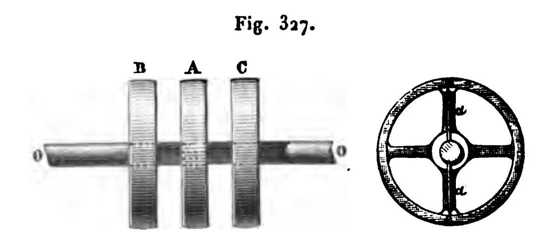


le travail moteur sera encore mesuré, comme dans le dynamomètre de traction à bande (nº 304), par l'aire de la courbe dont on vient de parler. Pour obtenir ce mouvement relatif du papier, le châssis porte un cylindre dont l'axe est parallèle à la direction de P et qui engrène par vis sans fin avec une roue fixe, concentrique avec l'arbre O et folle sur lui; pour l'observateur entraîné avec le châssis, cette roue fixe posséderait une vitesse angulaire égale et contraire à celle de l'arbre O et transmettrait à l'axe du cylindre une rotation proportionnelle. Ce cylindre serait ensuite utilisé pour arriver au but, comme le cylindre E de la *fig.* 145, p. 244 du Volume I.

L'appareil à bande de papier pourrait se remplacer par un compteur, comme on l'a vu plus haut (nº 304).

306. *Dynamomètre de rotation du général Morin.* — Pour mesurer le travail d'un moteur puissant qui agit sur un arbre tournant, au moyen d'une courroie sans fin passant sur une poulie A, le général Morin a employé la disposition suivante : soient A la poulie motrice (*fig.* 327); B une poulie folle sur

Fig. 327.



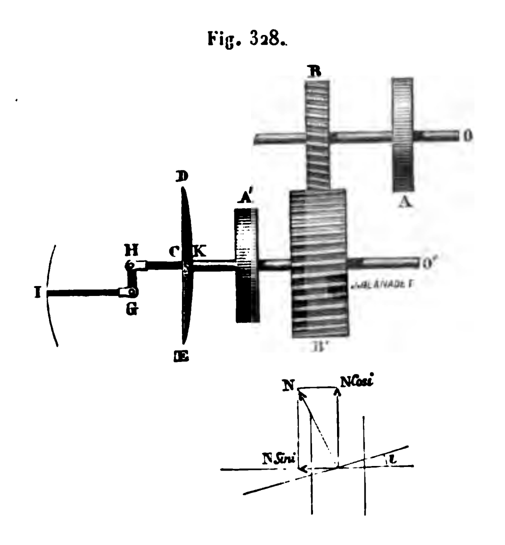
laquelle on fera passer la courroie pour interrompre la communication à l'arbre O; on place à côté une troisième poulie C qui entoure l'arbre par un collier à frottement doux, mais qui est cependant capable de lui transmettre le mouvement, en pressant sur l'extrémité *e* de deux ou quatre ressorts égaux *a*, encastrés dans l'arbre et faisant corps avec lui. La flexion de ces ressorts, proportionnelle au moment moteur, est pour ainsi dire enregistrée d'une manière continue, comme dans la manivelle dynamométrique, par un appareil à bande de papier placé en regard de l'un d'eux; on en dé-

duit le travail de la force motrice exactement de la même manière.

Ici encore il serait possible de substituer un compteur à l'appareil à bande de papier.

307. *Dynamomètre de rotation de M. Bourdon.* — Un arbre O (*fig.* 328) reçoit le mouvement par une poulie motrice A, sur laquelle s'enroule une courroie sans fin; un second arbre O′ doit recevoir le mouvement du premier et subir

Fig. 328.



une résistance agissant tangentiellement à la circonférence d'une poulie A′. Pour être en mesure d'évaluer la force exercée par O sur O′, d'où l'on déduira ensuite le travail transmis du premier arbre au second, M. Bourdon effectue par un moyen particulier la communication de mouvement entre les deux arbres; il emploie deux roues B, B′, constituant un engrenage sans frottement (n° 49, *g*). Si l'on nomme i l'angle que les hélices, intersections des surfaces des dents avec les cylindres primitifs, font avec les génératrices de ces cylindres, la pression mutuelle N des dents en contact pourra se décomposer en une force $N \cos i$ tangente aux circonférences primitives, et une force $N \sin i$ parallèle aux axes O, O′.

L'axe O est muni d'épaulements qui l'empêchent de glisser longitudinalement sous l'action de cette seconde composante, mais l'axe O' peut au contraire glisser sur ses supports, dans le sens de $N \sin i$; son extrémité K vient buter contre un ressort fixé par ses deux bouts D, E, et fait prendre à ce ressort une certaine flexion; d'ailleurs le déplacement de O' ne fait pas cesser le contact des roues B, B', parce qu'on a eu soin de donner à la roue B' une largeur suffisante pour qu'elle reste toujours en prise. Le milieu C du ressort transmet son déplacement à l'extrémité H de la petite branche GH d'un levier coudé GHI, et l'extrémité I de la grande branche GI rend ces déplacements très visibles et faciles à mesurer par son mouvement sur un arc de cercle gradué. Le zéro de cette graduation étant placé à la position qu'aurait le point I dans le cas d'une pression nulle sur le ressort, le nombre n de divisions compris entre cette origine et une position quelconque de I est dans un rapport constant K avec la pression correspondante $N \sin i$. Ce nombre K se détermine sans peine, car on peut déduire de N la flèche f du ressort, et un essai préalable de celui-ci donne le rapport entre f et la pression qui en est la cause.

On pourra donc poser

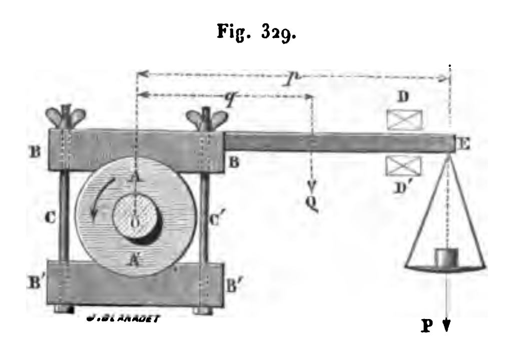
$$N \sin i = K n, \quad \text{d'où résulte} \quad N \cos i = K n \cot i.$$

L'angle constant i étant connu, on arrive ainsi à connaître la force $N \cos i$ qui remplit à l'égard de l'arbre O' le rôle de force motrice. Si l'on suppose maintenant le mouvement arrivé à un état régulier et permanent, la force $N \cos i$ varie peu; pour avoir son travail, qui est le travail moteur reçu par O', il suffira de multiplier le déplacement angulaire de cet arbre par le moment de $N \cos i$ (n° 102, d). En nommant a le rayon de la circonférence primitive de la roue B', le travail serait $2\pi a N \cos i$ pour chaque tour; et, comme on peut compter le nombre de tours pendant un temps déterminé, on en déduirait au besoin le travail dans l'unité de temps.

308. *Frein de Prony.* — Le *frein de Prony* sert à mesurer le travail résistant exercé sur un arbre O (*fig.* 329) par diverses machines-outils qu'il met en mouvement, travail qu'on

peut considérer comme son effet dynamique. On cale d'abord une poulie AA' sur cet arbre; la poulie est ensuite serrée entre deux pièces horizontales BB, B'B', nommées les *mâchoires* du frein, au moyen de deux boulons C, C', filetés en vis à leurs extrémités supérieures et s'engageant dans deux écrous qu'on tourne de manière à produire le serrage. La mâchoire supérieure se prolonge par un levier horizontal BE, passant entre deux arrêts fixes D, D', qui limitent ses oscillations possibles au-dessus et au-dessous de l'horizontale.

Fig. 329.



A mesure qu'on serre les mâchoires contre la poulie, on supprime peu à peu la communication entre l'arbre O et les machines-outils auxquelles il transmet le mouvement; le frein entraîné par la poulie vient buter contre l'arrêt supérieur D et, devenant alors immobile, il crée par son frottement sur la poulie une résistance à la rotation de l'arbre. Quand on a complètement débarrassé celui-ci de toute communication avec les outils et supprimé ainsi toutes les résistances dont on veut connaître le travail, on achève le serrage des boulons et l'on tâtonne jusqu'à ce que l'arbre ait repris la même vitesse angulaire qu'avant la mise en place du frein, et l'on reconnaît qu'on a rempli cette condition quand le nombre de tours dans un temps donné est redevenu le même. Dans cet état le frottement du frein produit nécessairement un travail résistant égal à celui des résistances qu'on a supprimées; car autrement, si le travail moteur reçu par l'arbre ne varie pas (ce que nous admettons), le mouvement serait

devenu plus lent ou plus rapide. Il ne s'agit donc plus que de mesurer le travail produit par le frottement du frein.

A cet effet, le levier supérieur porte un plateau suspendu à son extrémité E; on met successivement des poids dans ce plateau, jusqu'à ce que le levier reste en équilibre, sans recevoir aucune pression de l'un ou l'autre des arrêts D, D'. A la vérité, cet état d'équilibre ne peut guère se réaliser rigoureusement dans la pratique, parce que le frottement varie sans cesse, en raison de l'altération plus ou moins sensible des surfaces frottantes; mais, en augmentant peu à peu les poids posés dans le plateau, on reconnaît que, pour une certaine valeur P' du poids total, le levier reste toujours pressé contre l'arrêt supérieur, tandis que, pour une valeur un peu plus grande P", il resterait toujours en contact avec l'arrêt inférieur, et que pour une valeur intermédiaire P il oscille entre les deux, sans s'arrêter à l'un plus qu'à l'autre. C'est ce dernier état qu'on assimile approximativement à l'équilibre, parce que le frottement est tantôt un peu au-dessus, tantôt un peu au-dessous de l'intensité nécessaire pour équilibrer le poids P.

Nommons maintenant

r le rayon de la poulie;
F l'une des forces de frottement exercées par le frein sur sa circonférence;
p la distance entre le poids P et l'axe de rotation O;
Q le poids total du frein;
q la distance entre la verticale menée par son centre de gravité et le même axe O.

Le frein est supposé en équilibre, et par conséquent la somme des moments des forces extérieures qui le sollicitent doit être nulle relativement à un axe quelconque (n° 129). Choisissons l'axe O, ce qui a l'avantage de faire disparaître les moments des réactions normales de la poulie sur le frein; alors l'équation des moments se réduit à

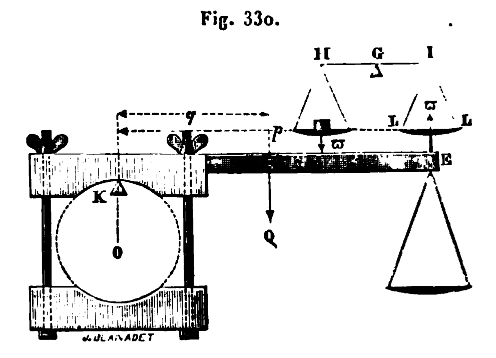
$$(1) \qquad \Sigma F r = P p + Q q.$$

On connaît ainsi le moment total des forces exercées par le frein sur la poulie, car d'une part ces forces sont égales et

contraires aux réactions de la poulie sur le frein (n° 95), et d'autre part le moment des composantes normales est nul, comme on vient de le dire. Pour avoir le travail total exercé par le frein sur l'arbre dans un tour complet, il suffit (n° 102, *d*) de multiplier le déplacement angulaire 2π par le moment ΣFr ou $Pp + Qq$; en multipliant encore par le nombre de tours dans une seconde, on aurait le travail dans chaque unité de temps.

On peut mesurer par une expérience préalable le moment constant Qq qui figure dans la valeur de ΣFr. On prend le frein séparément, après l'avoir dégagé de l'arbre tournant, et on le pose d'abord sur un couteau horizontal K (*fig.* 330);

Fig. 330.



puis on attache son extrémité E au plateau LL d'une balance, située directement au-dessus, et l'on produit enfin l'équilibre du tout en mettant dans l'autre plateau un poids ϖ convenablement déterminé par tâtonnement. Quand l'équilibre existe, les deux parties $\overline{GH}$, IG du fléau de la balance étant égales, il faut que le frein produise sur le plateau LL une force descendante ϖ, et par conséquent il en reçoit une force ascendante de même intensité; l'équilibre du frein donne alors l'équation des moments relativement à l'axe K

$$\varpi p = Qq.$$

Cela permet de mettre l'équation (1) sous la forme

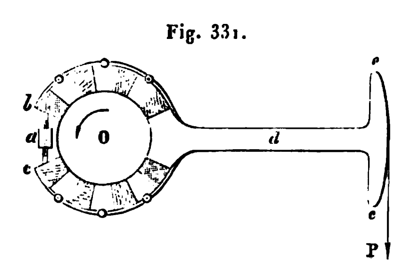
$$\Sigma Fr = (P + \varpi)p;$$

on voit ainsi qu'on peut faire abstraction du poids propre du frein, pourvu qu'on ajoute le poids constant ϖ au poids P trouvé dans chaque mesure expérimentale d'un travail au moyen de cet instrument.

Afin de prévenir l'échauffement et la trop grande altération des surfaces frottantes, pendant l'emploi du frein, on a soin d'humecter continuellement ces surfaces avec de l'eau.

M. Kretz, ingénieur en chef des manufactures de l'État, a introduit dans le frein de Prony diverses modifications, qui ont pour but d'en rendre l'usage plus commode. Il remplace les mâchoires par une suite de voussoirs en bois solidement articulés les uns aux autres, au moyen d'une garniture métallique. Le serrage est produit par un écrou *a*; cette pièce

Fig. 331.

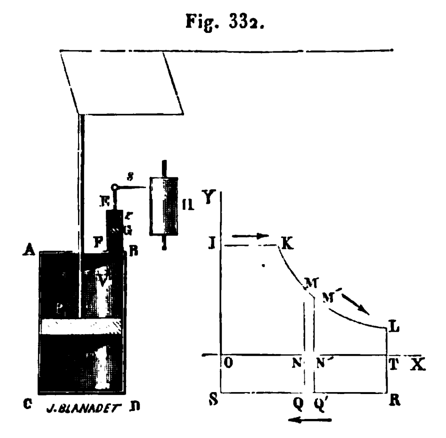


rappelle simultanément les deux voussoirs *b*, *c*, faisant corps avec deux vis filetées en sens contraires, qui s'engagent dans l'écrou; on n'a de cette manière qu'un seul écrou à tourner au lieu de deux. Enfin, le levier horizontal *d* se termine par un arc de cercle *ee* ayant son centre sur l'axe de rotation O; le poids P est suspendu à un lien flexible appliqué contre cet arc, ce qui a l'avantage de laisser à P un bras de levier constant, malgré les oscillations du levier.

309. *Indicateur de Watt.* — Supposons une machine à vapeur à double effet, avec détente et condensation. Au commencement d'une course du piston P dans le cylindre vertical ABCD (*fig.* 332), la vapeur de la chaudière arrive librement sur une des faces du piston, pendant que la face opposée communique avec le *condenseur,* espace limité toujours maintenu à une basse température et à une basse pression; le

piston, plus pressé d'un côté que de l'autre, se met en mouvement. A un certain point de la course, la communication est interrompue entre la chaudière et le cylindre, mais la vapeur déjà entrée continue d'agir sur le piston en se détendant, c'est-à-dire en passant par des pressions décroissantes. A la course suivante, le rôle des deux faces du piston est interverti; celle qui communiquait avec la chaudière est mise en communication avec le condenseur, et réciproquement; le mouvement du piston a lieu en sens inverse. Les mêmes

Fig. 332.



alternatives se reproduisent ensuite indéfiniment. Le mouvement oscillatoire du piston se transmet d'abord à un balancier par l'intermédiaire d'un parallélogramme (n° 73), et ensuite à un arbre tournant, au moyen du système de bielle et manivelle (n° 70).

L'indicateur de Watt sert à déterminer le travail reçu par le piston dans la machine dont on vient de donner une description sommaire; il pourrait également s'adapter à d'autres, mais nous raisonnons sur celle-ci pour fixer les idées. Il consiste en un piston G mobile dans un petit cylindre EF, dont la base inférieure s'ouvre sur le couvercle du cylindre à vapeur ABCD; ce piston, en se déplaçant, comprime ou allonge un ressort à boudin r, attaché d'une part au piston, d'autre part au fond supérieur du petit cylindre. Le ressort est dans l'état naturel quand la pression p sur la face inférieure du

piston G égale la pression atmosphérique p_a, qui agit constamment sur l'autre face; suivant que la différence $p - p_a$ est positive ou négative le ressort se comprime ou s'allonge, et le piston G monte ou descend d'une quantité qui, d'après les expériences faites sur les propriétés des ressorts, est proportionnelle à l'excès de la plus grande des deux pressions sur la plus petite. La tige du piston G porte un crayon ou style s, marquant par sa pointe une trace sur un papier enroulé autour d'un cylindre H, qui tourne autour de son axe avec une vitesse dans un rapport constant avec celle du piston P, et changeant de sens en même temps que cette dernière.

Imaginons que la pointe soit restée en contact avec le papier pendant deux courses consécutives, comprenant en premier lieu une descente du piston P, et ensuite son retour au point de départ; pendant la première course, le dessous du piston G supporte la pression p de la vapeur, supérieure à la pression atmosphérique p_a, et pendant la seconde il est soumis à la pression p' du condenseur, moindre que p_a. Si l'on déroule le papier, on y trouvera une courbe tracée par la pointe, dans son mouvement relatif sur le cylindre, et l'on peut faire, au sujet de cette courbe, les remarques suivantes:

Soient OX le développement de la section droite sur laquelle la pointe se trouverait toujours, si la pression sur les deux faces du petit piston restait constamment égale à p_a, et OY la génératrice sur laquelle est située la position initiale de la pointe, répondant à la position la plus élevée du piston P; prenons ces deux droites pour axes coordonnées. Les ordonnées de la courbe sont égales aux déplacements du piston G, à partir de la position qu'il occupe quand le ressort n'est pas tendu; elle est donc proportionnelle à $p - p_a$ pendant la course descendante, et à $p_a - p'$ pendant la course ascendante, parce que l'espace intermédiaire V entre les pistons P et G est rempli de la vapeur motrice agissant sur le piston P dans le premier cas, et communique avec le condenseur dans le second. Les espaces parcourus par le piston P pendant chaque élément de temps dt sont d'ailleurs proportionnels aux angles décrits simultanément par le cylindre H, c'est-à-dire aux variations dx des abscisses de la pointe, comptées suivant OX.

Il en résulte, comme on va le voir, que le travail exercé, pendant les deux courses, sur la face supérieure du piston, par la vapeur de la chaudière et les gaz du condenseur, est proportionnel à l'aire de la courbe IKLRS tracée par la pointe.

Cette courbe se compose de deux parties, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de OX. Au commencement de la période considérée, la soupape d'admission venant d'être ouverte, la pression augmente rapidement dans l'espace V, devient égale à celle de la chaudière, et conserve ensuite quelque temps une valeur constante représentée par la droite IK parallèle à OX; puis, quand la soupape est fermée et que la détente se produit, la pression dans le même espace V décroît, et le crayon trace l'arc de courbe KL, dont le point L répond à la fin de la première course. Quand la seconde commence, la communication vient de s'établir entre le condenseur et l'espace V; la pression tombe rapidement à la valeur p' et reste sensiblement constante, de sorte que la pointe tracera pendant cette seconde course une parallèle RS à OX, située au-dessous de cet axe. Cette droite est comprise entre les mêmes ordonnées extrêmes que la portion IKL du contour total, parce que le mouvement du cylindre H change de sens en même temps que celui du piston P.

Maintenant désignons par

Ω l'aire de la section transversale du cylindre à vapeur;
l la course du piston;
k le rapport constant entre les différences $p - p_a$ ou $p_a - p'$ et les distances de la pointe traçante à l'axe OX;
k' le rapport constant d'un espace élémentaire dz décrit par le piston P, à l'espace correspondant dx décrit par la pointe parallèlement à OX, rapport égal à $\frac{l}{\overline{\text{OT}}}$.

Considérons deux droites infiniment voisines MQ, M'Q', parallèles à OY, et calculons la surface intermédiaire. On a

$$\text{aire MNN'M'} = \overline{\text{MN}} \times \overline{\text{NN'}} = \frac{p - p_a}{k}\frac{dz}{k'} = \frac{1}{kk'\Omega}(p - p_a)\Omega\, dz,$$

$$\text{aire NQQ'N'} = \overline{\text{NQ}} \times \overline{\text{NN'}} = \frac{p_a - p'}{k}\frac{dz}{k'} = \frac{1}{kk'\Omega}(p_a - p')\Omega\, dz;$$

d'où résulte, par addition membre à membre,

$$\text{aire}\,\mathrm{MQQ'M'} = \frac{1}{kk'\Omega}(p - p')\,\Omega\,dz.$$

Or le travail positif fait par la pression $p\Omega$ de la vapeur, lorsque le piston P parcourt l'élément dz en descendant, a pour valeur $p\Omega\,dz$; le travail négatif fait par la contrepression $p'\Omega$ du condenseur, lorsque le piston parcourt de nouveau le même élément dz en montant, est $-p'\Omega\,dz$; en les réunissant on a pour valeur nette du travail sur la face supérieure du piston, pendant le double parcours de ce même élément dz,

$$(p - p')\,\Omega\,dz.$$

On voit donc que ce travail est dans le rapport constant $kk'\Omega$ avec l'aire MQQ'M', et par conséquent que ce même rapport existe entre le travail pour la période entière et l'aire totale IKLRSI.

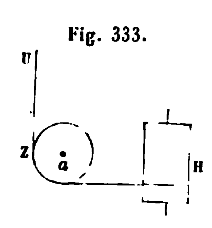
Le rapport k sera déterminé par un essai préalable du ressort, sous des pressions connues; Ω est une donnée immédiate, ainsi que l; $\overline{\mathrm{OT}}$ est donné par le tracé même, et l'on en déduit $k' = \frac{l}{\overline{\mathrm{OT}}}\cdot$ On pourra donc calculer le rapport $kk'\Omega$ d'un travail à son aire représentative.

Dans le calcul ci-dessus, on n'a tenu compte que du travail reçu par l'une des deux faces du piston P pendant une double course; comme la machine est à double effet, l'autre face en recevrait autant pendant le même parcours. Il faut donc doubler le résultat qu'on vient d'obtenir pour avoir le travail total pendant une double course; ou, ce qui revient au même, il faut regarder ce résultat comme égal au travail net reçu par le piston dans une course simple. Cela suppose toutefois qu'on regarde les deux faces du piston comme ayant l'aire Ω, ou qu'on néglige la section transversale de sa tige; les mesures fournies par l'indicateur de Watt n'ont pas assez de précision pour qu'il y ait lieu d'agir autrement.

Transmission de mouvement au cylindre porte-papier. — Pour réaliser cette transmission, Watt enroulait sur le cy-

lindre H un cordon qui, après avoir fait plus qu'un tour entier sur une poulie de renvoi a, remontait verticalement et venait s'attacher en quelque point U de l'appareil, ayant un déplacement identique ou tout au moins proportionnel à celui du piston (*fig.* 333). Pendant que le piston monte, il tend la partie verticale UZ du cordon et oblige la poulie, ainsi que le cylindre, à prendre un mouvement proportionnel à celui de l'extrémité U · Ponr que la transmission ne cesse pas quand le piston descend, le cylindre H est pourvu d'un ressort qui tend toujours à le ramener en sens contraire du mouvement qu'on vient de lui donner; de cette manière le cordon reste toujours tendu et fonctionne comme si les parties non enroulées ne pouvaient fléchir.

Fig. 333.

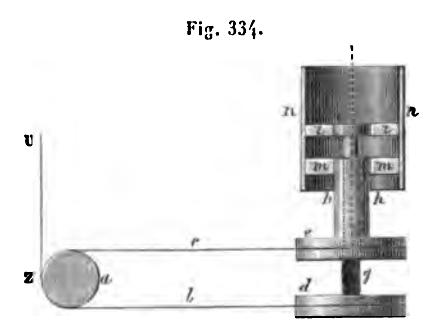


L'indicateur de Watt présente un inconvénient. Comme le papier qui se place devant la pointe traçante est toujours le même, si l'expérience se prolonge pendant plusieurs doubles courses du piston, la pointe marquera plusieurs courbes, qui devraient se recouvrir, en supposant parfaitement établie la périodicité du phénomène qu'on observe. Mais, dans la pratique, cette périodicité ne se réalise qu'à peu près; alors les courbes ne se recouvrent pas tout à fait, et il en résulte que l'ensemble du tracé est quelque peu confus. Voici comment un habile constructeur de Paris, M. Clair, a modifié la transmission ci-dessus, pour faire disparaître cet inconvénient.

D'abord M. Clair présente à la pointe du crayon ou style, non plus une courte bande de papier, mais une bande comme celle de l'appareil décrit au n° 89. Cette bande se déroule d'un premier cylindre, s'appuie sur un second placé en regard de la pointe et s'enroule sur un troisième; un cordon s'enroulant sur un quatrième cylindre fait tourner le précédent par l'intermédiaire d'une fusée et donne au papier, toujours dans le même sens, une translation proportionnelle à la rotation de nn. C'est donc à ce dernier cylindre qu'il faut donner une vitesse angulaire proportionnelle à la vitesse du piston P, mais conservant un sens invariable, malgré les alternatives du mouvement oscillatoire de ce piston.

Pour y arriver, M. Clair conserve d'abord le cordon vertical UZ et la poulie ou tambour *a*, qui en reçoit un mouvement alternatif proportionnel à celui du piston P. Un contrepoids ou un ressort agissant sur *a* oblige le cordon UZ à rester toujours tendu. Deux cordons horizontaux *b*, *c* (*fig.* 334) se détachent de ce tambour en des points diamétralement

Fig. 334.

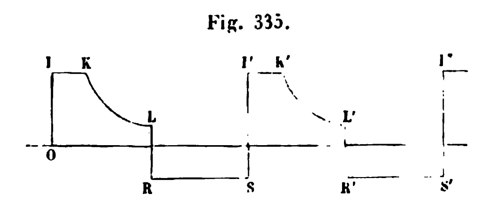


opposés, et vont au contraire s'enrouler du même côté sur deux poulies horizontales et de même rayon, *d*, *e*. La poulie *d* est calée sur l'arbre plein *g*, et sur cet arbre s'articulent les cames *i*, *i* d'un encliquetage Dobo (n[os] 78 et 187); la poulie *e* fait corps avec un arbre creux *hh*, qui enveloppe le précédent et auquel s'articulent les cames *m*, *m* d'un second encliquetage Dobo, tout pareil au premier. Le cylindre *nn*, dont nous avons parlé plus haut, est un cylindre creux, qui forme l'anneau extérieur de ces deux encliquetages. On se rappelle qu'une rotation de l'arbre qui porte les cames se transmet à l'anneau extérieur quand elle est dans un certain sens, et que si elle est de sens contraire elle fait seulement glisser les cames sur l'anneau. Or, quel que soit le sens dans lequel tourne *a*, les mouvements imprimés aux deux poulies *d*, *e* et à leurs arbres étant de sens contraires, il y aura toujours un des deux encliquetages qui tournera dans le sens voulu pour entraîner le cylindre creux *nn*, pendant que les cames de l'autre ne feront que glisser. Donc le cylindre *nn* aura bien une vitesse angulaire toujours de même sens; d'ailleurs elle est proportionnelle à celle du tambour *a* et par suite à la vitesse du piston P.

Quoique sur les deux cordons *b*, *c* il n'y en ait jamais qu'un seul fonctionnant utilement pour la transmission, il est nécessaire de les maintenir toujours tous les deux en état de tension, car un cordon détendu ne serait pas prêt à tirer immédiatement sa poulie à l'instant du changement de sens. Pour cela on emploie des ressorts ou contrepoids agissant sur les poulies *d*, *e*, et les tirant sans cesse dans le sens d'une rotation contraire à celle que leur font prendre les cordons *b*, *c*.

Lorsqu'on examine le tracé obtenu avec cet appareil pendant une double course du piston P, on trouve, au lieu des deux courbes IKL, RS de la *fig.* 332, situées l'une au-dessus de l'autre, deux courbes qui se font suite, comme l'indique la *fig.* 335. Et si l'observation se prolongeait pendant plus de

Fig. 335.



deux courses, on obtiendrait une série d'autres courbes analogues, identiques aux premières si la périodicité se réalisait rigoureusement, ou plus ou moins différentes dans le cas contraire. Il serait facile d'en déduire, comme avec l'indicateur de Watt ordinaire, le travail reçu par une face du piston P dans deux courses consécutives; on aurait par les courbes de la *fig.* 335 plusieurs évaluations de ce travail, et l'on en prendrait la moyenne.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DES MOTEURS ET DES RÉCEPTEURS DESTINÉS A RECUEILLIR LEUR TRAVAIL.

§ I. — Moteurs animés.

310. *Quelques données expérimentales au sujet des moteurs animés.* — Les hommes et les animaux peuvent produire chaque jour une certaine quantité de travail, qui dépend de leur mode d'emploi et de la durée des périodes d'action ou d'inaction. Un grand nombre d'observations recueillies par Navier, Poncelet et autres auteurs ont fait connaître la quantité moyenne relative à chaque mode d'emploi, en supposant un travail indéfiniment prolongé, sans aller au delà de la fatigue que réparent le repos, la nourriture et le sommeil. A chaque manière d'agir répondent d'ailleurs une certaine intensité de l'effort moyen P exercé directement contre la résistance à vaincre, une certaine vitesse V de point d'application de cet effort et une certaine durée t du travail journalier; le travail moyen par seconde est par conséquent PV, et, si t est exprimé en secondes, on aura PVt pour valeur du travail journalier.

Le Tableau suivant reproduit quelques-uns des résultats obtenus.

Résultats d'expériences sur le travail des moteurs animés.

INDICATION DU MOTEUR ET DE SON MODE D'ACTION.	EFFORT moyen, en kilogrammes.	VITESSE moyenne, en mètres par seconde.	DURÉE du travail de chaque jour, en heures.	TRAVAIL par jour, en kilogrammètres.
1° Un homme montant une rampe douce ou un escalier, sans charge, son travail consistant dans l'élévation de son poids.............	65	0,15	8	280800
2° Un homme montant des fardeaux sur son dos, en haut d'une rampe ou d'un escalier, et revenant à vide...........................	65	0,04	6	56140
3° Un homme agissant sur une manivelle........................	8	0,75	8	172800
4° Un scieur de long.............	6	0,75	10	162000
5° Un cheval attelé à une voiture, allant au pas..................	70	0,90	10	2268000
6° Un cheval attelé à une voiture, allant au trot.................	44	2,20	4,5	1568160
7° Un cheval attelé à un manège, au pas........................	45	0,90	8	1166400
8° Un bœuf attelé à un manège, au pas..........................	60	0,60	8	1036800
9° Un mulet attelé à un manège, au pas..........................	30	0,90	8	777600
10° Un âne attelé à un manège, au pas..........................	14	0,80	8	322560

On trouve dans la *Mécanique industrielle* de Poncelet un Tableau plus étendu, dont nous avons extrait les indications précédentes.

On constate que le mode d'action a une influence considérable sur le travail journalier d'un moteur animé; pour l'homme, par exemple, les résultats du Tableau ci-dessus varient du simple au quintuple, et encore n'y avons-nous pas fait figurer un mode d'emploi plus défavorable encore que le second.

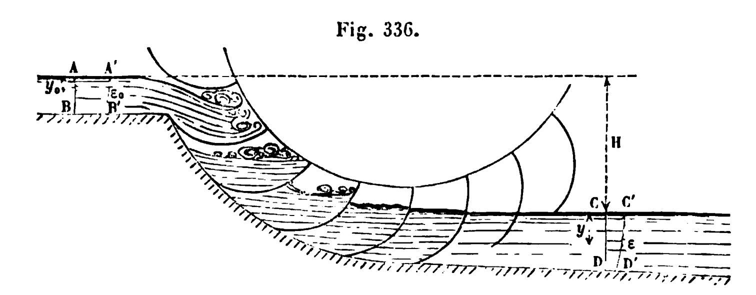
Le premier mode a été employé avec succès à Vincennes, dans des travaux exécutés par le Génie militaire. Il s'agissait de déplacer un certain volume de terre déblayée, en l'élevant à une hauteur moyenne de 13ᵐ. Chacun des ouvriers employés à cette opération montait en haut d'une échelle, puis se plaçait dans un plateau, et faisait remonter une brouette par son poids, pendant qu'il descendait lui-même en se reposant.

Le cheval, dans son mode d'action le plus avantageux, produit 63^{kgm} par seconde ($70 \times 0,90$), ce qui est un peu moins que le cheval-vapeur (nº 303). Il s'en rapproche lorsqu'il tire une voiture et marche au pas. Quand on l'attelle à un manège, il travaille moins bien, à cause du changement continuel de direction ; pour cette raison il convient de donner au manège au moins 13^m de rayon. Malgré cela son travail diminue presque de moitié, et encore faut-il qu'il n'ait pas à surmonter une résistance dont l'intensité varierait beaucoup.

§ II. — Récepteurs hydrauliques.

311. *Puissance absolue d'une chute d'eau; son effet dynamique, son rendement.* — Nous passons maintenant aux récepteurs qui permettent de recueillir le travail de la pesanteur sur une chute d'eau. Considérons un courant qui, entre

Fig. 336.



deux sections transversales peu éloignées AB, CD (*fig.* 336), présente une pente superficielle plus ou moins notable H; son débit, supposé permanent, est de P^{kg} par seconde. En AB les filets sont parallèles et ont une vitesse V_0; en CD le paral-

lélisme existe aussi, avec une vitesse V. A défaut du parallélisme des filets dans l'une ou l'autre section, on pourrait, sans changer les raisonnements et calculs que nous avons en vue, supposer que le mouvement est très lent. Le système matériel liquide ainsi défini, et compris entre les sections AB, CD, peut être considéré comme une machine se renouvelant sans cesse, au moyen des molécules qui entrent par AB, et remplacent exactement celles qui sortent par CD. Le travail moteur est celui de la pesanteur et des pressions exércées sur tout le contour du système; l'effet dynamique sera le travail résistant fait sur l'eau par un appareil quelconque soumis à son action, une roue hydraulique par exemple. Nous verrons tout à l'heure la relation qui existe entre cet effet dynamique et le travail moteur fait par l'eau sur la roue, travail qu'on a plus d'intérêt à connaître, parce que c'est celui dont on profitera pour mouvoir des machines-outils; cherchons d'abord l'effet dynamique de la chute, tel que nous venons de le définir, et appliquons pour cela le théorème des forces vives, pour un déplacement élémentaire répondant à un élément dt du temps.

Dans ce temps, le système passe de la position ABCD à la position A'B'C'D'; comme les masses et les vitesses sont restées constantes dans chaque élément fixe du volume commun A'B'CD, à cause de la permanence [1], l'accroissement de la demi-force vive est égal à la demi-force vive de la tranche CDC'D', moins celle de la tranche ABA'B'; la masse de chacune de ces tranches étant d'ailleurs égale à la masse débitée par le courant dans le temps dt, son expression est $\frac{P\,dt}{g}$,

(1) En toute rigueur, le mouvement de l'eau ne peut pas être permanent, parce que la roue a ses aubes disposées de distance en distance, à des intervalles finis, et que, par suite, elle ne se présente pas toujours de la même manière au courant liquide qui arrive sur elle. Mais les aubes sont identiques entre elles et régulièrement espacées; donc, en supposant le courant permanent avant son entrée dans la roue, les choses se retrouvent dans la même situation au bout du temps très court que met une aube à remplacer la suivante. Il y a, par conséquent, une périodicité très fréquente dans l'état du système, ce qu'on peut assimiler approximativement à la permanence d'un état moyen.

d'où résulte pour l'accroissement de la demi-force vive la valeur

$$\frac{P\,dt}{2g}(V^2 - V_0^2).$$

Calculons maintenant la somme des travaux des forces, à laquelle il faut égaler cette quantité. Dans le calcul du travail de la pesanteur, on sait qu'il est permis de ne pas avoir égard à la partie commune A'B'CD et de raisonner comme si la tranche ABA'B' avait simplement pris la place de CDC'D' (n° 153); le poids de ces tranches est $P\,dt$, et si l'on nomme Y_0, Y les distances respectives de leurs centres de gravité aux niveaux des points A, B, on aura pour expression de ce premier travail

$$P\,dt(H + Y - Y_0).$$

Désignons maintenant par

σ_0 un élément de la surface AB,
y_0 sa distance à l'horizontale de A,
p_a la pression atmosphérique,
Π le poids de l'unité de volume d'eau.

La pression par unité superficielle en σ_0 est $p_a + \Pi y_0$, car la pression varie dans AB suivant la loi hydrostatique, soit parce qu'on suppose les filets parallèles, soit parce qu'on admet la lenteur des mouvements au lieu du parallélisme (n° 277, deuxième et quatrième règle). La pression sur l'élément σ_0 est donc $\sigma_0(p_a + \Pi y_0)$, et cette force fait un travail égal au produit $\varepsilon_0(p_a + \Pi y_0)$ de la pression $p_a + \Pi y_0$ par l'élément de volume ε_0 qu'engendre la surface σ_0 dans son déplacement, ainsi qu'on l'a vu au n° 298, à l'occasion des gaz. Le travail élémentaire des pressions sur toute la section AB sera par conséquent

$$\Sigma\varepsilon_0(p_a + \Pi y_0) \text{ ou bien } p_a\Sigma\varepsilon_0 + \Pi\Sigma\varepsilon_0 y_0,$$

ou encore, attendu que $\Sigma\varepsilon_0 y_0$ peut se remplacer par $Y_0\Sigma\varepsilon_0$ (n° 150), et $\Sigma\varepsilon_0$ ou vol ABA'B' par $\frac{P\,dt}{\Pi}$,

$$P\,dt\left(Y_0 + \frac{p_a}{\Pi}\right).$$

Le système reçoit, au contraire, dans la section CD, des pressions opposées à son mouvement; leur travail négatif s'évaluerait de même et s'exprimerait par

$$-\mathrm{P}\,dt\left(\mathrm{Y}+\frac{p_a}{\Pi}\right).$$

Nous avons ensuite les pressions normales sur le surplus du contour du système, qui ne font aucun travail, comme étant perpendiculaires aux déplacements de leurs points d'application; les forces intérieures feraient aussi un travail nul si l'eau était un fluide parfait (n° 257); car, en vertu de son incompressibilité supposée, elle se déplace sans changement de volume. Mais, comme elle a une certaine viscosité, nous admettrons qu'il en résulte un travail négatif, tant par suite du frottement du système liquide sur les corps extérieurs, que par suite des actions mutuelles entre ses molécules. Nous devons admettre, comme conséquence de l'hypothèse d'un mouvement permanent, que ce travail augmente uniformément avec le temps, de sorte qu'on le représentera par $-\mathfrak{T}_f\,dt$ pendant le déplacement considéré, si $\mathfrak{T}_f$ est sa valeur absolue par unité de temps. Enfin nous n'avons plus à tenir compte que de l'effet dynamique ou travail résistant de la roue sur l'eau; $\mathfrak{T}_e$ étant de même sa valeur absolue par unité de temps, cela fait pour le temps dt un travail $-\mathfrak{T}_e\,dt$.

Le théorème des forces vives donne en conséquence, après suppression du facteur commun dt et réduction,

$$\mathrm{P}\,\frac{\mathrm{V}^2-\mathrm{V}_0^2}{2g}=\mathrm{PH}-\mathfrak{T}_e-\mathfrak{T}_f$$

ou, en résolvant par rapport à $\mathfrak{T}_e$,

$$(1)\qquad \mathfrak{T}_e=\mathrm{P}\left(\mathrm{H}+\frac{\mathrm{V}_0^2}{2g}-\frac{\mathrm{V}^2}{2g}\right)-\mathfrak{T}_f.$$

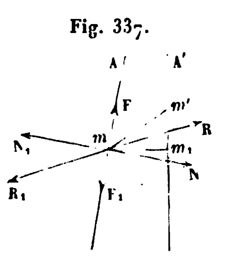
Le multiplicateur de P dans le second membre de la formule (1) se réduit à H, quand les sections AB et CD sont prises dans des bassins ou biefs de départ et d'arrivée, dans lesquels l'eau peut être considérée comme à peu près stagnante. Dans cette hypothèse, les vitesses V_0 et V deviennent

négligeables, et l'effet dynamique $\mathfrak{T}_e$ se réduit à $PH - \mathfrak{T}_f$. Le produit PH se nomme alors *puissance absolue de la chute d'eau;* c'est une limite supérieure de son effet dynamique, puisqu'il faut la diminuer de $\mathfrak{T}_f$ pour obtenir ce dernier. Le rapport $\frac{\mathfrak{T}_f}{PH}$ mesure la perte proportionnelle qu'on fait sur le travail que la chute renferme en elle; $\frac{\mathfrak{T}_e}{PH}$ ou $1 - \frac{\mathfrak{T}_f}{PH}$ exprime au contraire la fraction de ce travail transformée en effet dynamique, et on la nomme le *rendement* de la chute.

Maintenant on peut se placer à un autre point de vue. En même temps que la roue exerce sur l'eau un travail résistant $-\mathfrak{T}_e$, elle en reçoit un certain travail moteur $\mathfrak{T}_m$, et ce dernier est au fond véritablement le seul qui nous intéresse; car, si la roue est capable de tourner et d'effectuer des opérations mécaniques sous l'action de résistances utiles, c'est justement parce que la chute lui a transmis le travail $\mathfrak{T}_m$. Demandons-nous alors quelle relation existe entre $\mathfrak{T}_e$ et $\mathfrak{T}_m$.

Pour la découvrir, considérons une molécule d'eau m qui touche une palette A de la roue (*fig.* 337), et agit sur elle avec une force R qu'on peut décomposer en deux autres, savoir : 1° une force normale N, 2° une force tangentielle F. La roue réagit sur la molécule, en exerçant sur elle une force R_1 égale et contraire à R (n° 95), donnant des composantes N_1, F_1 égales et opposées aux précédentes. Soient $\overline{mm'}$ le déplacement de la molécule dans un temps infiniment petit, pendant que A vient en A'; mm_1 le déplacement simultané du point m de la palette. Le travail de R doit se prendre dans le déplacement $\overline{mm_1}$ et celui de R_1 dans le déplacement mm'; de plus on se rappelle qu'on peut substituer aux travaux de chacune de ces forces la somme des travaux de ces composantes (n° 102). Comme la direction de la palette change infiniment peu, la direction de m_1m' coïncide à la limite avec celle de F; donc les deux déplacements $\overline{mm'}$ et $\overline{mm_1}$ ont même projection sur N, et par suite le travail de cette force est égal à celui de N_1, mais de signe contraire, de sorte que

Fig. 337.



la somme algébrique de ces deux travaux est nulle. Quand on prend les projections des mêmes déplacements sur la direction de F, on voit que leur différence est égale au glissement $\overline{m_1 m'}$ de la molécule sur la palette, et l'on en conclut que la somme algébrique des travaux de F et de F_1 a pour valeur $-F\overline{m_1 m'}$. On a donc, en employant d'une manière générale le symbole $\mathcal{T}Q$ pour exprimer le travail d'une force Q,

$$\mathcal{T}R + \mathcal{T}R_1 = \mathcal{T}N + \mathcal{T}F + \mathcal{T}N_1 + \mathcal{T}F_1 = -F\overline{m_1 m'}.$$

Si l'on fait ensuite la somme des équations analogues pour toutes les molécules, telles que m, agissant sur la roue à un instant donné, on trouvera

$$\Sigma\mathcal{T}R + \Sigma\mathcal{T}R_1 = -\Sigma F\overline{m_1 m'},$$

ou bien, en divisant par dt et nommant u la vitesse de glissement $\frac{\overline{m_1 m'}}{dt}$,

$$\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_e = -\Sigma F u.$$

On voit par ce résultat que, s'il n'y avait aucun frottement de l'eau sur les palettes, ce qui annulerait les actions tangentielles F, le travail moteur $\mathcal{T}_m$ serait égal en valeur absolue à l'effet dynamique ci-dessus calculé, et que dans le cas contraire il y a infériorité de $\mathcal{T}_m$, la différence étant égale au travail du frottement. Dans la réalité, ce frottement de l'eau sur les palettes peut être considéré comme négligeable en comparaison des pressions normales; pour qu'il en fût autrement, il faudrait attribuer à la vitesse de glissement, cause du frottement en question, des valeurs exceptionnelles. On pourra donc regarder le travail moteur reçu par la roue comme approximativement égal à l'effet dynamique de la chute, bien qu'il soit en réalité un peu moindre.

312. *Des moyens d'assurer un bon rendement à une chute d'eau faisant marcher une roue hydraulique.* — Pour utiliser la chute d'eau le mieux possible, il faut en retirer le plus grand effet dynamique et, par conséquent, diminuer autant qu'on le peut le terme négatif $-\mathcal{T}_f$, qui se retranche de la puissance absolue PH de la chute pour donner $\mathcal{T}_e$. Or,

parmi les causes qui produisent ce terme, nous pouvons en signaler deux qui existent toujours plus ou moins dans toutes les roues, et nous indiquerons succinctement comment on atténue leurs effets.

D'abord, si l'eau entre dans la roue et peut en conséquence agir sur elle, c'est qu'elle possède, à son point d'entrée, une certaine vitesse relative w; or, dans la plupart des cas, cette vitesse donne lieu à une agitation tumultueuse et à de grandes déformations de la masse liquide, d'où résulte un travail notable des forces de viscosité. Le phénomène étant beaucoup trop compliqué pour qu'on puisse le soumettre à une analyse exacte, on est obligé de se contenter d'une hypothèse plus ou moins plausible, pour arriver à l'évaluation de ce travail. On admet que les molécules d'eau entrant dans la roue sont réduites instantanément au repos relatif par les actions qu'elles reçoivent de la part du liquide entré précédemment. Il faut, en conséquence, que ces actions, qu'on assimile à des forces instantanées (n° 195), produisent un travail négatif $-\varpi\frac{w^2}{2g}$ (n° 205) sur une molécule de poids ϖ et de masse $\frac{\varpi}{g}$, dans son mouvement relatif, pendant qu'elle passe de la vitesse w à la vitesse o. Le travail relatif des forces ordinaires, de même ordre que la pesanteur, est négligeable, parce que le déplacement est censé nul. En faisant la somme de ces travaux négatifs $-\varpi\frac{w^2}{2g}$ pour toutes les molécules composant le poids P qui entre dans la roue pendant l'unité de temps, on obtient le total $-P\frac{w^2}{2g}$; et si, au lieu de considérer le travail dans le mouvement relatif, on le prenait dans le mouvement absolu, le résultat serait le même, car il s'agit ici du travail d'actions mutuelles entre les molécules d'eau, et l'on a vu (n° 128) qu'il dépend de la quantité dont varient les distances entre ces molécules, mais non de leurs déplacements absolus. Ainsi donc, d'après l'hypothèse faite en commençant, la quantité $\frac{Pw^2}{2g}$ serait l'un des termes à comprendre dans $\mathfrak{T}_f$.

Il y a donc, en général, intérêt à faire entrer l'eau avec peu

de vitesse relative. Cependant cela n'est pas nécessaire quand la direction de w est tangente aux parois solides que l'eau vient rencontrer, et que la disposition particulière des appareils permet au liquide introduit de continuer son mouvement relatif dans la roue, sans qu'il rencontre sous un angle fini d'autres parois, contre lesquelles il produirait un choc. On n'a plus à craindre alors l'agitation tumultueuse dont nous avons parlé.

Supposons, en second lieu, que l'eau sortant de la roue possède encore une vitesse absolue v', et qu'elle soit déposée dans un bief de niveau invariable, où elle perd rapidement cette vitesse et passe à l'état de liquide stagnant. Si l'on appliquait à une molécule quelconque de cette eau le théorème de Bernoulli généralisé (n° 276), entre son point de sortie où la vitesse est v' et le point où elle est réduite au repos, la charge étant nulle parce que l'équilibre existe approximativement dans le bief, on en conclurait que la molécule éprouve une perte de charge ζ égale à $\frac{v'^2}{2g}$, car l'équation (2) du n° 276 deviendrait

$$-\frac{v'^2}{2g} = -\zeta.$$

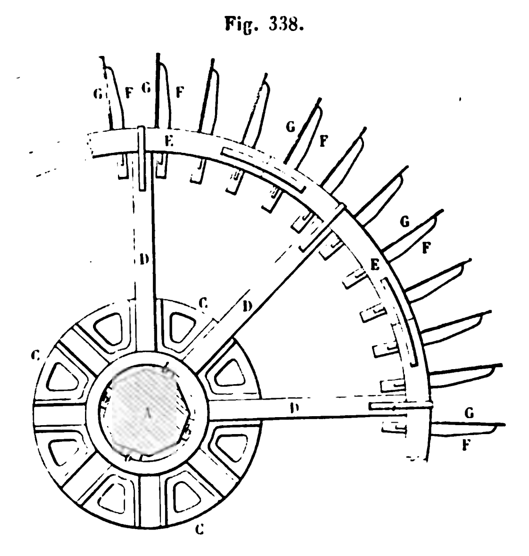
Donc cette molécule aurait subi un travail résistant des orces de viscosité, égal à son poids multiplié par ζ ou $\frac{v'^2}{2g}$, ce qui donne, pour l'ensemble des molécules composant le poids P, un total $-P\frac{v'^2}{2g}$, c'est-à-dire un autre terme $P\frac{v'^2}{2g}$ à comprendre dans $\mathfrak{T}_f$. On voit par conséquent qu'on a intérêt à réduire v' autant qu'on le peut.

Généralement les considérations qu'on vient de présenter se résument en disant que, dans un bon récepteur hydraulique, *l'eau doit entrer sans choc et sortir sans vitesse.* On pourrait encore ajouter qu'il est bon de ne pas la faire couler rapidement dans des canaux trop étroits et présentant des changements brusques de section, car cette circonstance entraînerait des pertes de charge plus ou moins sensibles, et à ces pertes de charge répondraient des travaux produits par les forces de viscosité.

Après ces considérations générales, nous allons étudier en particulier quelques-unes des roues hydrauliques les plus usitées, en commençant par celles qui tournent autour d'un axe horizontal.

313. *Roue en dessous à aubes planes, emboîtée dans un coursier.* — Les roues dont il s'agit sont le plus souvent construites en bois. Un arbre A (*fig.* 338) porte une espèce de collier *c* en fonte, appelé *tourteau,* qui est calé au moyen de

Fig. 338.



tasseaux de bois *b*. Des bras D entrent dans des rainures ménagées sur le tourteau, et lui sont reliés par des boulons : ces bras servent à supporter une couronne EE, dont les segments sont assujettis entre eux et aux bras par des ferrures. Sur la couronne s'implantent les *coyaux* F, F, ..., petites pièces de bois régulièrement distribuées tout le long de sa circonférence et destinées à soutenir les aubes G, G. ...., lesquelles sont des planches de $0^m,02$ à $0^m,03$ d'épaisseur, situées dans des plans passant par l'axe de la roue et occupant toute la largeur de celle-ci. Pour les roues qui ont peu de largeur, on établit seulement deux systèmes de tourteau,

bras, couronne et coyaux, ce qui suffit à donner aux aubes un appui convenable; pour les roues très larges, on peut mettre trois de ces systèmes ou un plus grand nombre.

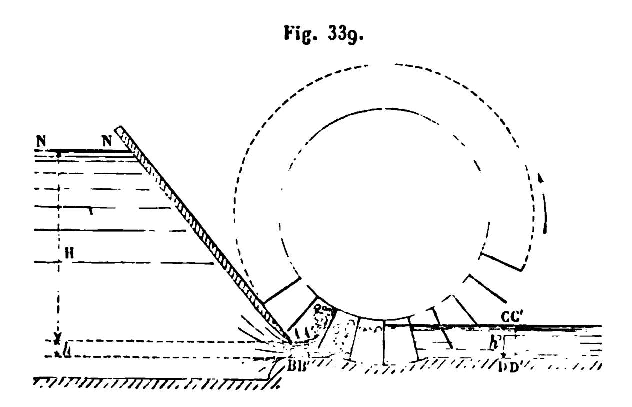
Le nombre des aubes est ordinairement multiple de celui des bras, afin d'éviter des difficultés d'assemblage qui pourraient se présenter dans le cas contraire, si un coyau arrivait juste en prolongement d'un bras. Dans les roues d'un diamètre de 3^m à 5^m, chaque tourteau porte six bras; on en met huit si le diamètre est plus grand. L'espacement des aubes peut être de $0^m,35$ à $0^m,40$ environ; leur profondeur dans le sens du rayon reçoit une valeur un peu supérieure, comme $0^m,60$ ou $0^m,70$ par exemple.

La roue se meut dans un coursier compris entre deux murs verticaux, dont la distance diffère aussi peu que possible de la longueur des aubes dans le sens parallèle à l'axe. Le fond de ce coursier, dans sa partie située au-dessous de la roue, présente un profil sensiblement rectiligne et horizontal; cependant il y a vers l'aplomb de l'arbre une certaine longueur avec un profil circulaire très rapproché de la circonférence extérieure de la roue, afin que l'eau introduite dans la roue soit pendant quelque temps emprisonnée dans l'intérieur des aubes.

Avant d'entrer dans la roue, l'eau sort du bief d'amont sous une vanne inclinée de même largeur que le coursier et levée d'une hauteur h, en général assez petite et comprise entre $0^m,15$ et $0^m,20$. Dans la section AB précédant immédiatement la roue (*fig.* 339), la veine forme un faisceau horizontal de filets parallèles, avec une vitesse v due à la hauteur H entre le point A et le niveau NN du bief (n° 281). Après le mouvement tumultueux qui résulte de son choc contre les aubes, nous admettons que l'agitation se calme progressivement et que l'eau se retrouve en CD, au delà de la roue, sous la forme d'un autre faisceau de filets horizontaux parallèles, ayant une profondeur h' et une vitesse v'; cette dernière doit peu différer de la vitesse à la circonférence de la roue (ou plus exactement de la vitesse au milieu de la hauteur immergée des aubes), parce que l'eau emprisonnée dans la roue a dû arriver au repos relatif, pourvu que la partie circulaire du coursier ne soit pas trop courte.

Afin de déterminer la force résultante exercée par l'eau sur la roue, et son travail, peu différent de l'effet dynamique de la chute (n° 311), nous appliquerons au liquide ABCD le théorème des quantités de mouvement projetées (n° 199) sur un axe horizontal parallèle à v et v'. Soit dt un élément du temps pendant lequel ABCD vient en A'B'C'D'; la partie commune A'B'CD ayant même quantité de mouvement au commencement et à la fin du temps dt, l'accroissement de la quantité

Fig. 339.



de mouvement projetée est égal à la différence des quantités de mouvement des tranches CDC'D' et ABA'B', c'est-à-dire à

$$\frac{P\,dt}{g}(v'-v),$$

en nommant P le poids débité par le courant dans l'unité de temps. Il faut égaler cet accroissement à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur la même direction. Or la projection du poids et de son impulsion est nulle; la résistance opposée au courant par la roue résulte de pressions exercées par les plans des aubes, sensiblement verticaux dans la portion immergée; c'est donc une somme de forces horizontales, et, en la nommant F, on aura $-F\,dt$ pour l'impulsion correspondante, qui se projette en vraie grandeur. Il ne reste plus que les pressions exercées sur toute la surface limitative du système, pressions dont nous pouvons retrancher partout la pression atmosphérique p_a, parce que son action sur un

contour fermé donne une résultante nulle (n° 266, 3°); il suffit d'avoir égard, en chaque point, à l'excès de la pression réelle sur p_a. Cet excès est nul pour la surface libre de l'eau; pour le fond et les parois latérales du coursier, il ne produit que des forces exactement ou à peu près normales à l'axe de projection. Finalement nous n'avons à nous en occuper que pour les sections AB et CD. Soient

l la largeur commune de la roue et du coursier;
p l'excès sur la pression p_a, en un point de AB situé à la profondeur z au-dessous de A;
Π le poids de l'unité de volume d'eau.

Les pressions variant dans la section AB suivant la loi hydrostatique, à cause du parallélisme des filets (n° 277, quatrième règle), on aura généralement

$$p = \Pi z;$$

la résultante des pressions élémentaires sur la surface AB sera égale au produit de cette surface ou de lh par la pression $\frac{\Pi h}{2}$ du liquide, au point en contact avec son centre de gravité (n° 264), lequel est à la profondeur $z = \frac{h}{2}$, puisque la surface AB est un rectangle. La pression totale a donc pour valeur $\frac{1}{2}\Pi l h^2$; on obtiendrait de même une résultante en sens contraire, égale à $\frac{1}{2}\Pi l h'^2$, sur la section CD, ce qui fait au total une impulsion exprimée par

$$\frac{1}{2}\Pi l\,(h^2 - h'^2)\,dt.$$

Le théorème des quantités de mouvement donne par suite, en supprimant partout le facteur dt,

$$\frac{P}{g}(v' - v) = -F + \frac{1}{2}\Pi l\,(h^2 - h'^2),$$

d'où l'on tire la valeur de la force F

$$F = \frac{P}{g}(v - v') - \frac{1}{2}\Pi l\,(h'^2 - h^2).$$

Cette force est égale à celle que la roue reçoit de l'eau, en sens contraire de celle qu'elle exerce elle-même (n° 93), c'est-à-dire dans le sens de son propre mouvement. Considérée comme agissant sur la roue, cette force résulte d'actions élémentaires appliquées en des points qui ont tous à peu près une même vitesse v'; son travail dans l'unité de temps est donc Fv', soit

$$(1) \qquad \frac{P}{g}v'(v-v') - \frac{1}{2}\Pi l v'(h'^2-h^2),$$

ce qui fait connaître $\mathfrak{T}_m$ et approximativement $\mathfrak{T}_e$ (n° 311). L'expression précédente se transforme en remarquant que les tranches ABA'B', CDC'D' ont des volumes égaux, puisque ces volumes sont les excédents des volumes ABCD, A'B'C'D' d'une même masse d'eau, sur la partie commune A'B'CD; l'égalité s'exprime par la relation

$$(2) \qquad lhv\,dt = lh'v'\,dt \quad \text{ou} \quad hv = h'v'.$$

Or l'expression (1) de $\mathfrak{T}_m$ ou $\mathfrak{T}_e$ peut s'écrire

$$\mathfrak{T}_e = \frac{P}{g}v'(v-v') - \frac{1}{2}\Pi l h h' v'\left(\frac{h'}{h} - \frac{h}{h'}\right);$$

donc, en remarquant que $lh'v'$ est le volume et Πlhv le poids P débité dans l'unité de temps, et substituant en outre à $\frac{h'}{h}$ la valeur $\frac{v}{v'}$ tirée de (2), il viendra

$$(3) \qquad \mathfrak{T}_e = \frac{P}{g}v'(v-v') - \frac{1}{2}Ph\left(\frac{v}{v'} - \frac{v'}{v}\right).$$

On peut, dans cette valeur de l'effet dynamique, considérer P, v et h comme des données invariables qui définissent le courant liquide arrivant sur la roue, et demander à quelle vitesse v' de la roue répondra le maximum de $\mathfrak{T}_e$. On dispose de v' entre certaines limites, car la valeur de cette vitesse dépend de la résistance utile que la roue doit surmonter et qu'on peut faire varier à son gré; si cette résistance est très grande, la roue ne pourra tourner, et, v' étant nul, il en sera de même du travail moteur Fv'; si cette résistance disparais-

sait, v' se rapprocherait beaucoup de v, et serait même égale à v en négligeant les résistances secondaires, ce qui annulerait (n° 310) encore Fv', puisque la force F deviendrait nulle. Cherchons, entre ces deux limites $v' = 0$, $v' = v$, la meilleure valeur de v', ou, ce qui revient au même, la meilleure valeur du rapport $\frac{v'}{v} = x$. En faisant $v' = vx$ dans l'équation (3), elle devient

$$\mathcal{E}_e = \frac{Pv^2}{g} x(1-x) - \frac{1}{2} Ph\left(\frac{1}{x} - x\right)$$

ou bien

$$\mathcal{E}_e = \frac{Pv^2}{2g}\left[2x(1-x) - \frac{gh}{v^2}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right].$$

Le maximum demandé répond à celui du facteur entre crochets, lequel facteur contient, outre la variable x, un paramètre $\frac{gh}{v^2}$, constant dans chaque roue, mais pouvant changer d'une roue à l'autre. Ce paramètre est toujours petit, car on a

$$v^2 = 2gH \quad \text{et par suite} \quad \frac{gh}{v^2} = \frac{h}{2H};$$

or h ne dépasse guère $0^m,20$ et il est rare que H soit moindre que 1^m; donc $\frac{gh}{v^2}$ est plus petit que 0,10, sauf des circonstances exceptionnelles. Quand on se donne numériquement la valeur de ce rapport, il est facile d'avoir le maximum de $\mathcal{E}_e$; en égalant à 0 la dérivée du facteur variable, on a pour déterminer x l'équation

$$2 - 4x + \frac{gh}{v^2}\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0,$$

qui se résout par tâtonnement. Si l'on attribue successivement à $\frac{gh}{v^2}$ les valeurs

0,00, 0,05, 0,10,

on en déduit les valeurs correspondantes de x

0,500, 0,553, 0,595,

et celles du rapport de $\mathcal{E}_e$ à $\frac{Pv^2}{2g}$

$$0,500, \quad 0,431, \quad 0,373.$$

L'expérience conduit à un résultat un peu différent, en ce qui concerne la meilleure valeur de $\frac{v'}{v}$; au lieu d'une valeur supérieure ou au moins égale à 0,5, elle indique une valeur plus petite que ce nombre et voisine de 0,4. Cela tient sans doute à ce que, si la roue tourne vite, l'eau ne reste pas assez longtemps emprisonnée dans les aubes pour bien perdre son excès de vitesse $v - v'$, et sort alors avec une vitesse v'' supérieure à la vitesse v' de la roue. Cette circonstance tend à diminuer la force F, dont le premier terme $\frac{P}{g}(v - v')$ devrait être remplacé par $\frac{P}{g}(v - v'')$. Par suite, la valeur (3) de $\mathcal{E}_e$ se trouve affectée d'une erreur en plus, qui croît avec v', et dès lors il n'y a rien d'étonnant à ce qu'elle nous conduise à évaluer trop haut le meilleur rapport $\frac{v'}{v}$. L'expérience fait d'ailleurs connaître que le rendement pratique d'une chute d'eau, avec ce genre de roues, dépasse rarement 0,35 et tombe quelquefois à des chiffres moindres.

Il est à remarquer que, si l'on voulait se livrer à une étude théorique sur le rendement, on ne devrait pas considérer $\frac{\mathcal{E}_e}{PH}$ comme étant ici sa véritable expression. La chute H doit se mesurer entre des biefs où l'eau reste à peu près stagnante (n° 311); il faudrait donc prendre la hauteur du niveau NN, non pas au-dessus du point A (*fig.* 339), mais au-dessus d'un bief situé après la roue, dans lequel l'eau ne posséderait plus de vitesse appréciable. On serait alors entraîné à discuter les positions possibles du niveau de ce bief et leur influence sur le rendement. Cette discussion ne pouvant se faire bien complètement sans recourir à des théories qui ne rentrent pas dans le programme du Cours, nous nous dispenserons de l'aborder.

Donnons seulement, pour terminer ce que nous avons à

dire sur la roue en dessous à aubes planes, la raison de deux dispositions indiquées plus haut.

1° L'orifice de la vanne du bief d'amont doit être placé près de la roue, en inclinant cette vanne, parce que, s'il en était différemment, l'eau coulerait avec une grande vitesse sur un canal de longueur notable, avant d'arriver à la roue. Le frottement de ce canal croîtrait proportionnellement à sa longueur ainsi que la perte de travail correspondante.

2° La hauteur h doit être prise entre $0^m,15$ et $0^m,20$. Une trop petite épaisseur de la lame d'eau donne relativement de l'importance au jeu inévitable entre la roue et le coursier, jeu qui débite en pure perte une partie de l'eau motrice. Une trop grande épaisseur aurait aussi des inconvénients. Si l'on fait $\frac{v'}{v} = 0,4$, l'équation (2) donne

$$\frac{h'}{h} = \frac{1}{0,4} = 2,5,$$

et, pour $h = 0^m,20$, on aurait déjà

$$h' = 0^m,50.$$

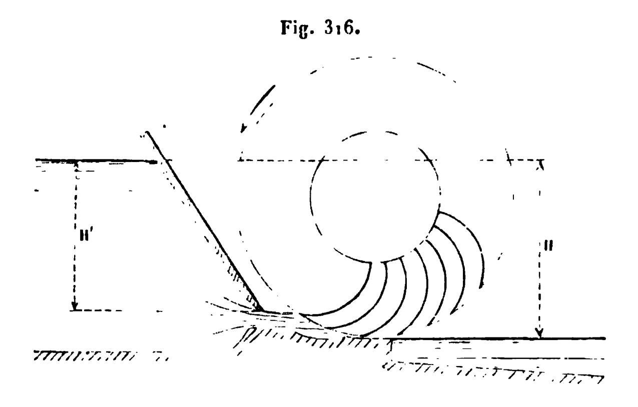
Or il n'est pas bon que l'immersion des aubes dépasse notablement cette hauteur de $0^m,50$, car les aubes prendraient alors une inclinaison sensible en sortant de l'eau et tendraient à soulever le liquide, ce qui créerait une résistance nuisible au mouvement de la roue. Les limites $0^m,15$ et $0^m,20$ ont été conseillées par Belanger.

314. *Roue Poncelet.* — La roue en dessous à aubes planes (nº 313) ne remplit pas les conditions d'un bon récepteur hydraulique (nº 312); à son entrée dans la roue, l'eau vient choquer directement les aubes, et elle les quitte avec une assez grande vitesse. Poncelet s'est proposé d'éviter ces inconvénients, tout en conservant à la roue son caractère spécial, qui est de marcher rapidement; à cet effet, il a imaginé les dispositions suivantes :

Le fond du bief supérieur se raccorde avec le coursier, dont le profil se compose d'une droite inclinée à $0^m,10$ par mètre, suivie d'une partie courbe (*fig.* 340). La droite forme

une pente du côté de la roue et son prolongement serait tangent à la circonférence extérieure de celle-ci ; elle se termine aux environs du point d'introduction de l'eau. La partie courbe se compose d'abord d'une courbe particulière sur le tracé de laquelle on reviendra plus loin; à la suite se trouve un arc de cercle aussi rapproché que possible de la circonférence extérieure, d'un développement un peu supérieur à l'intervalle de deux aubes consécutives, puis vient un approfondissement brusque destiné à faciliter le dégorgement de la roue dans le bief d'aval, dont le niveau affleure à peu près le point le plus bas de la roue.

Fig. 316.



L'eau arrive dans le coursier en passant sous une vanne inclinée de 30° à 45° environ sur la verticale, afin de diminuer la longueur comprise entre l'orifice et la roue; les bords de l'orifice sont arrondis, pour éviter les remous causés par les changements brusques de direction et le travail résistant qu'ils produisent.

Les aubes sont assemblées entre deux couronnes annulaires qui empêchent l'eau de se déverser latéralement; l'écartement intérieur de ces couronnes dépasse de quelques centimètres la largeur de l'orifice laissé libre par la vanne. Les aubes sont courbes; elles coupent la circonférence extérieure sous un angle de 30°, et la circonférence intérieure sous un angle à peu près droit. Il y en a ordinairement 36 pour les roues de 3^m à 4^m de diamètre, et 48 pour celle de 6^m à 7^m.

La théorie exacte de cette roue présentant de trop grandes difficultés, on ne la fait que moyennant des hypothèses simplificatives. D'abord on considère l'eau qui pénètre dans l'intervalle entre une aube et la suivante comme un simple point matériel, mobile sans frottement dans l'intérieur de la roue. On suppose de plus que la vitesse absolue de ce point est dirigée suivant une horizontale perpendiculaire à l'axe de rotation et passant au point le plus bas de la roue; enfin les aubes sont censées se raccorder tangentiellement avec la circonférence extérieure. Soient maintenant v la vitesse absolue de l'eau à son entrée dans la roue, et u la vitesse de la roue sur cette circonférence; le point matériel dont nous avons parlé arrivera sur la partie inférieure de l'aube avec la vitesse relative $v - u$, en vertu de laquelle il va se mouvoir dans le canal formé par deux aubes consécutives. Pendant ce mouvement relatif de très courte durée, les aubes s'écartent très peu du point le plus bas de la roue, et si le rayon de celle-ci est assez grand, on peut assimiler leur mouvement d'entraînement à une translation horizontale, qui sera d'ailleurs uniforme quand la roue sera parvenue à son fonctionnement régulier. Alors les forces apparentes du mouvement relatif sont nulles (n° **113**); le point va monter le long de l'aube en vertu de sa vitesse relative initiale $v - u$, et s'élèvera jusqu'à une hauteur $\frac{(v - u)^2}{2g}$, à laquelle répond une vitesse relative nulle, comme on le reconnaît immédiatement par l'application du théorème des forces vives; puis il redescendra en repassant par les mêmes vitesses en sens inverse. Donc il sortira de la roue avec la vitesse horizontale $v - u$, de sens contraire à celle qu'il avait à son entrée; sa vitesse absolue v' à la sortie sera (n° 28) la résultante de la vitesse d'entraînement u et de la vitesse relative $v - u$, directement opposée à la première, et l'on aura par conséquent

$$v' = u - (v - u) = 2u - v,$$

d'où il résulte que v' sera nulle si la vitesse u à la circonférence extérieure de la roue est égale à $\frac{v}{2}$, valeur qu'on peut toujours lui faire prendre par un choix convenable de la ré-

sistance utile, comme on l'a dit dans une autre occasion (nº 313).

On aurait ainsi réalisé les deux conditions principales d'une bonne roue hydraulique, puisqu'on aurait évité le choc à l'entrée en introduisant l'eau suivant une direction tangente aux aubes, et que la vitesse de sortie serait réduite à zéro. Il est facile de constater que le rendement devrait alors être voisin de l'unité. L'absence de choc rendant négligeable le travail dû à la viscosité du liquide, le poids P débité par seconde aurait dû recevoir un travail résistant produit par les seules actions de la roue, et égal à $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$, pour passer de la vitesse v à la vitesse $v'=0$ (nº 205), et ce travail n'est que légèrement inférieur au produit PH exprimant la puissance absolue de la chute, parce que la vitesse v est due à une hauteur H' moindre que H, mais peu différente.

Mais, comme l'a remarqué Poncelet, les choses ne se passent pas tout à fait ainsi dans la pratique.

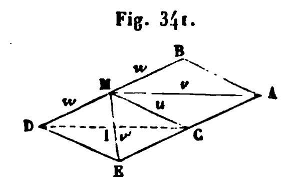
L'eau ne peut pas entrer dans la roue tangentiellement à sa circonférence extérieure, comme on l'a supposé ci-dessus. Nommons en effet ds la longueur d'un élément de cette circonférence plongé dans le courant, l la longueur de la roue, β l'angle de ds avec la vitesse relative w de l'eau. Il entre par la surface $l\,ds$, pendant l'unité de temps, un prisme de liquide ayant pour longueur w et pour section droite $l\,ds \sin\beta$, soit un volume $lw\,ds \sin\beta$; le volume total traversant l'ensemble des éléments ds s'exprimerait par une intégrale $l\int w\,ds \sin\beta$, et l'on voit qu'il s'annulerait en même temps que β. Ainsi w doit couper la circonférence sous un certain angle, qui ne peut être nul; il faut d'ailleurs le faire aussi petit que possible, afin que, au point de sortie, la vitesse relative de l'eau et la vitesse d'entraînement des aubes puissent avoir des directions à peu près opposées et donner une résultante assez petite; mais il ne faut pas le faire trop petit, pour ne pas rendre difficile ou impossible l'introduction de l'eau. C'est afin de concilier le mieux possible ces deux conditions contraires, qu'on a été conduit par la pratique à fixer la valeur de β à 30°. Il ne résultera pas de là que l'eau vienne choquer les palettes à son entrée dans la roue; car on peut toujours

s'arranger pour que la direction de la vitesse relative soit tangente au premier élément de l'aube rencontrée; mais la vitesse absolue de l'eau à la sortie ne peut plus être nulle, puisqu'elle résulte de deux composantes qui ne sont plus directement opposées et font entre elles un angle de 150°. Quelque rapport qu'on établisse entre u et v, la résultante aura toujours une valeur v' différente de o, et par conséquent l'eau emportera avec elle une certaine demi-force vive $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v'^2$, qui diminuera d'autant le travail reçu par la roue.

Étant donné que les molécules d'eau arrivent sur la roue avec une vitesse absolue déterminée v, due à la hauteur connue H', et que la vitesse relative w, tangente au premier élément des aubes, coupe la circonférence extérieure sous un angle de 30°, on peut se demander quelle vitesse u on devrait donner à la roue pour réduire au minimum la vitesse absolue v' du liquide à sa sortie. Pour répondre à cette question, considérons les parallélogrammes des vitesses à l'entrée et à la sortie.

Soient $\overline{MB} = w$, $\overline{MC} = u$ (*fig.* 341) et la diagonale $\overline{MA} = v$

Fig. 341.



les lignes du premier; les raisonnements faits plus haut pour démontrer que la vitesse relative à la sortie est la même qu'à l'entrée, sauf le changement de sens, subsistent toujours, et par conséquent la vitesse absolue v' est la diagonale ME d'un second parallélogramme construit sur $\overline{MC}$ et sur la droite $\overline{MD}$ égale et contraire à $\overline{MB}$. Les deux parallélogrammes sont égaux, comme ayant les mêmes angles et les mêmes côtés; donc $\overline{DC} = \overline{MA} = v$. Quand on construira la figure avec d'autres valeurs de u et de w, il faudra toujours que la ligne $\overline{DC}$ conserve une longueur constante; par rapport à cette droite supposée fixe, le point M variera en restant sur un arc de cercle qui limite le segment capable de l'angle DMC = 150°,

décrit sur la corde $\overline{DC}$. Les valeurs de v' seront doubles des lignes $\overline{MI}$ joignant le milieu I de la corde avec les divers points M de l'arc de cercle; leur minimum répondra au cas où l'on placera M au milieu de cet arc, ce qui entraîne l'égalité $\overline{MD} = \overline{MC}$ ou $w = u$. Les deux parallélogrammes deviennent alors des losanges, et l'angle M du triangle EMA est droit, comme formé par les bissectrices de deux angles supplémentaires; par la considération de ce triangle, on a, dans le cas du minimum,

$$v' = v \operatorname{tang} \mathrm{MAE} = v \operatorname{tang} 15^\circ = 0,268 v.$$

$$\overline{AE} = 2u = 2w = \frac{v}{\cos 15^\circ}.$$

La dernière égalité conduirait à prendre

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2\cos 15^\circ} = 0,518,$$

valeur légèrement supérieure à celle que nous avons trouvée quand nous supposions nul l'angle BMC. Quant au travail $\frac{Pv'^2}{2g}$ perdu par le fait de l'existence de v', il serait égal à $\frac{Pv^2}{2g} \operatorname{tang}^2 15^\circ$ ou $0,072 \frac{Pv^2}{2g}$; le rendement théorique précédemment trouvé serait donc diminué de $\frac{1}{14}$ environ.

En réalité, la diminution est plus considérable, car l'expérience indique des chiffres variables entre 0,50 et 0,65, comme valeur du rendement d'une chute d'eau faisant marcher une roue Poncelet. Il faut donc chercher une autre raison que celle du défaut obligé de raccordement entre les aubes et la circonférence extérieure, pour expliquer ce résultat. La cause principale des pertes de travail paraît consister en ce que la masse liquide comprise entre deux aubes consécutives ne peut pas se mouvoir comme un point isolé. Quand une molécule entrée la première arrive à la hauteur $\frac{w^2}{2g}$ sur sa trajectoire relative, d'autres molécules entrées plus tard tendent à monter encore, et il est évident que ces mo-

lécules exercent les unes sur les autres des actions mutuelles qui modifient leurs vitesses relatives; les calculs faits plus haut pour obtenir la vitesse relative à la sortie conduisent donc à des résultats inexacts. Malgré cela, on doit reconnaître que la roue Poncelet réalise un grand progrès sur les roues en dessous à aubes planes, avec lesquelles on arrivait à des rendements moitié moindres.

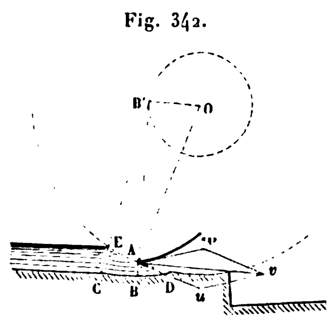
En ce qui concerne le rapport $\frac{u}{v}$, l'expérience modifie peu la détermination que nous en avons faite, car elle conduit à lui donner la valeur 0,55, légèrement supérieure à celle que nous avons obtenue théoriquement.

Il reste à savoir comment on dirigera les filets liquides à leur entrée, pour qu'ils viennent couper la circonférence extérieure sous l'angle de 15°, de sorte que, en adoptant la valeur $u = \frac{v}{2\cos 15^\circ}$ pour la vitesse de la roue à sa circonférence, on obtienne par là même un parallélogramme des vitesses semblable à MBAC ([1]) et par suite une vitesse relative w inclinée, comme les aubes, à 30° sur la direction MC de u. C'est dans ce but qu'est construite la courbe spéciale dont nous avons parlé en commençant et qui forme en partie le profil du fond du coursier. Pour en déterminer la figure, on admet que, dans un même plan vertical perpendiculaire à l'axe de la roue, les filets dessinent des courbes parallèles, et que par suite la normale en un point d'un filet va couper normalement le filet inférieur, c'est-à-dire le profil du fond, suivi par ce dernier filet. Cela posé, soit A (*fig.* 342) le point d'entrée d'un filet, dont la vitesse absolue v fait l'angle de 15° avec la vitesse u dirigée suivant la tangente; la perpendiculaire BAB' à v est une normale au profil du fond. Or cette perpendiculaire passe à une distance du centre O de la circonférence extérieure égale à $\overline{OA}\sin 15^\circ$ et par suite constante. Toutes les normales au profil du fond sont donc tangentes à une même circonférence de rayon $\overline{OB'} = \overline{OA}\sin 15^\circ$; donc ce profil est une développante

([1]) La similitude existe, parce que, dans le triangle MAC, moitié du parallélogramme, on donne le rapport des deux côtés MC, MA et l'angle compris.

du cercle OB′. Si l'on mène une tangente à ce cercle par le point E où le filet supérieur commence à entrer dans la roue, la rencontre C de cette tangente avec la droite inclinée sera le commencement de la développante, qui se terminera en un point D déjà défini.

Fig. 342.



L'eau s'élève, dans son mouvement relatif, à une hauteur $\frac{w^2}{2g} = \frac{v}{8g\cos^2 15^\circ} = 0{,}268\,H'$, peu différente de $\frac{1}{4}$H. D'après cela, pour éviter le jaillissement de l'eau dans l'intérieur de la roue, après qu'elle aurait parcouru la longueur entière des aubes, ce qui produirait une perte de travail, il faudrait que la largeur de la couronne des aubes dans le sens du rayon fût au moins égale à $\frac{1}{4}$ de la hauteur de chute. Mais, en raison de l'incertitude qui affecte la théorie précédente, et pour être plus sûr d'éviter l'inconvénient dont il s'agit, Poncelet a conseillé de porter cette largeur à $\frac{1}{3}$H.

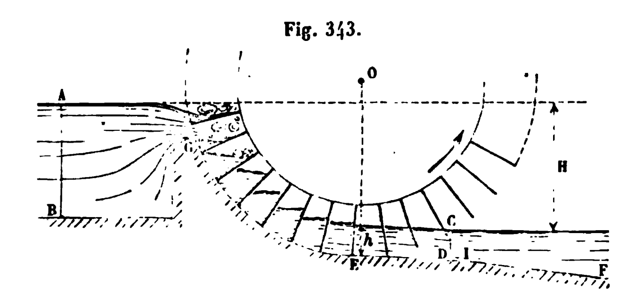
315. *Roue de côté.* — La roue diffère peu, dans sa construction, de la roue en dessous décrite au n° 313; quelquefois cependant les aubes sont polygonales, pour une raison qui sera donnée plus loin.

L'eau entre par côté dans la roue, ce qui a motivé son nom; elle est amenée tantôt par un déversoir dont le seuil, placé tout près de la roue, n'est que peu inférieur au niveau du bief d'amont (de $0^m,22$ à $0^m,27$ en dessous), tantôt par une vanne sous laquelle elle s'écoule avec plus de charge et de vitesse, ce qui permet de faciliter l'introduction de la veine

liquide, en restreignant son épaisseur, sans trop diminuer le débit.

La roue est emboîtée dans un coursier compris entre deux murs verticaux parallèles passant aussi près que possible des extrémités des aubes; le profil du fond de ce coursier se compose (*fig.* 343) d'un arc de cercle GE pris sur la circonfé-

Fig. 343.



rence extérieure de la roue, auquel succède, après le point le plus bas de cette circonférence, d'abord une droite EI, faiblement inclinée, sur une longueur de 1^m à $1^m,50$, puis une droite IF avec une pente plus marquée, par exemple une pente de $0^m,08$ à $0^m,10$ par mètre. Le niveau du bief d'aval est placé à la même hauteur que le niveau de l'eau entre les aubes, à l'aplomb de l'axe O de la roue.

Si l'on applique la formule générale (1) du n° 311, en prenant la section AB dans le bief d'amont, en un point où le liquide soit à peu près stagnant, et la section CD à une petite distance en avant de E, cette formule donnera, la vitesse V_0 en AB étant supposée négligeable,

$$\mathfrak{T}_e = P\left(H - \frac{V^2}{2g}\right) - \mathfrak{T}_f;$$

et, comme l'eau a dû perdre dans le trajet GE sa vitesse relative initiale, on attribuera à la vitesse V, en CD, une valeur peu différente de la vitesse u à la circonférence de la roue. Il résulte de là que, pour augmenter l'effet dynamique, on est conduit à faire tourner la roue lentement, car le terme $\frac{Pu^2}{2g}$ et aussi, comme nous le verrons bientôt, le terme $\mathfrak{T}_f$ sont

tous deux croissants avec u; mais on est limité dans la diminution de u par les considérations suivantes.

Cherchons la relation entre le débit Q de la chute d'eau, la largeur l de la roue, la profondeur h du liquide à l'aplomb de l'axe, et la vitesse u; pour cela nous exprimerons d'abord le volume d'eau compris entre deux aubes consécutives. Ce volume, quand il arrive en E, est un prisme droit ayant pour longueur l, et pour section droite un trapèze de hauteur h et de largeur moyenne $C\left(1-\frac{h}{2R}\right)-c$, si l'on nomme

C l'espacement des aubes, d'axe en axe;
c leur épaisseur;
R le rayon $\overline{OE}$ de la circonférence extérieure [1].

Le produit des trois dimensions donne un volume

$$lhC\left(1-\frac{h}{2R}-\frac{c}{C}\right);$$

et, comme il se débite dans l'unité de temps un nombre $\frac{u}{C}$ de volumes pareils, il en résulte l'égalité

$$Q = lhu\left(1-\frac{h}{2R}-\frac{c}{C}\right)$$

ou approximativement, avec une exactitude suffisante dans les circonstances ordinaires de la pratique,

(1) $$Q = 0,9\,lhu,$$

les fractions $\frac{h}{2R}$ et $\frac{c}{C}$ étant toujours petites et donnant une somme assez voisine de 0,10.

---

[1] En effet, la distance entre les rayons qui passent par les milieux des épaisseurs de deux aubes est C sur la circonférence extérieure; elle est réduite à $C\frac{R-h}{R}$ ou $C\left(1-\frac{h}{R}\right)$ quand on se rapproche du centre, d'une quantité h. La moyenne entre C et $C\left(1-\frac{h}{R}\right)$ est $C\left(1-\frac{h}{2R}\right)$, et, si l'on en défalque l'épaisseur c des aubes, il reste bien $C\left(1-\frac{h}{2R}\right)-c$.

On voit par cette équation que, si l'on diminue la vitesse u en conservant l et h constants, on fait subir une diminution proportionnelle au débit, ainsi qu'au poids dépensé P qui entre comme facteur dans la puissance absolue de la chute; cette puissance et *a fortiori* l'effet dynamique se réduiraient donc de plus en plus. Il faut donc, à mesure qu'on fait décroître u, augmenter l ou h ou les deux facteurs à la fois, de manière que le produit $0,9lhu$ soit égal à un débit qu'on se sera donné d'avance, suivant la quantité d'eau disponible. Or l'augmentation de h au delà de certaines limites a des inconvénients déjà signalés au n° 313; l'augmentation de l tend à rendre la roue de plus en plus lourde, dispendieuse à construire et consommant un travail notable par le frottement des coussinets. D'ailleurs, en lui laissant une certaine vitesse, elle peut jusqu'à un certain point faire fonction de volant; car on a vu (nos 248 et 249) que, dans le moment d'inertie réduit d'un système de treuils, chacun doit compter proportionnellement à son moment d'inertie propre et au carré de sa vitesse angulaire. Par toutes ces raisons, il ne convient pas de prendre u trop petit; l'expérience a prouvé qu'une vitesse de $1^m,30$ environ à la circonférence donne de bons résultats, et qu'il ne convient pas de descendre notablement au-dessous.

La dimension h ne doit pas être trop grande, comme on l'a déjà dit, elle ne doit pas être non plus trop petite, afin de ne pas donner une certaine importance à la perte d'eau par le jeu qui reste nécessairement entre la roue et la partie circulaire du coursier. On pourrait adopter convenablement une valeur comprise entre $0^m,15$ et $0^m,25$. L'équation (4) donnerait alors, en y faisant h successivement égal à ces limites et $u = 1^m,30$,

$$\frac{Q}{l} = 0,9hu, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0^{mc},175 < Q < 0^{mc},293;$$

la roue pourrait donc débiter, dans de bonnes conditions, un volume d'eau compris entre 175^{lit} et 293^{lit} par mètre de largeur. Si l'on se donnait le débit total Q, après avoir choisi $\frac{Q}{l}$ ou plutôt après l'avoir déduit de u et de h, on en déduirait la

largeur l, et l'on aurait ainsi fixé les valeurs à donner aux trois quantités l, h, u.

Mais il peut se faire que la largeur de la roue soit limitée par le local où elle doit trouver place, ou par des considérations d'économie, et qu'alors on ait besoin de dépasser un débit de 293^{lit} par mètre de largeur. Supposons par exemple $Q = 0^{mc},720$ et la largeur l limitée à 1^m; le débit par mètre de largeur $\frac{Q}{l}$ atteint alors 720^{lit}, et, pour l'obtenir, il faut nécessairement prendre $h > 0^m,25$ ou $u > 1^m,30$, ou faire les deux choses à la fois. En pareil cas, on peut porter h jusqu'à $0^m,40$ ou $0^m,45$ et ensuite faire croître u dans la mesure nécessaire; mais, comme la roue ne sera plus établie dans d'aussi bonnes conditions, il faut s'attendre à un rendement moins satisfaisant. Dans l'exemple ci-dessus, l'équation (4) donnant

$$hu = 0,80,$$

quand on suppose $Q = 0^{mc},720$ et $l = 1^m$, on pourrait adopter, pour valeur de h et u,

$$\begin{aligned} h &= 0^m,30 &\text{avec}\quad u &= 2^m,667,\\ h &= 0,35 &\text{»}\quad u &= 2,286,\\ h &= 0,40 &\text{»}\quad u &= 2,000,\\ h &= 0,45 &\text{»}\quad u &= 1,778.\end{aligned}$$

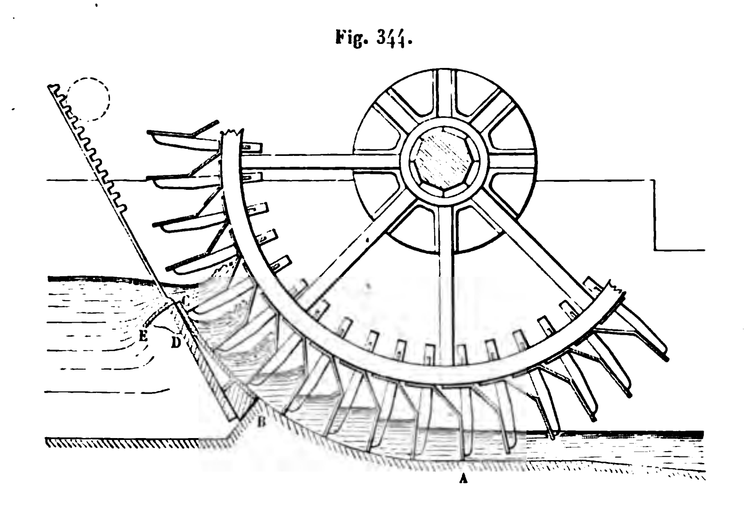
Ni l'expérience ni la théorie ne donnent le moyen de faire un choix rationnel entre ces solutions et une infinité d'autres qu'on pourrait indiquer, puisque h et u se déduisent d'une seule équation.

Les roues de côté sont qualifiées de *lentes* ou *rapides*, suivant que leur vitesse u à la circonférence reste aux environs de $1^m,30$ ou dépasse notablement cette valeur. Les deux modes d'introduction de l'eau, que nous avons mentionnés en commençant, s'appliquent respectivement à ces deux cas.

Dans les roues lentes on emploie le déversoir, avec les dispositions indiquées par la *fig.* 344. Le coursier IEK, généralement en maçonnerie, se prolonge par une pièce en fonte KL, dite *col de cygne;* EKL est un arc de cercle aussi rapproché que

possible de la circonférence extérieure de la roue. Une vanne M, munie à sa partie supérieure d'un petit appendice métallique arrondi E, peut glisser en s'appuyant sur le col de cygne ; un système de deux crémaillères égales, mues par des roues dentées de même rayon, permet d'élever cette vanne au point convenable et de s'en servir au besoin pour modérer ou empêcher l'arrivée de l'eau sur la roue. L'appendice métallique E forme le seuil d'un déversoir de même largeur que le

Fig. 344.



coursier, par-dessus lequel l'eau s'écoule pour entrer dans la roue ; le point le plus élevé de ce seuil doit être à $0^m,20$ ou $0^m,27$ au-dessous du niveau dans le bief d'amont, hauteurs auxquelles répondent à peu près les débits de 175^{lit} à 293^{lit} par mètre de largeur, qu'on a indiqués tout à l'heure pour les roues lentes.

Le déversoir étant ainsi extrêmement rapproché de la roue, la vitesse absolue de l'eau à son point d'entrée, due seulement à la faible dénivellation qui se produit dans le bief d'amont, sera par conséquent petite ; et, comme la roue marche elle-même lentement, la vitesse relative sera modérée, et l'agitation qu'elle entraînera peu sensible. L'appendice métallique arrondi E a pour but de diminuer la contraction de la lame déversante, et de diminuer ainsi la vitesse

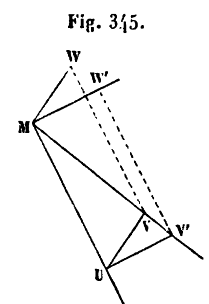
nécessaire pour un débit donné. Il sert également à diriger les filets, de manière qu'ils ne coupent pas la circonférence extérieure sous un angle trop grand, ce qui est utile, comme le montrent les considérations suivantes, bien qu'elles s'appliquent plus spécialement au cas des roues rapides.

Dans le cas des roues lentes, on est arrivé à n'avoir, à l'entrée de l'eau, qu'un choc sans importance, en s'y prenant de telle façon que le courant liquide arrive avec peu de vitesse sur des aubes tournant lentement; la vitesse relative est alors petite, parce que la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement, dont elle est la résultante, sont petites toutes les deux; et alors on s'inquiète peu des directions et du rapport de grandeur des deux composantes. Il en est différemment pour une roue rapide. Soient, au point M d'entrée (*fig.* 345),

$\overline{MU}$ la vitesse u de la roue;
$\overline{MV}$ la vitesse absolue v de l'eau;
γ l'angle de ces deux droites.

La vitesse u a été déterminée précédemment; mais nous disposons encore de v et de γ, et il faut choisir leurs grandeurs le mieux possible, pour atténuer le choc à l'entrée, tout en satisfaisant aux autres conditions d'un bon établissement de la roue. La vitesse relative est la ligne $\overline{MW} = w$, égale et parallèle à $\overline{UV}$; on voit qu'elle se réduirait à zéro si l'on avait $\gamma = 0$, $v = u$. Mais il n'est pas possible, comme on l'a déjà démontré (n° 314), que l'eau entre dans la roue tangentiellement, puisque le débit deviendrait nul. Dans la roue Poncelet, on a pris $\gamma = 15°$; dans la roue de côté, la pratique a conduit à choisir la valeur de 30° comme suffisante pour obtenir une facile introduction de l'eau sans trop exagérer la vitesse relative. Alors, puisque U est un point déterminé ainsi que la direction MV, la plus petite valeur possible de $\overline{UV} = w$ serait la perpendiculaire abaissée de U sur MV, ou $u \sin\gamma$, ou enfin $\frac{1}{2}u$ si l'on prend $\gamma = 30°$; v aurait pour valeur correspondante $u \cos 30°$ ou $0,866\,u$.

Fig. 345.



Toutefois ce ne sont pas ces valeurs qu'on adopte pour v et w. Il est bon en effet que le premier élément des aubes soit dans la direction de w (nº 312), afin de diminuer l'agitation de l'eau à l'intérieur de la roue. Or, si ce premier élément était perpendiculaire à MV, il ferait un angle de 120° avec MU, c'est-à-dire avec la circonférence de la roue, et par conséquent un angle de 30° avec le rayon qui passe en M. Quand par l'effet de la rotation ce rayon viendrait se placer verticalement au-dessous de l'axe, le premier élément de l'aube aurait déjà une inclinaison de 30° sur la verticale, et il serait encore plus incliné au point d'émersion; les aubes tendraient donc à soulever l'eau, ce qui gênerait le mouvement de la roue. C'est pourquoi l'on préfère que la vitesse relative MW soit dirigée suivant le rayon passant en M, ou suivant la perpendiculaire à MU; le parallélogramme des vitesses est alors un rectangle MUV'W'. L'angle γ conservant d'ailleurs sa valeur de 30°, on en déduit les relations

$$v = \frac{u}{\cos 30^\circ} = 1,155\,u,$$

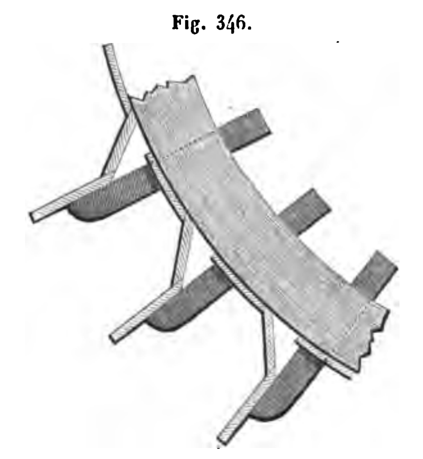
$$w = u \operatorname{tang} 30^\circ = 0,577\,u.$$

Voici maintenant ce qu'on devra faire pour réaliser pratiquement les grandeur et direction de v qu'on vient de déterminer. Si l'eau arrivait sans perte de charge depuis le bief d'amont jusqu'à son point M d'entrée, la création de la vitesse v exigerait une charge $\frac{v^2}{2g}$ (nº 276); afin de tenir compte approximativement des pertes de charge qui se produisent toujours, on augmentera un peu cette hauteur, en la multipliant par un coefficient supérieur à l'unité, 1,1 par exemple, et l'on placera le point M à la hauteur $1,1\,\frac{v^2}{2g}$ au-dessous du niveau dans le bief d'amont. Ce point se trouve ainsi déterminé, car il se trouve sur la circonférence extérieure de la roue et sur une horizontale connue. La direction de la vitesse v s'obtiendrait en menant par ce point une ligne inclinée à 30° sur la circonférence; on obligerait ensuite les filets à prendre cette direction, en faisant couler la veine sur un coursier de $0^m,3$ à $0^m,5$ de longueur, placé entre le point M

et le bief d'amont, dont il serait séparé par une vanne. Quelquefois la vanne pourrait être supprimée, le fond du coursier formant alors le seuil d'un déversoir sur lequel l'eau du bief passerait sans obstacle.

Il est utile que l'eau trouve devant elle, après son entrée dans la roue, une surface inclinée ascendante le long de laquelle elle puisse s'élever, en vertu de la vitesse relative initiale w, car la pesanteur intervient alors pour diminuer la demi-force vive $\frac{1}{2}mw^2$ d'une molécule quelconque, et c'est autant de moins à dépenser en agitation tumultueuse et à compter dans le terme soustractif T_f, quand on calcule l'effet dynamique. C'est pour cela que le point M se place toujours au-dessous du centre de la roue ; ce dernier point est en général à $0^m,40$ ou $0^m,50$ au-dessus du niveau du bief d'amont.

Fig. 346.



Afin d'augmenter encore la hauteur à laquelle l'eau peut s'élever sans rencontrer d'obstacle, Belanger a imaginé, en 1819, les aubes polygonales, comme celles que représente la *fig.* 346, qui sont formées de trois plans consécutifs se coupant sous des angles obtus voisins de 135°, dont le premier est suivant le rayon et le dernier suivant une circonférence concentrique à l'axe de rotation. On manque des données expérimentales nécessaires pour apprécier les effets de cette disposition.

Voyons enfin comment on pourra calculer l'effet dynamique d'une chute d'eau faisant tourner une roue de côté donnée. Tout se réduit à déterminer le travail $-T_f$ des forces de viscosité dans l'intervalle des sections AB, CD (*fig.* 343); or ce travail se compose de plusieurs parties que nous allons rechercher successivement.

1° Nous avons admis plus haut une perte de charge $0,1\frac{v^2}{2g}$ dans l'intervalle entre AB et le point d'entrée de l'eau dans la roue. Cela équivaut à dire que la viscosité fait un travail $-0,1\frac{\varpi v^2}{2g}$, sur chaque molécule de poids ϖ, pendant cette partie de son parcours. Le total des travaux analogues pour toutes les molécules composant le poids P dépensé par seconde sera donc $-0,1 P\frac{v^2}{2g}$.

2° Conformément aux indications générales du n° **312**, nous admettons que le travail résistant causé par l'agitation tumultueuse après l'entrée de l'eau dans la roue a pour valeur $-P\frac{w^2}{2g}$. D'autre part, le triangle des vitesses MUV (*fig.* 345) donne

$$\overline{UV}^2 = w^2 = v^2 + u^2 - 2uv\cos\gamma;$$

la perte en question s'exprime donc par

$$-\frac{P}{2g}(v^2 + u^2 - 2uv\cos\gamma).$$

Quand on fait, comme nous avons reconnu qu'on devait le faire,

$$\gamma = 30^\circ, \quad v = \frac{u}{\cos 30^\circ},$$

cette expression se réduit à $-P\frac{u^2\,\mathrm{tang}^2 30^\circ}{2g}$ ou $-\frac{1}{3}P\frac{u^2}{2g}$.

3° L'eau entraînée dans la roue frotte sur la surface du coursier. Pour évaluer l'intensité de ce frottement, nous chercherons d'abord ce qu'il serait si l'eau coulait librement dans un canal découvert, sans intervention de la roue. La formule de Chézy ou de Tadini (n° **293**) nous apprend que le frottement est alors égal à $0,4U^2$ par mètre carré de paroi mouillée, U désignant la vitesse moyenne du courant. Cette

vitesse serait d'ailleurs liée à la vitesse maximum V et à la vitesse de fond W par les relations approximatives

$$U = \frac{1}{2}(V + W), \quad U = 0,8V \quad (n^o\ 291);$$

de là résulte $U = \frac{4}{3}V$, et par suite la valeur du frottement sur chaque mètre carré de paroi mouillée s'exprime par $0,4 \times \frac{16}{9}W^2$ ou $0,71\,W^2$.

Maintenant on peut admettre avec beaucoup de vraisemblance que le frottement de la paroi ne dépend que de la vitesse de glissement des filets en contact, et qu'il reste le même quand cette vitesse ne change pas, quelle que soit d'ailleurs la loi de variation des vitesses en allant du fond à la surface du courant. On peut donc, dans le cas où il s'agit du coursier d'une roue de côté, conserver la dernière expression qu'on vient de trouver pour le cas d'un canal, pourvu qu'on mette à la place de W la vitesse u que ne tardent pas à prendre les filets liquides extérieurs, en se mettant au repos relatif dans la roue. Par suite, si L est la longueur du coursier entre les points G et D (*fig.* 343), les notations l et h conservant le sens déjà défini, la surface mouillée sera $L(l + 2h)$ et le frottement total aura pour valeur $0,71\,L(l + 2h)u^2$. Les points d'application de tous les frottements élémentaires ayant tous la vitesse u, le travail produit par eux dans chaque seconde sera $-0,71\,L(l + 2h)u^3$. D'autre part, le volume d'eau dépensé par seconde est approximativement $0,9\,lhu$, d'où résulte $P = 900\,lhu$. Le travail dû au frottement du coursier peut donc se mettre sous la forme

$$-0,00079\,\frac{PL(l + 2h)u^2}{lh} \quad \text{ou bien} \quad -0,015\,\frac{L(l + 2h)}{lh}\,P\,\frac{u^2}{2g}.$$

Connaissant toutes les pertes de travail, on applique la formule générale rappelée en commençant, ce qui donne

$$\mathcal{C}_e = P\left[H - \frac{u^2}{2g} - 0,1\,\frac{v^2}{2g} - \frac{1}{2g}(v^2 + u^2 - 2uv\cos\gamma) - 0,015\,\frac{L(l + 2h)}{lh}\,\frac{u^2}{2g}\right].$$

Dans le cas d'une roue rapide, où l'on aurait fait $\gamma = 30°$, $v = \frac{u}{\cos 30°} = \frac{2u}{\sqrt{3}}$, cette formule se simplifie et devient

$$\mathcal{E}_e = P\left[H - 1,47\frac{u^2}{2g} - 0,015\frac{L(l+2h)}{lh}\frac{u^2}{2g}\right].$$

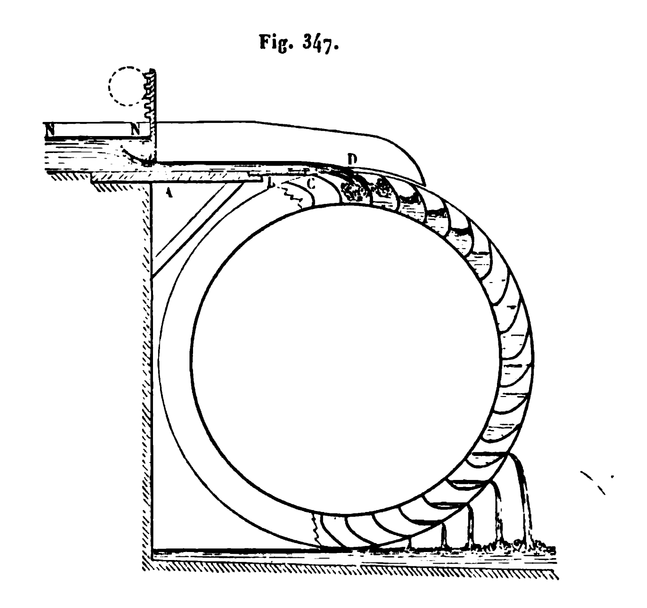
La roue de côté convient très bien pour des hauteurs de chute de 1^m à 2^m ou $2^m,50$; à partir de $3^m,50$, il vaut mieux employer les roues dont nous allons parler bientôt (n° **316**). L'expérience montre qu'une roue de côté lente établie dans de bonnes conditions peut donner un rendement de 0,80 et même plus. Ce chiffre pourrait diminuer beaucoup dans le cas d'une roue rapide, surtout si l'on n'avait pas pris, dans la construction de la roue, les précautions que nous avons indiquées. Le général Morin cite une roue qui existait à la fonderie de Toulouse, et avec laquelle le rendement de la chute n'était guère que de 0,40.

316. *Roues en dessus ou roues à augets.* — Ces roues ne sont pas emboîtées dans un coursier, comme les roues de côté et les roues en dessous à aubes planes. L'eau s'introduit à la partie supérieure; elle entre dans les *augets*, qui sont en quelque sorte des vases contigus formés par deux aubes consécutives, terminées latéralement par des couronnes annulaires, et au fond par une surface cylindrique continue concentrique à la roue, de sorte que ces augets ne restent ouverts que sur la circonférence extérieure. Tout ce système est d'ailleurs solidement réuni à l'arbre tournant par un nombre suffisant de bras.

On emploie pour introduire l'eau deux dispositions représentées par les *fig.* 347 et 348. Dans la *fig.* 347, le sommet D de la roue est placé un peu au-dessous du niveau NN du bief supérieur, à $0^m,20$ ou $0^m,25$ plus bas que ce niveau; l'eau est amenée jusqu'à un point C situé à $0^m,40$ ou $0^m,50$ en amont de l'aplomb de l'arbre, au moyen d'un canal en bois AB, horizontal ou faiblement incliné, dont le fond se termine par une plaque métallique très mince BC; le prolongement de cette plaque serait à peu près tangent en D à la circonférence extérieure. Les bords latéraux du canal se prolongent à 1^m

au delà du point C, pour empêcher l'eau de tomber à côté de la roue. L'eau franchit la distance CD en vertu de sa vitesse acquise, et entre dans la roue à peu près au sommet de celle-ci. Comme les bords des augets ne laissent entre eux qu'une ouverture assez étroite, on donne à l'eau qui coule dans le canal ABC la forme d'une lame mince, en la faisant passer sous une vanne placée vers A et levée seulement de $0^m,6$ à $0^m,10$. Cette vanne présente un orifice à

Fig. 347.

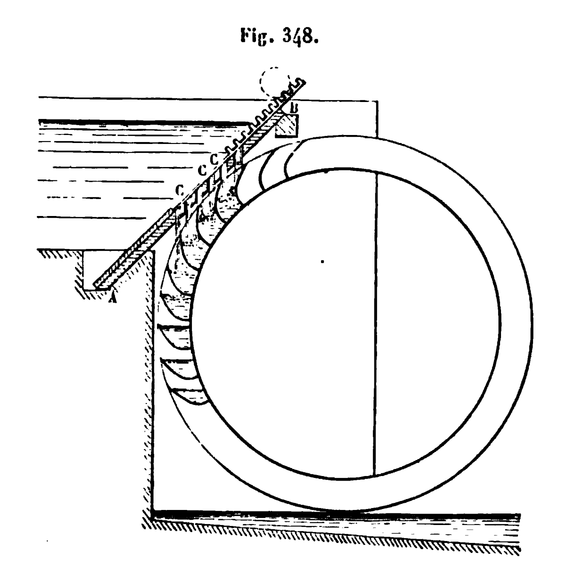


bords arrondis, pour éviter les remous à la sortie des filets liquides. Comme on le voit, il y a peu de hauteur entre le point d'entrée de l'eau et le niveau du bief d'amont; l'eau arrive par conséquent avec une vitesse modérée, et si la roue ne tourne pas vite (comme cela doit être pour avoir un bon rendement), la vitesse relative sera elle-même modérée et n'entraînera pas une grande perte de travail.

La disposition de la *fig.* 348, qui a été souvent employée, paraît beaucoup moins bonne; mais elle se prête mieux que la précédente à des variations notables de niveau dans le bief d'amont. Ce bief se termine tout près de la roue par une

cloison en bois AB, percée de fentes CC verticales, analogues à celles d'une persienne. Une vanne mobile permet de fermer tel nombre de ces ouvertures que l'on veut, de manière à ne dépenser que le volume d'eau disponible. L'inconvénient de cet appareil, c'est que l'eau tombe librement d'une assez grande hauteur dans l'intérieur des augets et acquiert ainsi beaucoup de vitesse; l'agitation tumultueuse du liquide dans la roue devient beaucoup plus considérable, ce qui entraîne une assez grande perte de travail.

Fig. 348.

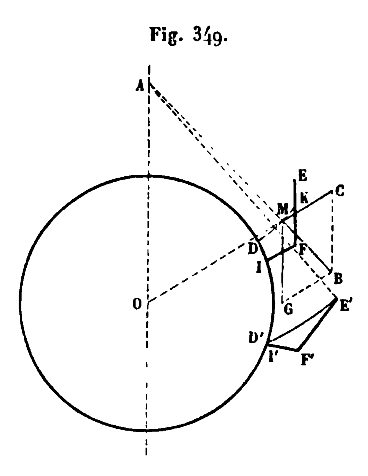


La première question à résoudre dans l'étude théorique de la roue en dessus, consiste à rechercher la figure que prend la surface libre de l'eau dans les augets, afin d'en déduire la position pour laquelle les augets commencent à se déverser, celle pour laquelle le déversement est complètement achevé, et, dans l'intervalle, quelle est la quantité d'eau conservée dans chaque auget occupant une position donnée. C'est comme un lemme préparatoire pour rendre possible le calcul de l'effet dynamique.

Pour déterminer la figure de la surface libre de l'eau dans un auget, nous admettrons que l'agitation causée par le choc

à l'entrée se calme assez rapidement et que le liquide se met en équilibre relatif. Considérons alors une molécule d'eau M (*fig.* 349), de masse m, située sur la surface libre, à la distance $\overline{OM} = r$ de l'axe de rotation O. L'équilibre existe, par hypothèse, relativement à des axes mobiles qui tournent uniformément comme la roue, avec une vitesse angulaire ω autour de O. Les forces directement appliquées à M sont : 1° le poids mg, force réelle représentée par la droite verticale $\overline{MG}$; 2° la force centrifuge $m\omega^2 r$ représentée par la droite $\overline{MC}$

Fig. 349.



en prolongement de OM, force apparente (n° 263) qui n'est autre que la force d'inertie du mouvement d'entraînement et qui s'introduit parce qu'il s'agit ici d'un équilibre relatif. La résultante des deux forces mg, $m\omega^2 r$ doit être normale à la surface de niveau (n° 260) qui passe par le point M, et par conséquent à la surface libre, qui est partout soumise à la pression atmosphérique. On voit d'abord que cette résultante se trouve, comme ses composantes, dans le plan perpendiculaire à l'axe qui contient le point M; donc tous les plans tangents de la surface libre sont parallèles à l'axe O, et par suite cette surface est un cylindre dont les génératrices ont cette même direction. Nous disons de plus que ce cylindre est de révolution ou qu'il a un cercle pour section droite. Construisons en effet le parallélogramme MGBC sur les forces mg,

$m\omega^2 r$, et prolongeons la résultante $\overline{MB}$ jusqu'à sa rencontre A avec la verticale OA du point O. La similitude des triangles MOA, MGB donne l'égalité de rapports

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{MG}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{GB}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{OA}}{mg} = \frac{r}{m\omega^2 r};$$

d'où résulte

$$\overline{OA} = \frac{g}{\omega^2}.$$

La distance $\overline{OA}$ est donc constante, pour tous les points du profil DK de la surface dans un plan perpendiculaire à l'axe, les normales MB à ce profil concourent en un même point, ce qui prouve que ce profil est un cercle de rayon $\overline{MA}$, ayant son centre sur la verticale du centre O et à la distance $\frac{g}{\omega^2}$ au-dessus de ce dernier.

Ce résultat montre qu'en toute rigueur l'équilibre relatif est impossible. En effet, s'il se réalisait, la figure DK ne devrait pas se modifier pendant le déplacement de l'auget, tandis que le rayon $\overline{MA}$ va évidemment en augmentant quand l'auget s'abaisse de plus en plus. Ainsi, en adoptant pour point de départ l'hypothèse de l'équilibre relatif, nous arrivons par des déductions exactes à une conséquence qui la contredit; donc rigoureusement l'hypothèse est inexacte. Toutefois, quand le mouvement relatif du liquide se réduit à ce qui est nécessaire pour la modification progressive du profil, ce liquide est bien près d'être en repos relatif. Nous conserverons donc comme suffisamment exact le résultat de notre calcul.

Pour achever de déterminer le cercle DK, il faut tenir compte du volume d'eau q que doit contenir un auget, quand il n'en reçoit plus du bief d'amont et n'en a pas encore perdu par déversement. Nommons

Q le débit de la chute d'eau par seconde;
u la vitesse de la roue à la circonférence extérieure;
C l'écartement régulier des augets, mesuré d'axe en axe sur la même circonférence.

Dans une seconde, il passe, en regard du courant qui entre

dans la roue, un nombre $\frac{u}{C}$ d'augets, qui emportent en tout un volume d'eau $\frac{uq}{C}$; c'est le volume fourni dans le même temps par le bief d'amont, et l'on a par suite

$$Q = \frac{uq}{C}, \quad \text{d'où} \quad q = \frac{QC}{u}.$$

Connaissant le volume q, on le divisera par la largeur l de la roue parallèlement à son axe O, et le quotient $\frac{q}{l}$ donnera l'aire interceptée par le profil DK dans le profil connu du vide restant libre entre deux aubes, c'est-à-dire l'aire DIFK. Cette condition détermine le rayon $\overline{AM}$ de l'arc DK, dont on connaît déjà le centre A, car l'aire DIFK ne varie qu'avec ce rayon, dans un auget de position donnée; on obtiendra donc $\overline{AM}$, soit par un tâtonnement géométrique, soit par le calcul.

Dans une certaine position I'E'F' de l'auget, l'arc DK, déterminé comme on vient de le dire, rasera le bord extérieur E'; cette position peut être trouvée par tâtonnement. Dès que l'auget la dépasse, l'eau commence à se déverser; pour toute position en dessous de celle-là, le cercle décrit de A comme centre et passant par le bord extérieur n'interceptera plus dans le profil du vide entre deux augets une surface $\frac{q}{l}$, mais une surface moindre, dont le produit par l donnera le volume variable q' restant encore dans l'auget. Quand l'aire interceptée se réduit à o, le déversement est fini, et l'auget reste vide jusqu'à ce qu'il passe de nouveau en regard de la veine liquide tombant du bief d'amont.

En pratique, s'il s'agit de roues tournant avec une vitesse modérée, $\frac{g}{\omega^2}$ sera une grande distance, et l'on pourra remplacer les arcs de cercle décrits de A comme centre par des horizontales. Exemple : la roue a un diamètre de 4^m et une vitesse de 1^m par seconde à la circonférence; il en résulte

$$\omega = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{g}{\omega^2} = 39^m,24.$$

Le maximum d'inclinaison des droites, telles que AM, sur la verticale serait l'angle ayant pour sinus le nombre

$$\frac{2}{39,24} = 0,051,$$

soit moins de 3°; toute surface normale à ces droites ne peut pas avoir de dénivellation sensible dans la petite étendue d'un auget.

Lorsque la roue tourne rapidement, la distance $\frac{g}{\omega^2}$ peut devenir assez petite pour que la surface libre présente une concavité notable en dessous de l'horizontale passant par son point extrême E; ainsi, plus la vitesse angulaire augmente, moins un auget peut contenir d'eau, dans une position donnée, ce qui se comprend sans peine *a priori*, puisque la force centrifuge devient de plus en plus grande et qu'elle tend à chasser l'eau en dehors. C'est là un inconvénient des roues rapides; elles perdent plus vite l'eau qu'elles ont reçue, et donnent par suite un rendement moindre.

La recherche, que nous allons bientôt faire, des pertes de travail à retrancher de la puissance absolue de la chute d'eau, pour obtenir son effet dynamique, fait voir que ces pertes sont croissantes avec la vitesse de la roue, quand il s'agit d'une roue en dessus. On est donc naturellement porté à diminuer cette vitesse; mais ici, comme pour la roue de côté (n° 315), diverses considérations empêchent de la diminuer indéfiniment. D'abord, on a le motif indiqué au n° 315, qu'une roue conservant une vitesse notable fait un peu l'office d'un volant. Ensuite il y a la nécessité de ne pas trop augmenter la largeur l de la roue et la profondeur h des augets dans le sens du rayon, qui dépendent, comme on va le voir, de la vitesse u.

Il est admis en principe par les constructeurs mécaniciens que, pour ne pas rendre trop prompt le déversement des augets, on ne doit les remplir d'eau que jusqu'à concurrence de $\frac{1}{3}$ environ de leur capacité. Or cette capacité, c'est-à-dire le vide restant libre entre deux aubes consécutives, a pour valeur approchée le produit lhC de ses trois dimensions, en

négligeant l'épaisseur des aubes et l'inégalité des circonférences qui limitent le profil au dehors et en dedans; on posera donc la condition

$$q = \frac{QC}{u} = \frac{1}{3} lh C, \quad \text{d'où résulte} \quad Q = \frac{1}{3} lhu.$$

On voit qu'une trop grande diminution de u conduirait, lorsque le débit Q est donné, à l'adoption de grandes valeurs pour l ou h; ou la roue serait trop large, et par suite, lourde et coûteuse; ou la couronne des augets serait trop profonde, et l'eau acquerrait une vitesse assez grande en tombant dans leur intérieur, ce qui augmenterait l'intensité du choc à l'entrée. L'expérience a fait reconnaître qu'il est bon de choisir u entre 1^{m} et $1^{m},50$ et h entre $0^{m},25$ et $0^{m},30$. De ces données on conclut que le débit $\frac{Q}{l}$ de la roue par mètre de largeur peut varier entre

$$\frac{1}{3} \times 0,25 \times 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \times 0,30 \times 1,50,$$

c'est-à-dire entre 83^{lit} et 150^{lit} par seconde. Mais ce dernier nombre doit être déjà considéré comme une limite supérieure, dont il convient de ne pas trop se rapprocher; en général, il est bon de ne pas dépasser un débit de 100^{lit} dans une seconde et par mètre de largeur de la roue. La valeur à choisir pour l résulte de cette considération.

Procédons maintenant au calcul de l'effet dynamique par seconde, réalisé au moyen d'une roue à augets donnée. On obtiendra sa valeur en retranchant de la puissance absolue de la chute PH le travail $\mathcal{T}_f$ (pris en valeur absolue) des forces de viscosité, dans le passage du bief d'amont au bief d'aval (n° **311**). Ce travail $\mathcal{T}_f$ comprend deux parties principales.

Il y a d'abord le travail produit par le choc à l'entrée, qu'on évalue, suivant ce qui a été dit au n° **312**, en prenant le produit $\frac{P w^2}{2g}$ du poids d'eau P débité dans une seconde, par la hauteur due à la vitesse relative w avec laquelle cette eau s'introduit

dans la roue. Supposons, par exemple, le cas où l'on emploie la disposition de la *fig.* 347. On pourra considérer la rencontre de l'eau avec la roue comme se faisant au point où la parabole décrite par le filet moyen, en vertu de la vitesse avec laquelle il quitte le canal d'amenée en C, coupe la circonférence passant par le milieu de la profondeur des augets.

Soient

v la vitesse absolue de l'eau à ce point d'intersection, vitesse due à la hauteur de ce point au-dessous du niveau NN, si l'on regarde comme négligeables les pertes de charge dans le parcours qui précède;

u' la vitesse sensiblement égale à u, que possède le même point considéré comme appartenant à la roue;

γ l'angle de v avec u' ou l'angle sous lequel se coupent les deux courbes.

Le triangle des vitesses donne

$$w^2 = v^2 + u'^2 - 2u'v\cos\gamma,$$

ce qui permet d'avoir la première partie de $\mathfrak{G}_f$.

La seconde partie est le travail produit par le fait du déversement de l'eau dans le bief d'aval, avec une certaine vitesse. Soit une molécule de poids ϖ quittant la roue à une hauteur z au-dessus du bief d'aval. Cette molécule n'ayant dans l'auget qu'un mouvement relatif insensible, elle possède, à l'instant où elle sort, la vitesse u de la roue; en arrivant au bief d'aval, elle a une vitesse v' égale à $\sqrt{u^2 + 2gz}$. Cela résulte immédiatement de l'application du théorème des forces vives; si l'on admet, comme dans le cas d'une veine parabolique s'écoulant à l'air libre, que chaque molécule liquide tombe à la manière d'un point isolé, on a

$$\frac{\varpi}{2g}(v'^2 - u^2) = \varpi z, \quad \text{d'où} \quad v'^2 = u^2 + 2gz.$$

La molécule passe ensuite au repos dans le bief d'aval, et il en résulte (n° 312) qu'elle a reçu des forces de viscosité un travail égal en valeur absolue à $\frac{\varpi v'^2}{2g}$ ou à $\frac{\varpi}{2g}(u^2 + 2gz)$. La

somme des travaux analogues, pour toutes les molécules qui composent le poids P dépensé par seconde, sera

$$P\frac{u^2}{2g}+\Sigma\varpi z;$$

le premier terme étant connu, il nous reste seulement à calculer le second.

Pour cela nous chercherons d'abord $\Sigma\varpi z$, en n'étendant la somme qu'aux molécules d'un auget. Concevons qu'on ait déterminé, comme il a été dit plus haut, les positions de l'auget pour lesquelles le déversement commence et finit, et, dans un certain nombre de positions intermédiaires, le volume d'eau q' restant dans l'auget. Désignons alors par

c la hauteur du bord extérieur de l'auget au-dessus du niveau dans le bief d'aval, quand le déversement commence et que l'auget contient encore toute l'eau qu'il a reçue du bief d'amont, soit un volume q;
c' la hauteur analogue quand le déversement vient de se terminer;
z cette hauteur pour une position intermédiaire quelconque, à laquelle répond le volume d'eau q';
Π le poids de l'unité de volume d'eau.

Pendant que z varie de dz, un volume d'eau $-dq'$ tombe de la hauteur z; la somme des produits des volumes élémentaires par leurs ordonnées z, ou $\frac{1}{\Pi}\Sigma\varpi z$, peut donc s'exprimer par $-\int_q^0 z\,dq'$, ou bien par $\int_0^q z\,dq'$. Cette dernière intégrale s'évaluerait par une quadrature approximative, quand on aurait trouvé préalablement les valeurs de z pour une suite de valeurs de q', variables en progression arithmétique, depuis o jusqu'à q. Il sera peut-être plus commode de rechercher les valeurs de q' répondant à des valeurs croissantes de z, en progression arithmétique, parce qu'on les obtient sans tâtonnement. On transforme alors l'intégrale définie $\int_q^0 z\,dq'$

en une autre, au moyen de l'intégration par parties; on a

$$\int z\,dq' = q'z - \int q'\,dz.$$

et si l'on prend les intégrales entre les limites $q' = 0$, $q' = q$, auxquelles répondent $z = c'$, $z = c$,

$$\int_0^{q} z\,dq' = qc - \int_{c'}^{c} q'\,dz.$$

On déduit de là, pour la somme des produits ϖz relative à un seul auget,

$$\Sigma \varpi z = \Pi \left(qc - \int_{c'}^{c} q'\,dz \right);$$

en multipliant ce résultat par le nombre d'augets qui se déversent dans l'unité de temps, c'est-à-dire par $\frac{Q}{q}$, et observant que $P = \Pi Q$, on trouve, pour la somme complète des produits ϖz qu'il s'agissait de calculer,

$$P \left(c - \frac{1}{q} \int_{c'}^{c} q'\,dz \right);$$

on aurait donc, en résumé, comme expression du travail perdu par unité de temps en raison du déversement des augets,

$$P \left(\frac{u^2}{2g} + c - \frac{1}{q} \int_{c'}^{c} q'\,dz \right).$$

La dernière intégrale définie serait facile à calculer par la formule de Simpson ou toute autre formule de quadrature approchée. Si l'on voulait se contenter d'un moyen assez grossier, mais peut-être suffisant dans la pratique, on remplacerait la variable q', sous le signe $\int$, par sa valeur moyenne $\frac{1}{2} q$, et l'expression précédente se réduirait à

$$P \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{c + c'}{2} \right),$$

absolument comme si toutes les molécules tombaient d'une même hauteur $\frac{c + c'}{2}$.

On a ainsi tous les éléments nécessaires pour déterminer théoriquement l'effet dynamique de la roue en dessus.

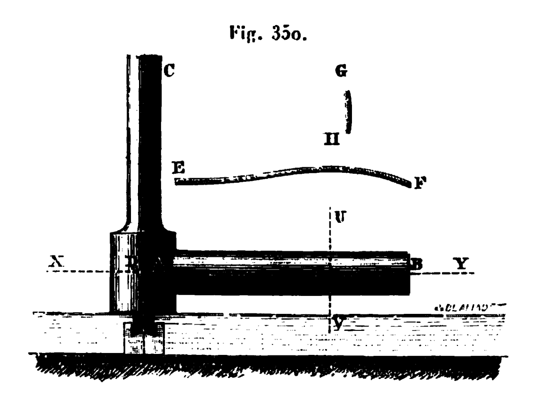
L'expérience prouve qu'une roue de ce genre, quand elle est établie dans de bonnes conditions, peut donner lieu à un rendement de 0,80, mais que ce chiffre diminue avec une roue rapide et peut s'abaisser à 0,40. Les roues en dessus sont donc, quant au rendement, entièrement analogues aux roues de côté. Mais ces dernières conviennent à des chutes petites ou moyennes, de 1^m à 2^m ou $2^m,50$, pouvant à la rigueur s'élever jusqu'à $3^m,50$. A partir de $3^m,50$, la roue en dessus devient préférable et convient très bien pour des chutes de 4^m à 6^m. On peut au besoin l'employer jusqu'à des hauteurs de chute de 10^m; mais sa construction devient de plus en plus difficile à mesure que sa hauteur augmente. Dans le cas de chutes très élevées, on aurait recours aux turbines, dont il sera question un peu plus loin.

317. *Anciennes roues à axe vertical.* — Les anciennes roues à axe vertical présentaient ordinairement deux dispositions différentes, désignées par les noms de *roues à cuillers* et *roues à cuve.*

Dans la première, les palettes AB (*fig.* 350), régulièrement distribuées autour d'un arbre vertical CD, présentent une forme légèrement concave dans le sens de leur longueur et dans celui de leur largeur, ce qui justifie le nom de *cuiller* qu'on leur a donné; EF et GH sont les coupes d'une palette AB par les plans XY et UV, le premier horizontal et mené à mi-hauteur, le second normal à l'axe de figure de la palette. L'eau est amenée à peu près horizontalement et à proximité de la roue par un canal en planches, où elle coule en sortant d'un bassin sous une assez grande charge, et par conséquent avec beaucoup de vitesse; elle vient choquer successivement chaque palette dans la partie concave, ce qui a pour résultat d'augmenter l'action mutuelle (n° 299). Après avoir agi, elle tombe dans le bief d'aval, dont le niveau est un peu en dessous des palettes.

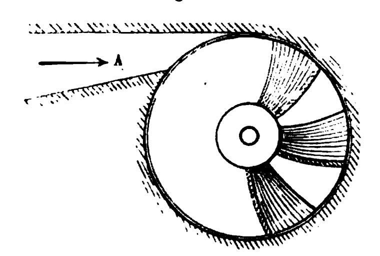
Le rendement obtenu avec les roues à cuillers est assez médiocre; il varie de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{6}$.

Fig. 350.



La roue *à cuve* ne donne pas un résultat beaucoup meilleur. Une cuve cylindrique verticale en maçonnerie reçoit l'eau du bief d'amont par un canal d'amenée A (*fig.* 351), dont les côtés latéraux présentent un certain évasement en s'éloignant

Fig. 351.



de la cuve, et dont le fond est tantôt horizontal, tantôt en pente du côté de la roue. L'une des faces latérales de ce canal est d'ailleurs tangente au cylindre vertical de la cuve. La roue, dont l'axe coïncide avec celui de cette cuve, consiste en un certain nombre de palettes placées tout autour de l'arbre, à des intervalles égaux. Ces palettes sont des surfaces hélicoïdales, engendrées par un profil horizontal concave du

côté qui reçoit l'action de l'eau, en donnant à ce profil un mouvement de vis le long et autour de l'axe de rotation. Le jeu de l'appareil se comprend sans peine : l'eau arrive avec une assez grande vitesse par le canal A, tend à circuler autour de la cuve, et, rencontrant les palettes sur son passage, les oblige à tourner avec l'arbre qui les porte. En même temps, elle obéit à l'action de la pesanteur, traverse la roue par les espaces libres entre les palettes et tombe dans le bief d'aval, dont le niveau se trouve placé très peu au-dessous. On voit que l'eau doit éprouver une agitation considérable à son entrée dans la roue, et de plus qu'elle agit sur celle-ci pendant trop peu de temps pour ne pas conserver une vitesse notable à la sortie. Aussi le rendement, quelquefois très faible et voisin de 0,15, ne monte jamais au delà de 0,40.

Nous allons laisser de côté ces machines primitives, pour en étudier d'autres plus perfectionnées.

318. *Description de trois types principaux de turbines.* — Les roues à axe vertical qu'on nomme *turbines* présentent trois types principaux dont nous donnerons la description sommaire.

(*a*) *Turbine Fourneyron.* — Cette turbine est représentée dans ses organes essentiels par la *fig.* 352.

L'eau du bief d'amont A descend dans le bief d'aval B en suivant une cuve à section horizontale circulaire, dont CD est l'ouverture supérieure. Cette cuve, parfaitement fixe, repose sur des appuis en charpente ou en maçonnerie; elle se prolonge par un autre cylindre circulaire en fonte EGIF, mobile verticalement, qu'on peut abaisser plus ou moins, ainsi qu'on l'expliquera par la suite. Le fond KK'K''L''L'L de la cuve est relié à un cylindre creux *abcd* que l'on soutient à sa partie supérieure; ce cylindre, nommé *tuyau porte-fond*, est en outre destiné à préserver du contact de l'eau l'arbre vertical *ef*, auquel un mouvement de rotation doit être donné par la chute. On comprend en effet que, si l'eau du bief d'amont arrivait jusqu'à l'arbre, il serait nécessaire, pour éviter les fuites, de faire passer celui-ci dans des garnitures fortement serrées, ce qui occasionnerait des frottements, indépendamment de ceux qui naîtraient du contact même du liquide.

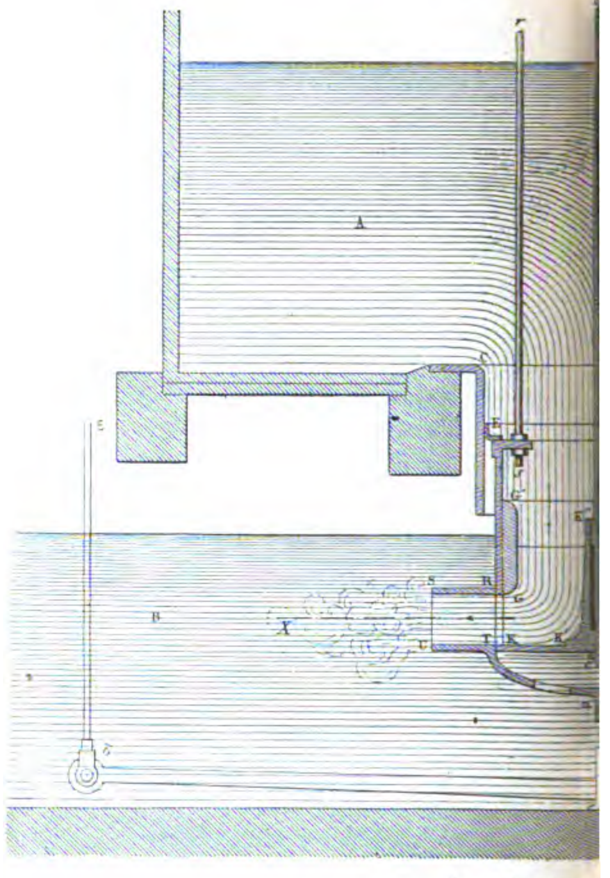
L'arbre ainsi que le tuyau porte-fond sont d'ailleurs concentriques avec la cuve.

Entre le bas GI de la vanne cylindrique EGIF et le plateau annulaire KL, il reste tout autour du périmètre du fond une ouverture GK, IL, par laquelle peut s'écouler l'eau. Mais comme il est important, ainsi qu'on le verra, que les filets ne s'écoulent pas dans une direction quelconque, on les guide à leur sortie par un certain nombre de cloisons cylindriques à génératrices verticales, que soutient le plateau KL et dont la coupe horizontale définit suffisamment la disposition; parmi ces cloisons directrices, les unes, telles que *gh*, vont rejoindre les parois K′K″, L′L″; les autres, telles que *ik*, sont plus courtes, afin d'éviter un trop grand rapprochement de ces cloisons vers leurs extrémités les plus voisines de l'axe.

En regard de l'ouverture GK, IL se trouve la turbine proprement dite, comprise entre deux plateaux annulaires SRMN, UTPQ; ces plateaux sont reliés entre eux par les aubes, qui sont des cylindres à génératrices verticales, donnant en coupe horizontale une série de courbes, telles que *lm*, *pq*, ...; le plateau inférieur est, de plus, relié à l'arbre par une surface de révolution T$\alpha\beta$P, calée sur celui-ci, de manière à former un tout parfaitement solidaire. L'arbre repose sur un pivot inférieur; un levier $\gamma\delta$, mû par une tige $\delta\varepsilon$ qui se termine en un point facilement accessible, permet de soulever tant soit peu cet appui, lorsque l'usure des surfaces frottantes a produit une légère descente de l'arbre.

Pour comprendre comment l'action de l'eau va mettre la turbine en mouvement, supposons d'abord que l'arbre soit rendu fixe. Alors les filets liquides, sortant de la cuve par les intervalles entre les cloisons directrices, viendront frapper la concavité des aubes; ils exerceront donc une pression plus grande sur la partie concave que sur la partie convexe d'un canal, tel que *lmpq*, formé par deux aubes consécutives, d'abord à cause du choc, et aussi à cause des forces d'inertie centrifuges qui répondent au mouvement curviligne des molécules d'eau. Il résulterait de là une série d'actions, dont les moments relativement à l'axe tendraient tous à faire tourner le système des aubes dans le sens de la flèche marquée sur la coupe horizontale; donc, il se produira effectivement une

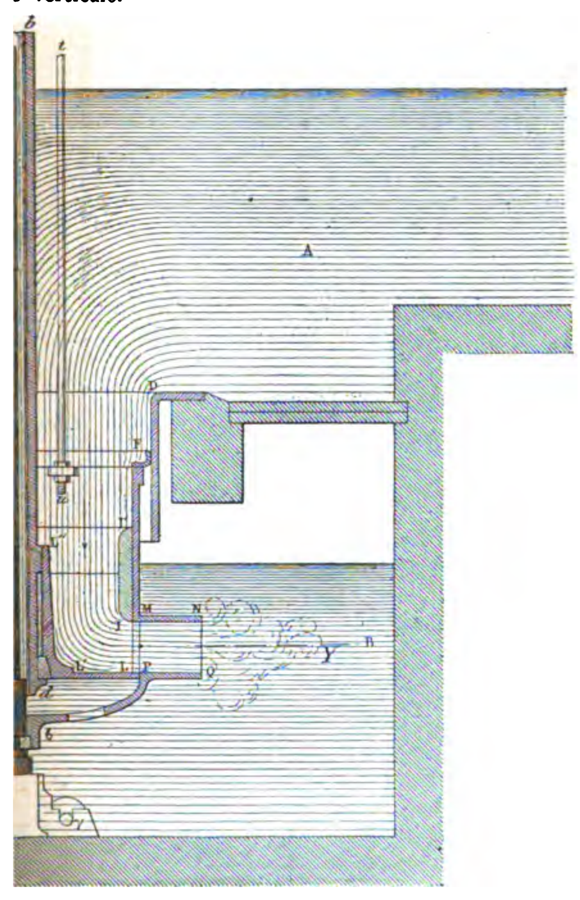
Fig. 352. — (



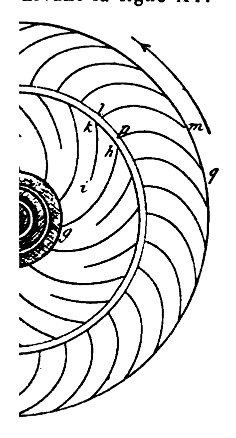
Coupe horizonta



e verticale.



uivant la ligne XY.



rotation dans le sens dont nous parlons, si l'on rend à l'arbre la liberté de tourner, même en lui opposant une résistance dont le moment serait inférieur à celui des actions motrices.

Afin de diminuer autant que possible le travail des frottements pendant le trajet de l'eau depuis le bief d'amont jusqu'à la roue, on a soin : 1° de donner à l'ouverture CD un diamètre assez grand, afin que l'eau coule dans la cuve sans beaucoup de vitesse; 2° d'arrondir les bords de cette ouverture, afin d'éviter les remous qui pourraient résulter des changements brusques dans la direction des filets liquides; 3° pour une raison toute semblable, de munir la vanne cylindrique d'appendices en bois GG′, II′, placés à la partie inférieure et arrondis sur leurs bords, comme le représente la figure. La garniture de bois n'est pas d'ailleurs continue; elle se compose d'une série de madriers, occupant chacun l'espace libre entre deux cloisons directrices consécutives, de manière que la vanne puisse s'abaisser sans obstacle jusqu'au fond KK′L′L.

Il faut, en outre, pour obtenir un bon rendement, remplir les deux conditions générales indiquées au n° 312, c'est-à-dire s'arranger pour que l'eau entre sans choc dans la turbine, et qu'elle en sorte avec une vitesse absolue aussi petite que possible. Pour remplir la première condition, le constructeur dispose des angles sous lesquels les cloisons directrices gh et les aubes pq coupent les cylindres qui les limitent en h et p; il peut, en outre, faire varier entre certaines limites la vitesse angulaire de la turbine, suivant la résistance utile qu'il lui donne à vaincre, comme on l'a dit au n° 313, à propos de la roue en dessous à aubes planes. Or la vitesse relative avec laquelle l'eau entre dans la turbine au point p sera la résultante de sa vitesse absolue et de sa vitesse d'entraînement, prise en sens contraire; pouvant faire varier la direction de la première composante et l'intensité de la seconde, pouvant, en outre, faire varier la direction du premier élément de l'aube pq, on comprend sans peine qu'on a le moyen de rendre la vitesse relative en p tangente à l'aube, ce qui supprime le choc à l'entrée de l'eau.

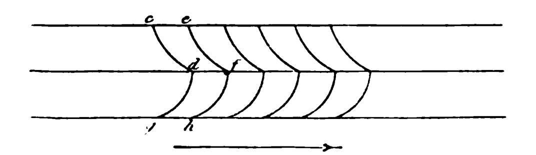
Quant à la vitesse absolue de l'eau à sa sortie, il est évident qu'elle ne peut pas être nulle; car, si cela était, les molécules

liquides resteraient à une distance constante de l'axe et ne sortiraient pas de la turbine; le débit deviendrait par conséquent nul. Mais on peut donner à la vitesse absolue de sortie une valeur modérée, en s'imposant la condition que la vitesse relative au point extrême *q* de l'aube soit égale à la vitesse d'entraînement et que l'angle de ces deux vitesses soit très ouvert, de 150° à 160° par exemple; la vitesse absolue de sortie résulte alors de deux composantes égales et presque directement opposées. C'est pour ce motif que les aubes coupent la circonférence extérieure qui les limite, sous un angle assez aigu, qu'on prend d'ordinaire entre 20° et 30°.

(*b*) *Turbine Fontaine.* — L'idée première de cette turbine appartient à Euler, mais l'habile constructeur dont elle porte le nom en a donné la réalisation pratique. La *fig.* 353 représente d'abord une coupe verticale de l'appareil. Un pieu ou support métallique vertical AB est fixé solidement dans la maçonnerie formant le fond du bief inférieur; il soutient à son extrémité supérieure A un arbre creux en fonte GDEF qui l'entoure, et qui se prolonge au-dessus par un arbre plein portant les roues d'engrenage ou poulies, pour la transmission du mouvement. Une vis, avec un écrou C, permet de régler la position de l'arbre dans le sens vertical. A peu près au niveau des eaux d'aval (ou, si l'on veut, au-dessous) se trouve la turbine HIKLMNOP, reliée invariablement au bas de l'arbre creux; elle est comprise entre deux surfaces de révolution autour de l'axe vertical de rotation, lesquelles ont HK et IL pour lignes méridiennes ; dans l'intervalle, on place les aubes, qui reçoivent l'action de l'eau et rendent les deux surfaces solidaires. L'eau arrive du bief supérieur *a* sur les aubes de la turbine, en s'écoulant par une série de canaux distributeurs, compris entre deux autres surfaces de révolution fixes, dont QH et RI sont les lignes méridiennes; leur intervalle est subdivisé par des cloisons, de manière à former une suite de canaux juxtaposés, dans lesquels les filets liquides se meuvent en suivant des courbes qui présentent une certaine inclinaison à leur rencontre avec le plan horizontal HIMN.

Afin de donner une idée nette de la forme des cloisons directrices et des aubes, imaginons qu'on fasse une coupe par un cylindre, ayant pour axe de figure l'axe de rotation et pas-

Fig. 353.



sant par les milieux des intervalles QR, HI, KL, et ensuite qu'on développe ce cylindre sur un plan. La coupe développée des cloisons donnera une série de courbes identiques, telles que *cd*, *ef*, ..., comprises entre deux droites parallèles; de même, pour les aubes de la turbine, on obtiendra les courbes *dg*, *fh*, ..., comprises dans une autre bande, au-dessous de la première. Maintenant reconstituons par la pensée le cylindre qui a été développé, et concevons des surfaces gauches engendrées par une droite horizontale, qui s'appuierait constamment sur l'axe et successivement sur chacune des courbes dont on vient de parler; nous aurons ainsi défini les surfaces des cloisons et aubes.

Il est sans doute inutile de décrire les dispositions par suite desquelles l'eau du bief d'amont ne trouve, pour s'écouler dans le bief d'aval, d'autre issue que les canaux formés par les cloisons directrices; à cet égard, la figure paraît donner des indications suffisamment claires.

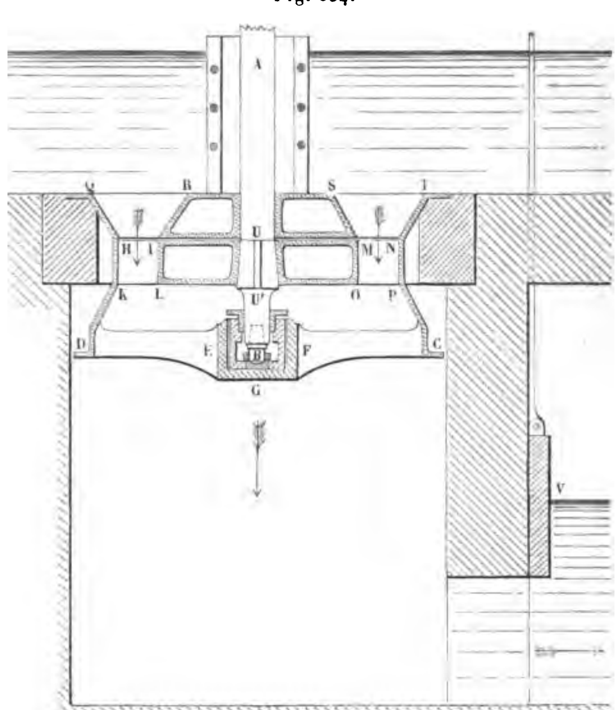
On se rendrait compte, comme dans le cas de la turbine Fourneyron, du sens dans lequel doit tourner la machine, en vertu de l'action qu'elle reçoit de la part de l'eau; ce sens est celui de la flèche tracée au-dessous du développement des aubes. On reconnaîtrait aussi, par des considérations analogues, la possibilité de remplir les conditions générales d'un bon récepteur hydraulique.

(*c*) *Turbine Kœcklin.* — La turbine Kœcklin, dont la disposition d'ensemble a été primitivement imaginée par un mécanicien nommé Jonval, ne se distingue pas essentiellement de la turbine Fontaine, quant à l'arrangement des aubes et des cloisons directrices, ni quant au mode d'action de l'eau. La différence la plus importante consiste en ce que la turbine est placée au-dessus du bief d'aval, comme le représente la *fig.* 354, coupe verticale de l'appareil. Les cloisons directrices, établies dans un espace annulaire, dont les trapèzes QRHI, STMN indiquent la coupe, sont reliées à une espèce de tourteau en fonte qui embrasse l'arbre AB, sans faire corps avec lui ni le presser fortement; elles forment une suite de canaux inclinés, par lesquels l'eau du bief d'amont s'écoule et arrive sur les aubes de la turbine, placées immédiatement en dessous, comme dans la turbine Fontaine. Ces aubes font corps

avec un autre tourteau calé sur l'arbre; elles occupent l'espace annulaire HIKL, MNOP.

Les canaux inclinés formés par deux aubes ou deux cloisons consécutives sont limités extérieurement par une cuve fixe en fonte, posée sur les bords d'un puits en maçonnerie; c'est une

Fig. 354.



surface de révolution autour de l'axe vertical AB, ayant QHKD pour profil méridien. Au bas de cette cuve se trouve un certain nombre de bras soutenant un siège central, sur lequel porte le pivot de l'arbre tournant.

L'eau sortie de la turbine par les orifices KL, OP s'écoule jusqu'au bief inférieur, en descendant par le puits en maçonnerie, et passant ensuite dans une ouverture qu'on peut diminuer à volonté par le moyen d'une vanne V. Au moment de la

mise en train, on ferme d'abord la vanne V et l'on ouvre les orifices QR, ST, en ayant soin de ménager une issue à l'air primitivement renfermé dans le puits; quand celui-ci est plein d'eau, on ferme l'orifice par lequel est sorti l'air et l'on ouvre progressivement la vanne, de manière que l'écoulement de l'eau s'établisse du plan inférieur de la turbine jusqu'au bief d'aval, sans que le puits cesse d'être rempli d'une colonne d'eau continue. Il faut cependant, pour que cela soit possible, que la hauteur comprise entre le plan des orifices KL, OP et le niveau du bief d'aval ne soit pas trop considérable; elle ne peut évidemment pas atteindre $10^m,333$, hauteur représentative de la pression atmosphérique, et, pratiquement, il est bon de la limiter à 6^m. Moyennant ces précautions, la hauteur en question ne doit pas être comptée comme une perte de chute, car elle correspond à une diminution de pression sur l'eau qui sort de la turbine; l'étude théorique du mouvement de l'eau et du travail qu'elle transmet démontre alors que les choses se passent comme si les deux niveaux des biefs d'amont et d'aval remontaient d'une même hauteur, suffisante pour que le dernier s'élevât au-dessus de KLOP.

La situation de la turbine, au-dessus du niveau d'aval, permet très aisément (c'est là son principal avantage) de la mettre à sec; il suffit, pour cela, de permettre la rentrée de l'air par l'extrémité supérieure du puits et d'empêcher l'arrivée de l'eau du bief supérieur, tout en laissant ouverte la vanne du canal de fuite. On peut alors visiter la machine et faire les menues réparations qu'on jugerait utiles.

319. *Théorie simplifiée de la turbine Fourneyron.* — Les considérations et calculs théoriques à présenter au sujet des trois turbines précédentes offrent entre eux beaucoup de ressemblance et sont, pour ainsi dire, des variantes d'une seule théorie applicable aux trois systèmes. Nous nous bornerons, en conséquence, à en considérer un seul, et nous choisirons la turbine Fourneyron.

Une théorie complète de cette machine comporterait d'abord la solution du problème général suivant : Étant données toutes les dimensions d'une turbine, sa situation relativement aux biefs d'amont et d'aval, et enfin sa vitesse angu-

laire, déterminer le volume d'eau qu'elle dépense et le travail qu'elle reçoit de la chute. On chercherait ensuite les conditions pour que ce travail fût le plus grand possible, avec une chute et une dépense données.

Mais nous ne traiterons point la question en termes aussi généraux. Afin de la simplifier, nous admettrons, dès à présent, que toutes les dimensions ont été choisies et les dispositions prises, pour que la turbine remplisse le mieux possible les conditions d'un bon récepteur hydraulique, telles qu'on les a indiquées ou rappelées au n° 318 (*a*); à ces conditions, il convient encore d'en joindre une autre, dont l'utilité, peut-être moins évidente, tient à l'existence inévitable d'un petit intervalle ou jeu, entre la partie tournante de la machine et les parties fixes. Par suite de ce jeu, le liquide qui est sur le point de franchir l'extrémité des cloisons directrices, pour entrer dans la turbine proprement dite, se trouve en contact immédiat avec l'eau du bief d'aval. Il faut alors que la pression de ce liquide soit très peu différente de celle qui existe au même niveau, dans le bief d'aval, car autrement il y aurait, par le jeu dont il s'agit, aspiration ou jaillissement d'eau, suivant le sens de la différence de pression; dans le premier cas, l'eau aspirée produirait une perturbation dans le mouvement à l'intérieur de la turbine; dans le second, une partie du débit de la chute passerait sans agir sur le récepteur, et, en fin de compte, il y aurait toujours une perte de travail.

Ces conditions étant supposées remplies, nous pouvons, pour une turbine dont on donnerait toutes les dimensions et la hauteur de chute : 1° établir des relations auxquelles les dimensions données devront satisfaire; 2° calculer les diverses vitesses définissant le mouvement de l'eau, tant à son entrée dans la turbine qu'à sa sortie; 3° déterminer la vitesse angulaire de la turbine, son débit, le rendement de la chute d'eau et son effet dynamique.

Soient, en effet,

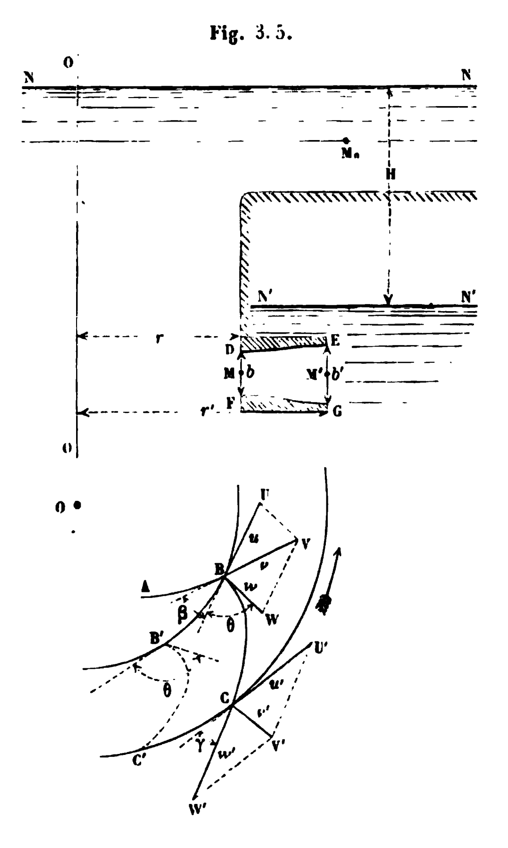
OO (*fig.* 355) l'axe de rotation;
NN, N'N' les niveaux des deux biefs;
DE, FG le profil des plateaux de la turbine, en coupe verticale;

AB, BC les profils d'une cloison et d'une aube, en coupe horizontale.

Nommons

v la vitesse absolue de l'eau en B, quand elle quitte les cloisons directrices et va entrer dans la turbine;

Fig. 3.5.



u sa vitesse d'entraînement et w sa vitesse relative, au même point, par rapport à la turbine prise pour système de comparaison;

v', u', w' les trois vitesses analogues, pour le point de sortie C;

ω la vitesse angulaire de la turbine;

r, r' les distances des points B et C à l'axe OO;

b, b' les hauteurs libres, comprises entre les deux plateaux au point d'entrée et au point de sortie de l'eau;

H la distance des niveaux NN, N'N', c'est-à-dire la hauteur de chute;

β l'angle sous lequel le profil AB coupe la circonférence de rayon $\overline{OB} = r$, c'est-à-dire l'angle des vitesses v et u;

θ l'angle de la même circonférence, avec le profil BC, lequel angle sera considéré comme supplémentaire de celui que w fait avec u;

γ l'angle aigu du profil BC avec la circonférence de rayon $\overline{OC} = r'$;

Q le volume d'eau débité par seconde;

P son poids;

Π le poids de l'unité de volume d'eau;

$\mathfrak{E}_e$ l'effet dynamique de la chute;

μ son rendement.

Si l'on suit une molécule depuis un point de départ M_0 dans le bief d'amont, où elle n'a pas de vitesse sensible, jusqu'à la position M où elle est prête à entrer dans la turbine avec la vitesse absolue v, on constatera facilement que la charge entre M_0 et M n'est autre que la hauteur H. En effet, la pression entre M_0 et le niveau NN varie suivant la loi hydrostatique (n° 277, deuxième règle); de M à N'N' la différence de pression est aussi celle qui résulte de la loi hydrostatique, en raison de la dernière condition posée ci-dessus, pour le bon fonctionnement de la machine; donc les niveaux piézométriques en M_0 et M dépassent ceux des deux biefs d'une même hauteur, qui représente la pression atmosphérique, et, par conséquent, leur différence est H. Dès lors l'application du théorème de D. Bernoulli (n° 274), dans le parcours M_0M, eu égard à ce qu'on peut négliger la vitesse initiale, conduit à l'équation

$$v^2 = 2gH. \tag{1}$$

Appliquons ensuite le même théorème au mouvement relatif de la molécule dans la turbine (n° 275), depuis la position M jusqu'au point M' de sortie. Comme on s'est arrangé pour que l'eau sorte avec peu de vitesse absolue (n° 318, a), le bief

d'aval peut être considéré comme sensiblement stagnant; le niveau piézométrique en M′ dépasse alors MN′ de la hauteur h (nº 277, deuxième règle), et coïncide, par conséquent, avec celui de M; la charge absolue étant ainsi nulle dans le parcours MM′, la charge apparente seule produit l'accroissement de la hauteur due à la vitesse relative, et l'on a

$$(2) \qquad w'^2 - w^2 = u'^2 - u^2.$$

Or une des conditions du rendement maximum consiste en ce que w' doit être égal à u' (nº 318, a); donc aussi, en vertu de l'équation (2), w est égal à u, et le parallélogramme des vitesses, à l'entrée comme à la sortie, prend la forme d'un losange.

On déduit facilement de là les six vitesses u, v, w, u', v', w'. D'abord, v résulte immédiatement de l'équation (1); ensuite, le triangle isoscèle BUV donne

$$(3) \qquad w = u = \frac{v}{2\cos\beta} = \frac{1}{\cos\beta}\sqrt{\frac{1}{2}gH}.$$

Les vitesses u et u' étant celles de deux points de la turbine placés à des distances r, r' de l'axe, on a nécessairement

$$\frac{u}{r} = \frac{u'}{r'};$$

donc

$$(4) \qquad u' = w' = \frac{r'}{r\cos\beta}\sqrt{\frac{1}{2}gH}.$$

Enfin la considération du triangle isoscèle CU′V′ conduit à

$$(5) \qquad v' = 2u'\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{r'\sin\frac{1}{2}\gamma}{r\cos\beta}\sqrt{2gH}.$$

Ce calcul donne aussi la vitesse angulaire ω; sa valeur est, en effet, $\frac{u'}{r'}$, soit, en vertu de l'équation (4),

$$(6) \qquad \omega = \frac{1}{r\cos\beta}\sqrt{\frac{1}{2}gH}.$$

Pour avoir la dépense Q, on remarquera qu'un élément ds

de la circonférence de rayon $\overline{OB} = r$ donne un orifice de surface $b\,ds$, coupé par les filets liquides sous l'angle β et avec la vitesse v; il sort par cet orifice, dans le temps dt, un prisme d'eau ayant pour volume le produit de sa base $b\,ds$ par sa hauteur $v\,dt \sin\beta$, soit $bv \sin\beta\, ds\, dt$, ce qui donne par seconde un débit $bv \sin\beta\, ds$. On en conclut, en négligeant l'épaisseur des cloisons,

$$(7)\quad Q = bv\sin\beta \int_0^{2\pi r} ds = 2\pi brv\sin\beta = 2\pi br\sin\beta\sqrt{2gH}.$$

On aurait une autre expression du débit en considérant la sortie de l'eau sur la circonférence extérieure $2\pi r'$ de la turbine; les orifices de sortie développés ont alors une surface totale $2\pi b'r'$, et, puisqu'ils sont coupés par la vitesse relative w' sous l'angle γ, on trouverait, de même,

$$(8)\qquad Q = 2\pi b'r'w'\sin\gamma = \frac{\pi b'r'^2\sin\gamma}{r\cos\beta}\sqrt{2gH}.$$

Comme l'incompressibilité du liquide exige que le volume entré dans la turbine soit égal à celui qui en sort, les deux expressions (7) et (8) représentent un même volume, et l'on a, par conséquent, en les égalant,

$$(9)\qquad 2br^2\sin\beta\cos\beta = b'r'^2\sin\gamma;$$

c'est une première relation à laquelle sont assujetties les dimensions de la turbine, pour qu'elle puisse fonctionner dans les conditions du rendement maximum. Le triangle BUV en fournit une autre, exprimant que la somme de ses angles égale 180°, ce qui donne

$$(10)\qquad 2\beta + \theta = 180^\circ.$$

La connaissance du débit Q par l'une des formules (7) ou (8) entraîne la connaissance du poids $P = \Pi Q$ dépensé par seconde, et aussi celle de la puissance absolue PH de la chute. On en déduit l'effet dynamique de celle-ci, en retranchant de PH le travail des résistances secondaires pendant chaque seconde, dans le trajet de l'eau, depuis le bief d'amont jusqu'au bief d'aval. Or, en raison des précautions qu'on a prises, dans

l'établissement de la turbine, ces travaux dus à la viscosité paraissent avoir peu d'importance jusqu'au point où l'eau, quittant la turbine, entre dans le bief d'aval; là seulement la vitesse v' de sortie donne lieu à un travail négatif $-\mathrm{P}\frac{v'^2}{2g}$ (nº 312), de sorte qu'on peut poser approximativement

$$(11) \qquad \mathcal{E}_e = \mathrm{P}\left(\mathrm{H} - \frac{v'^2}{2g}\right) = \mathrm{PH}\left(1 - \frac{r'^2 \sin^2\frac{1}{2}\gamma}{r^2\cos^2\beta}\right);$$

d'où résulte, en divisant par PH,

$$\mu = \frac{\mathcal{E}_e}{\mathrm{PH}} = 1 - \frac{r'^2 \sin^2\frac{1}{2}\gamma}{r^2\cos^2\beta}$$

ou, en vertu de la relation (9),

$$(12) \quad \mu = 1 - \frac{2b\sin\beta\cos\beta}{b'\sin\gamma}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{\cos^2\beta} = 1 - \frac{b}{b'}\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma.$$

Les relations numérotées de 1 à 12 donnent la solution complète des questions qu'on s'était proposées.

La considération du rendement μ fait voir l'utilité d'attribuer de petites valeurs aux angles β et γ; toutefois on ne peut pas les diminuer jusqu'à 0; car les formules (7) et (8) montrent qu'alors le débit serait nul, ainsi que la puissance absolue de la chute. On ne peut pas non plus adopter la valeur $\beta = 90°$, qui rendrait impossible l'équation (9). La pratique a conduit à prendre γ de 20° à 30°, et β voisin de 45°; l'équation (10) donne alors θ voisin de 90°. D'ailleurs on ne dépasse guère cette limite de 90° et l'on se tient plutôt un peu au-dessous; avec θ obtus, on aurait un profil d'aubes tel que B'C', et alors l'intervalle de deux aubes consécutives formerait un canal à courbure très prononcée, qui produirait une résistance notable au mouvement de l'eau.

Moyennant les valeurs numériques qu'on vient d'attribuer à β et γ, pourvu qu'on ait soin aussi de faire $\frac{b}{b'}$ inférieur ou au plus égal à 1, la formule (12) indique pour le rendement des

valeurs très satisfaisantes. Si l'on prend, par exemple,

$$\beta = 45^\circ, \quad \gamma = 25^\circ, \quad \frac{b}{b'} = 0,8,$$

on aura

$$\mu = 1 - 0,8 \operatorname{tang} 12^\circ 30' = 0,823.$$

Mais ce n'est là qu'un rendement théorique; dans la réalité, il peut se trouver amoindri, soit par les pertes qu'on a négligées, soit parce que les conditions du maximum d'effet ne seraient pas rigoureusement remplies. Il est prudent de ne pas compter sur un rendement moyen supérieur à 0,70.

320. *Remarques diverses au sujet des turbines.* — Contrairement à ce qui a lieu pour les roues à axe horizontal, les turbines conviennent à des hauteurs de chute très variées, et l'on pourrait presque dire à toutes les hauteurs possibles. Ainsi on a l'exemple d'une turbine établie à Gisors avec une chute de $0^m,40$, et celui d'une turbine construite dans la Forêt-Noire par Fourneyron, avec une chute de 108^m; malgré ces hauteurs exceptionnelles, le rendement obtenu est toujours bon.

Un caractère spécial des turbines, c'est qu'elles peuvent dépenser beaucoup d'eau sous de petites dimensions, et acquérir ainsi une grande puissance, sans devenir encombrantes. Supposons, par exemple, une turbine Fourneyron, construite d'après les données suivantes, qui ont été choisies de manière à satisfaire aux conditions générales de la théorie et à vérifier aussi les équations (9) et (10) du n° **319** :

$$H = 6^m,00, \quad r = 0^m,432, \quad r' = 0^m,600,$$
$$b = 0^m,072, \quad b' = 0^m,0883,$$
$$\beta = 45^\circ, \quad \gamma = 25^\circ, \quad \theta = 90^\circ.$$

On tire alors des équations (6) et (7)

$$\omega = 17,76, \quad Q = 1^{mc},499.$$

La vitesse angulaire ω répond à un nombre de tours $\frac{30\omega}{\pi}$ par minute, soit $169^{tours},6$; le débit en poids est de 1499^{kg} par seconde, et, comme il y a 6^m de chute, cela fait une puissance absolue égale à 6×1994^{kgm}, ou encore à près de 120 chevaux

dynamiques (n° 303), sur lesquels une proportion de 70 pour 100 pourrait se transmettre à la turbine. Voilà donc une roue rendant disponible une puissance de 84 chevaux, et n'occupant néanmoins qu'un espace de $1^m,20$ de diamètre, avec une hauteur de quelques décimètres à peine. C'est un avantage que n'aurait certainement aucune des roues précédemment étudiées.

La vitesse angulaire d'une turbine est déterminée par l'équation (6), en fonction de ses dimensions et de la hauteur de chute. Souvent il arrive que la hauteur de chute varie aux diverses époques de l'année, et cependant on est obligé de conserver toujours la même vitesse dans certains ateliers, afin d'assurer le bon fonctionnement des machines-outils, que la turbine met en mouvement. Alors les conditions du rendement maximum ne sont plus observées en entier. Cependant, l'expérience montre qu'on peut s'écarter de 25 pour 100, en plus ou en moins, de la vitesse normale donnée par l'équation (6), sans que le rendement éprouve une diminution très notable.

Malheureusement les turbines sont d'une construction assez difficile et d'un entretien coûteux. Au point de vue de l'économie, les roues à axe horizontal sont souvent préférables, quand la hauteur de chute et le volume d'eau disponible sont favorables à leur établissement.

321. *Du règlement de la dépense d'eau dans les turbines; turbine hydropneumatique.* — Une turbine, construite avec des dimensions et pour une chute données, dépense un volume d'eau déterminé, quand elle fonctionne dans les conditions du rendement maximum. Si cependant ce volume excède celui qui est amené au bief d'amont par les cours d'eau qui l'alimentent, il faut nécessairement s'arranger pour que la turbine débite moins, c'est-à-dire qu'il faut avoir un moyen de régler son débit, suivant le volume d'eau disponible. Pour cela, divers appareils ont été employés.

Dans la turbine Fourneyron, la cuve mobile EGIF (*fig.* 352, p. 406) permet d'atteindre le but; il suffit de l'abaisser plus ou moins pour rétrécir les ouvertures GK, IL, ou les fermer complètement. Le mouvement de translation verticale de la cuve

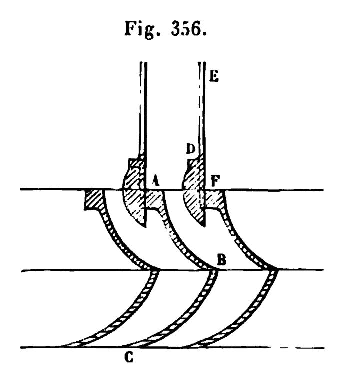
s'obtient au moyen de trois tiges verticales, telles que *rs*, *tu*, qui lui sont attachées en trois points, formant les sommets d'un triangle horizontal à côtés égaux. Les tiges se terminent, à leur partie supérieure, par des vis égales entre elles et entrent dans trois écrous assujettis à tourner sur place. Les trois écrous sont d'ailleurs munis de trois roues dentées, tout à fait pareilles, qui engrènent avec une même roue centrale, folle sur l'arbre de la turbine. En tournant un des écrous au moyen d'une manivelle, les deux autres tournent exactement de la même quantité, et la cuve se trouve soulevée ou abaissée parallèlement par les trois tiges à la fois.

Il y a un inconvénient assez grave à l'obstruction partielle des ouvertures GK, IL; c'est que les veines liquides sortant par ces ouvertures entrent immédiatement dans des canaux de section plus grande, où elles coulent forcément à plein tuyau, puisque la turbine est noyée dans le bief d'aval. Il se produit donc là un élargissement brusque de section, d'où résulte une perte de charge (n° **284**), et, par suite, un travail plus ou moins considérable des forces de viscosité (n° **276**), qui vient en déduction de l'effet dynamique (n° **311**). L'influence en est quelquefois telle, que le général Morin a constaté, dans une suite d'expériences sur une turbine particulière, une diminution de rendement de 0,79 à 0,24, quand l'ouverture laissée libre sous la vanne cylindrique descendait de sa hauteur maximum jusqu'à $\frac{1}{5}$ de cette hauteur. L'inconvénient est d'autant plus grand qu'il se produit aux époques où la chute débite peu d'eau et a, par suite, moins de puissance absolue; la diminution simultanée du rendement tend donc à rendre l'effet dynamique excessivement irrégulier. Pour remédier à cela, Fourneyron a proposé de subdiviser la turbine en plusieurs étages par deux ou trois plateaux annulaires horizontaux, pareils aux plateaux SRMN, UTPQ de la *fig.* 352, dont ils partagent la distance en trois ou quatre parties égales. En supposant, par exemple, trois étages, on voit qu'il n'y aura pas changement brusque de section, quand la levée de la vanne cylindrique sera $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ou la totalité de la distance IL; en tout cas, le phénomène de l'épanouissement

brusque n'affectera qu'une fraction de la veine liquide. Mais, par contre, on complique la construction de l'appareil et l'on augmente le frottement de l'eau sur les parois solides, puisqu'on multiplie ces parois et qu'on diminue le rayon moyen des canaux d'écoulement du liquide à travers la turbine.

M. Fontaine emploie pour régler la dépense de ses turbines une série de vannes à talon, analogues à celles que représente la *fig.* 356. AB est une cloison directrice, BC une aube de la

Fig. 356.

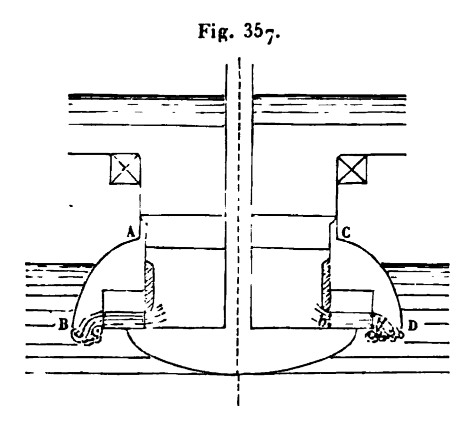


turbine, D une vanne pouvant s'enfoncer plus ou moins dans l'intervalle compris entre AB et la cloison voisine, placée à gauche. De cette manière, on rétrécit autant qu'on veut le passage libre dans cet intervalle, et, comme on agit sur tous d'une manière identique, il est visible qu'on a le moyen de réduire le volume d'eau dépensé, à tel degré qu'il est nécessaire. Le mouvement de translation verticale s'imprime simultanément à toutes les tiges EF, par un procédé analogue à celui de Fourneyron; ces tiges sont toutes assemblées dans une couronne métallique, en trois points de laquelle sont fixées des vis verticales, de dimensions identiques, munies d'écrous qu'on assujettit à tourner sur place. Les trois écrous portent trois roues dentées égales, entourées par une chaîne sans fin, à la Vaucanson, qui les oblige à tourner ensemble de la même quantité. Il suffit donc de faire tourner une des trois roues au moyen d'une manivelle, pour que tout le système des vannes s'élève ou s'abaisse par une translation verticale. La fermeture partielle des canaux compris entre les

cloisons, ici comme dans la turbine Fourneyron, n'est pas sans inconvénients, car le phénomène du changement brusque de section se produit encore.

Aux vannes à talon, M. Kœcklin a substitué des clapets pouvant tourner autour d'une charnière, de façon à s'appliquer exactement sur l'entrée QR, ST (*fig.* 354, p. 412) des orifices distributeurs, quand la fermeture est complète. On pourrait aussi modérer la dépense d'eau, par le moyen de la vanne V; mais l'expérience a montré que le travail perdu est alors plus grand que lorsqu'on emploie les clapets.

Fig. 357.



Il y a de si grands inconvénients, au point de vue de l'économie de la puissance motrice, à fermer partiellement les canaux distributeurs, qu'on a dû chercher tous les moyens possibles pour y remédier. Celui qui paraît donner la solution la plus heureuse du problème a été indiqué par Girard et Callon. Il consiste essentiellement à entourer la turbine Fourneyron d'une cloche en tôle ABCD (*fig.* 357), dont le plan inférieur, ouvert dans le bief d'aval, est à peu près à la hauteur des points où l'eau quitte les aubes. Dans cette cloche, au moyen d'une petite pompe mise en mouvement par la machine même, on comprime de l'air qui, peu à peu, expulse complètement l'eau de la cloche; alors, si l'on suppose la vanne cylindrique partiellement soulevée, la veine liquide qui s'échappe au-dessous coule dans l'air comprimé, et il n'en ré-

sulte aucun changement brusque de section, quoique l'épaisseur de cette veine soit moindre que la distance des deux plateaux. Le plateau supérieur n'est plus mouillé; comme il ne sert qu'à l'assemblage des aubes, on peut l'évider, afin de mieux assurer la libre circulation de l'air, au-dessus de la veine. Ainsi, la principale cause des pertes de travail dues à l'ouverture partielle de la vanne se trouve supprimée, et l'on peut s'attendre à un rendement peu variable. Cependant, malgré ses avantages probables, cette turbine s'est jusqu'à présent peu répandue. Ses inventeurs l'ont nommée *turbine hydropneumatique.*

L'air de la cloche est à la même pression que l'eau du bief d'aval, en contact avec le bord inférieur. En négligeant la petite épaisseur verticale de la veine, on peut donc regarder comme remplie la condition consistant en ce que la pression du liquide, à son entrée dans les intervalles entre les aubes, soit égale à celle qui existe au même niveau dans le bief d'aval. Par suite, le calcul d'une turbine hydropneumatique serait exactement pareil à celui que nous avons donné au n° 319 pour la turbine Fourneyron ordinaire, avec cette seule différence que b devrait représenter ici la levée de la vanne cylindrique, et que b', au lieu d'exprimer une dimension donnée, serait une inconnue auxiliaire, représentant l'épaisseur de la veine à son point de sortie.

322. *Récepteurs placés dans un courant fluide indéfini.* — Le courant peut être celui d'une grande rivière, ou un courant atmosphérique, ce qui nous donne à considérer deux genres de récepteurs différents.

(*a*) *Roues pendantes des bateaux.* — Un arbre horizontal est soutenu par un bateau solidement amarré, et vers l'une des extrémités de cet arbre, en porte-à-faux, se trouve pour ainsi dire suspendue une roue à palettes planes, plongeant dans l'eau par sa partie inférieure et recevant l'action du courant. Les palettes sont contenues dans des plans passant par l'axe; elles sont perpendiculaires au courant quand elles deviennent verticales par l'effet de la rotation; il y en a généralement douze, et leur hauteur est de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$ du rayon.

Si l'on désigne par

v la vitesse du courant;
S la surface plongée d'une aube, quand elle est verticale;
Π le poids de l'unité de volume d'eau,

le courant partiel intercepté par la roue aurait une section S avec une vitesse v; il débiterait donc un poids $\Pi S v$ par seconde et emporterait avec lui, dans le même temps, une demi-force vive égale à $\Pi S v \frac{v^2}{2g}$, susceptible de se transformer en un travail de même valeur. L'expérience démontre qu'en adoptant pour la roue une vitesse $0,4v$ à sa circonférence, on obtient le meilleur résultat possible, et qu'on recueille alors à peu près les $0,4$ du travail ci-dessus indiqué. L'effet dynamique $\mathcal{E}_e$ du courant partiel dont nous parlions est donc, dans ces circonstances, donné par la formule

$$\mathcal{E}_e = 0,2 \frac{\Pi}{g} S v^3 = 20,4 S v^3.$$

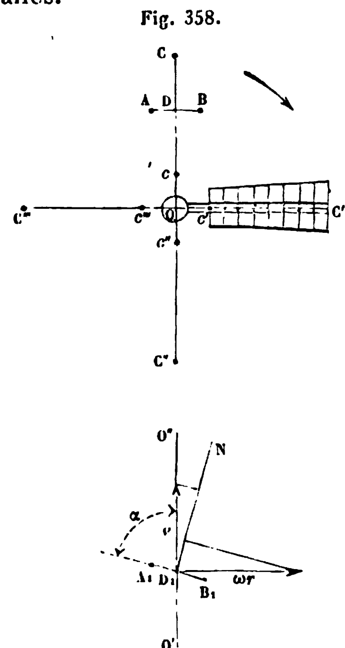
(*b*) *Moulins à vent.* — Le récepteur se compose essentiellement : 1° d'un arbre dont l'axe de rotation O (*fig.* 358) est placé parallèlement à la direction du vent; 2° de quatre bras, dont les axes de figure OC, OC′, OC″, OC‴, dirigés suivant deux droites rectangulaires entre elles, sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation; 3° de lattes, telles que AB, perpendiculaires aux bras, mais obliques à l'axe O; sur les lattes de chaque bras, lesquelles sont en nombre assez grand et se succèdent à de petits intervalles, on étend une toile, qui en fait ainsi une surface continue.

Une de ces quatre surfaces constitue l'une des quatre *ailes* du moulin; en imaginant qu'on l'amène en trois autres positions, par des rotations de 1, 2, 3 angles droits autour de l'axe O, on aurait les autres ailes, dont la figure et les dimensions sont identiques à celles de la première.

Les filets gazeux étant censés avoir tous une même vitesse parallèle à l'axe, il est évident que leur ensemble se présente toujours à une aile de la même manière dans toutes les positions, parce que les nouveaux filets que l'aile vient rencontrer en tournant sont identiques à ceux qu'elle rencontrait d'abord,

au double point de vue de la vitesse et de son angle d'incidence sur les divers éléments de surface; une aile reçoit donc du vent une action constante, et cette action forme le quart de l'action totale, puisqu'elle se répète identiquement pour les trois autres ailes.

Fig. 358.



Cherchons maintenant à évaluer le travail total fait par les actions du vent sur les quatre ailes, afin de pouvoir ensuite déterminer les conditions à remplir pour rendre ce travail le plus grand possible. Nommons

v la vitesse du vent;

ω la vitesse angulaire des ailes autour de l'axe O;

l la largeur constante $\overline{AB}$ de la surface gauche des ailes, largeur que nous supposerons petite, relativement à la longueur $\overline{OC}$;

r la distance $\overline{OD}$ du milieu D de AB à l'axe O;

r', r'' les limites $\overline{Oc}$, $\overline{OC}$ entre lesquelles varie r pour une aile entière;

α l'angle de AB avec l'axe de rotation;

$\mathfrak{T}$ le travail exercé sur les quatre ailes par le courant d'air, pendant une seconde.

L'élément de surface, compris entre AB et la génératrice infiniment voisine, peut être assimilé à un rectangle ayant pour dimensions l et dr; cet élément supporte une pression vive (n° 299), proportionnelle à la surface $l\,dr$ et au carré de la composante normale de la vitesse relative de l'air. Pour avoir cette composante, projetons AB en A_1B_1 sur un plan perpendiculaire à OC; la vitesse absolue v des molécules d'air qui arrivent au centre D de l'élément $l\,dr$ est, ainsi que la droite AB et la vitesse d'entraînement ωr du même point D, perpendiculaire à OC; la même chose a lieu pour la normale à la surface de l'aile. Donc ces quatre droites conservent, en projection, leurs longueurs et leurs angles; A_1B_1 fait avec v le même angle α qu'avec l'axe de rotation, auquel v est parallèle; ωr est perpendiculaire à v, et la normale D_1N perpendiculaire à A_1B_1. Par suite, les projections de v et de ωr sur la normale sont $v\sin\alpha$ et $\omega r\cos\alpha$, et la composante normale de la vitesse relative a pour valeur $v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha$. La pression vive sur $l\,dr$ s'exprime alors, en nommant k un coefficient constant, par

$$kl\,dr(v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha)^2.$$

Indépendamment de cette pression vive, l'élément superficiel $l\,dr$ supporte une pression hydrostatique; mais on peut en faire abstraction, car l'ensemble des pressions hydrostatiques sur les quatre ailes donne une force verticale, égale au poids de l'air déplacé et appliquée sur l'axe O, d'où il résulte que cette force ne contribue pas à la production du mouvement et fait un travail nul.

L'expression précédente conduit à une première condition d'établissement. Si $v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha$ s'annulait, il n'y aurait plus de pression vive, et la force motrice disparaîtrait; si $v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha$ devenait négatif, l'aile se déroberait au vent avec une vitesse normale, supérieure à celle du vent, et, non seulement il n'y aurait plus de pression vive motrice, mais il y aurait, sur la face arrière de l'élément d'aile $l\,dr$, une pression vive résistante. Il faut donc s'arranger pour avoir par-

tout

$$v \sin\alpha - \omega r \cos\alpha > 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\alpha > \frac{\omega r}{v},$$

ce qui donne pour l'angle α une limite inférieure croissant avec la distance r.

Le même angle ne peut d'ailleurs atteindre 90°, car alors, la surface $l\,dr$ étant perpendiculaire à l'axe, la force exercée par le vent deviendrait parallèle à cette droite et ne produirait aucun moment moteur. Le frottement de l'air étant supposé négligeable, la pression vive, ci-dessus déterminée, agit suivant la normale à la surface de l'aile; comme d'ailleurs son point d'application se déplace avec la vitesse ωr, le travail de cette force pendant une seconde sera

$$kl\,dr(v \sin\alpha - \omega r \cos\alpha)^2 \omega r \cos\alpha,$$

d'où résulte, en intégrant de r' à r'' et multipliant par 4, pour avoir le travail produit sur les quatre ailes,

$$\mathfrak{T} = 4kl\omega \int_{r'}^{r''} \cos\alpha(v \sin\alpha - \omega r \cos\alpha)^2 r\,dr.$$

Le travail $\mathfrak{T}$ dépend de la relation qu'on établit entre α et r en construisant la surface des ailes; il faut donc d'abord choisir cette relation de la manière la plus avantageuse. Or, moyennant la condition $\operatorname{tang}\alpha > \frac{\omega r}{v}$, qu'on s'est déjà imposée, tous les éléments de l'intégrale sont de même signe; les deux limites étant d'ailleurs indépendantes de la relation cherchée, il est bien clair qu'on rendra la somme des éléments maximum, si l'on rend maximum chacun d'eux, considéré séparément. On est donc conduit à chercher, en traitant r comme un paramètre constant, la valeur de α pour laquelle l'expression

$$\cos\alpha(v \sin\alpha - \omega r \cos\alpha)^2 = F(\alpha)$$

devient la plus grande possible, quand α varie depuis sa limite inférieure $\operatorname{arc\,tang} \frac{\omega r}{v}$ jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, limites auxquelles répondent des valeurs nulles de $F(\alpha)$. Le maximum se déter-

mine par l'équation $F'(\alpha) = 0$, soit

$$0 = -\sin\alpha(v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha)^2 \\ + 2\cos\alpha(v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha)(v\cos\alpha + \omega r\sin\alpha).$$

On peut supprimer la solution $v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha = 0$ qui annulerait $F(\alpha)$, au lieu de rendre cette fonction maximum; il reste alors

$$-\sin\alpha(v\sin\alpha - \omega r\cos\alpha) + 2\cos\alpha(v\cos\alpha + \omega r\sin\alpha) = 0,$$

soit, en divisant par $v\cos^2\alpha$ et ordonnant, l'équation

$$\text{tang}^2\alpha - \frac{3\omega r}{v}\,\text{tang}\,\alpha - 2 = 0,$$

d'où l'on tire une valeur positive et plus grande que $\frac{\omega r}{v}$, la seule qui convienne à la question

$$(1) \qquad \text{tang}\,\alpha = \frac{3\omega r}{2v} + \sqrt{\frac{9\omega^2 r^2}{4v^2} + 2}.$$

On connaît donc ainsi, pour chaque valeur de r, la valeur la plus convenable de α.

La valeur de α, donnée par l'équation (1), croît avec r, ce qui est d'accord avec les indications de la pratique. En général, on fait $\alpha = 60°$ pour le point c, et $\alpha = 80°$ pour l'extrémité C de l'aile. Coriolis a reconnu dans divers cas particuliers que ces valeurs s'écartent assez peu de celles qu'on trouverait par l'application de l'équation (1).

Connaissant maintenant α en fonction de r, on conçoit qu'on pourrait effectuer l'intégration qui fournit la valeur du travail $\mathcal{T}$, et arriver ainsi, pour un moulin de dimensions données, à une expression telle que

$$\mathcal{T} = f(v, \omega),$$

ne dépendant plus que de la vitesse v du vent et de la vitesse angulaire ω. On déterminerait enfin cette dernière, en fonction de v, de manière à rendre $\mathcal{T}$ maximum. Mais ce calcul est trop compliqué pour pouvoir être poussé jusqu'au bout, à moins qu'on n'opère sur des exemples particuliers, avec des

dimensions définies numériquement. Le plus souvent on se contente d'appliquer une règle expérimentale, d'après laquelle la vitesse $\omega r''$ à l'extrémité des ailes doit être égale à environ 2,5 ou 2,7 fois la vitesse v du vent; c'est-à-dire qu'on prend ω entre $2,5\,\frac{v}{r''}$ et $2,7\,\frac{v}{r''}$.

La largeur l est ordinairement de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{6}$ de la longueur $\overline{OC}$ des bras; les lattes commencent à une distance $\overline{Oc}$ du centre égale à $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ de la même longueur $\overline{OC}$.

Désignons encore par S la surface totale des ailes et par Π le poids de l'unité de volume d'air. Le courant partiel intercepté par les ailes a un débit sensiblement égal à Sv (1), et il emporte avec lui, dans chaque seconde, une demi-force vive exprimée par $\Pi S v \frac{v^2}{2g}$.

Si l'on adopte nos unités métriques ordinaires, l'air étant supposé à une température de 15°, il faut faire $\Pi = 1^{kg},226$, et l'expression précédente devient $0,0625\,S v^3$. C'est celle du travail que les ailes feraient sur l'air, si elles réduisaient au repos le courant partiel dont il s'agit; et l'on pourrait alors admettre que c'est aussi, dans la même hypothèse, le travail de l'air sur les ailes, sauf une légère erreur (n° **311**). Mais, en réalité, le courant ne perd pas toute sa vitesse, et le travail $\mathfrak{T}$ recueilli par le récepteur n'atteint pas la limite que nous venons de déterminer; d'après quelques expériences de Coulomb sur des moulins à vent situés dans les environs de Lille, ce travail paraît pouvoir être approximativement calculé par la formule

$$\mathfrak{T} = 0,0325\,S v^3;$$

on voit qu'on obtient à peu près la moitié de ce qu'on peut ici considérer comme la puissance absolue du courant d'air, ou plutôt de sa partie utilisable.

(1) Rigoureusement, il faudrait multiplier v par la projection de S sur un plan perpendiculaire à l'axe; mais, comme l'angle de chaque élément $l\,dr$ avec sa projection ne dépasse pas 30°, le cosinus correspondant est au moins 0,866, en sorte que S diffère peu de sa projection.

§ III. — De quelques machines à élever l'eau.

323. *Pompes.* — Les machines à élever l'eau peuvent se ranger dans la catégorie des machines-outils; car, assez ordinairement, elles reçoivent leur mouvement en vertu de leur liaison avec un récepteur quelconque, et accomplissent une certaine opération mécanique sur un corps directement soumis à leur action. Néanmoins, nous en plaçons ici l'étude, afin de terminer tout ce qui concerne les machines hydrauliques, avant de nous occuper des machines à vapeur, c'est-à-dire des récepteurs destinés à utiliser le dernier genre de moteurs que nous ayons à considérer dans ce Cours.

Les appareils qu'on nomme des *pompes* ont reçu dans l'industrie beaucoup de formes et dispositions diverses; nous ne parlerons que de celles où l'élévation de l'eau est produite par un piston, recevant un mouvement rectiligne alternatif, dans un cylindre appelé *corps de pompe.* Il y a deux espèces principales de piston : 1° le piston ordinaire, de peu d'épaisseur, compris entre deux disques métalliques, avec surface latérale garnie de cuir ou autres matières flexibles; il se meut, à frottement doux, dans un cylindre exactement alésé; on a soin, tant pour diminuer le frottement que pour empêcher les fuites d'eau, de graisser la surface latérale; 2° le piston plongeur. Dans le corps de pompe se meut, parallèlement à l'axe, un cylindre convexe de rayon un peu moindre, entrant par l'un des fonds et pouvant s'avancer tout près de l'autre. L'entrée de ce cylindre mobile (qui est le piston plongeur) se fait à travers une garniture hermétique, telle qu'une boîte à étoupes, afin d'empêcher les fuites d'eau. Dans ce système, le corps de pompe n'a pas besoin d'être exactement alésé, car il n'est pas touché par le piston; mais, pour que la boîte à étoupes atteigne convenablement son but, il faut que le piston reçoive une forme bien cylindrique, ce qui, du reste, est plus facile à réaliser pratiquement pour un cylindre convexe que pour un cylindre taillé en creux.

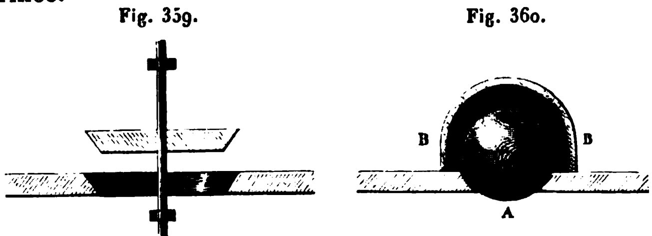
D'autres pièces mobiles dans les pompes sont les *soupapes,* qui ont pour but de fermer et d'ouvrir alternativement cer-

tains passages destinés à l'écoulement de l'eau. Voici quelques-unes de leurs dispositions les plus usitées :

1° La soupape à clapet est un disque plan, mobile autour d'une charnière et pouvant à certains instants se soulever ou se rabattre sur l'ouverture à fermer. Quand les eaux sont impures, des corps étrangers pourraient s'introduire dans la charnière et en rendre le jeu difficile; on remplace alors celle-ci par une lame de cuir attachée d'une part au clapet, et de l'autre aux parois fixes voisines de l'orifice. Ordinairement le bord du clapet est garni de cuir pour produire une bonne fermeture et adoucir les chocs.

2° La soupape conique (*fig.* 359) est un tronc de cône de révolution plein, qui s'applique sur une ouverture de même forme; la soupape est guidée dans son mouvement par une tige mobile entre deux œillets fixes. En se déplaçant alternativement dans un sens ou dans l'autre, elle ouvre ou ferme l'orifice.

Fig. 359. Fig. 360.



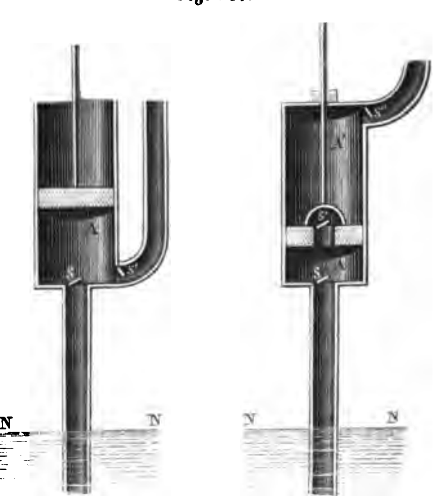
3° La soupape à boulet présente cet avantage qu'on peut se dispenser de la guider dans son mouvement. Elle consiste en une sphère mobile à l'intérieur d'une cage à claire-voie, qui limite ses excursions (*fig.* 360); elle repose sur un siège ayant la figure d'un segment sphérique creux, pris sur une sphère de même rayon. Quand la pression dans l'espace A l'emporte assez sur la pression dans l'espace B, la soupape quitte son siège et permet le passage de l'eau; mais, comme la cage est assez peu étendue pour que la boule ne puisse trouver aucune position d'équilibre en dehors du siège, elle y retombe dès que la différence de pression change de sens. D'ailleurs, comme la sphère est partout identique à elle-même, elle s'applique toujours bien sur le siège, de quelque manière qu'elle y retombe.

4° La soupape imaginée par M. Letestu, constructeur à Paris, est utile particulièrement pour les pompes servant à l'élévation des eaux impures. Elle consiste en un cône creux métallique, percé de trous que peut recouvrir intérieurement une lame de cuir, en s'appliquant sur la surface conique, à laquelle elle est fixée suivant une génératrice. L'ouverture est libre ou fermée, suivant que la pression est dominante à l'extérieur ou à l'intérieur du cône.

Les pompes prennent divers noms suivant certaines particularités que présente la manière dont elles produisent l'élévation de l'eau.

(*a*) *Pompe aspirante*. — Un corps de pompe A (*fig.* 361).

Fig. 361.



placé au-dessus du niveau NN de l'eau à élever, communique avec cette eau par un tuyau dit *tuyau d'aspiration* qui traverse une des deux bases du cylindre. Pendant que le piston s'éloigne de cette base, il fait le vide derrière lui; l'eau soumise extérieurement à la pression atmosphérique monte dans le tuyau et finit par entrer dans le corps de pompe, pourvu cependant qu'il ne soit pas situé trop au-dessus du niveau NN. L'eau une fois élevée dans le corps de pompe est envoyée au

bassin supérieur par l'un des deux moyens suivants : 1° Le piston est plein; pendant son retour en sens inverse, il produit sur le liquide un excès de pression, en vertu duquel se ferme une première soupape s à l'origine du tuyau d'aspiration, pendant que s'ouvre, au contraire, la soupape s', placée à l'origine d'un tuyau faisant communiquer le corps de pompe avec le bassin supérieur. L'eau refoulée par le piston traverse l'orifice de la soupape s' et s'élève dans le tuyau d'ascension. Quand ensuite le piston se meut de nouveau dans le premier sens indiqué, s s'ouvre, s' se referme, et les mêmes choses se reproduisent périodiquement. Cette variété de pompe aspirante se nomme *pompe aspirante et foulante.* 2° Le piston présente un vide faisant communiquer les deux parties A, A' du corps de pompe, aux époques où se lèvent une ou plusieurs soupapes s' articulées sur le piston; le tuyau d'aspiration est encore séparé de l'intérieur du corps de pompe par la soupape s; dans le voisinage de l'autre extrémité de ce corps de pompe se trouve l'origine du tuyau d'ascension, munie d'une soupape s''. Quand le piston s'éloigne de s, il produit l'aspiration, comme dans le premier cas; en outre, si l'on suppose la machine arrivée à son état de marche régulière et le corps de pompe plein d'eau, les soupapes s' se ferment, la soupape s'' s'ouvre et l'eau située dans le volume A' est soulevée par le piston, ce qui l'oblige à se rendre par le tuyau d'ascension dans le bassin supérieur. Lorsque ensuite le piston revient en sens inverse et se rapproche de s, les soupapes s, s'' se ferment et les soupapes s' s'ouvrent. Cette seconde variété reçoit le nom de *pompe élévatoire.*

(*b*) *Pompe foulante.* — Lorsque la soupape s est au-dessous du niveau NN, l'eau du bassin inférieur peut entrer directement dans le corps de pompe; le tuyau d'aspiration devient alors inutile et on le supprime. Dans ce cas, la pompe aspirante et foulante ci-dessus décrite se nomme simplement *pompe foulante.*

(*c*) *Pompe à double effet.* — Les deux parties du corps de pompe séparées par le piston communiquent avec les deux bassins par quatre soupapes s, s', s'', s''' (*fig.* 362), dont deux, s, s', entre le tuyau d'aspiration et le tuyau de pompe, et les deux autres, s'', s''', entre le corps de pompe et le tuyau d'as-

cension. Pendant que le piston marche en s'éloignant de s, les soupapes s, s'' sont ouvertes et les deux autres fermées; l'eau du bassin inférieur arrive par s dans le corps de pompe, et l'eau précédemment entrée de l'autre côté du piston est forcée de sortir par s''', pour se rendre dans le bassin supérieur. Quand le piston marche en sens inverse, s et s'' se ferment et

Fig. 362.



les deux autres soupapes s'ouvrent; l'eau du bassin inférieur entre par s' dans le corps de pompe, pendant que l'eau aspirée dans la course précédente est refoulée au dehors, sort par s'' et se rend au bassin supérieur par le tuyau d'ascension. De cette manière, le piston produit à la fois l'aspiration et le refoulement, en marchant dans un sens comme dans l'autre, au lieu de produire l'aspiration pendant une course et le refoulement dans la course suivante. C'est pour cela que la pompe est dite à double effet, ce qui ne veut pas dire qu'elle donne deux fois plus d'eau pour un même travail moteur employé à la faire marcher.

324. *Diverses indications théoriques et expérimentales concernant les pompes.* — Une pompe ne peut pas aspirer l'eau à une hauteur quelconque. Supposons, en effet, que la face du piston en contact avec la colonne aspirée se trouve à une hauteur h au-dessus du niveau dans le bassin inférieur, lorsque le piston est à son maximum d'élévation et va commencer une course en sens contraire. Le vitesse étant nulle à cet instant, la pression dans la colonne aspirée varie suivant la loi hydrostatique; sa valeur p à la hauteur h au-dessus du niveau où s'exerce la pression atmosphérique p_a sera donc, en nommant Π le poids de l'unité de volume d'eau,

$$p = p_a - \Pi h,$$

et, attendu que la pression ne peut être négative, il en résulte la condition

$$h < \frac{p_a}{\Pi} \quad \text{ou} \quad h < 10^m,33.$$

Si cette condition n'était pas observée, le corps de pompe ne pourrait se remplir à chaque période d'aspiration, puisque l'eau ne pourrait pas monter aussi haut que le piston, et même, si le tuyau d'aspiration avait une hauteur supérieure à $10^m,33$, il serait impossible que l'eau entrât dans le corps de pompe.

Pratiquement, on limite la hauteur h à 8^m. Quand la pression devient trop petite au sommet de la colonne aspirée, l'air mélangé à l'eau tend à s'en dégager, monte à la surface et tend à faire redescendre le liquide; en outre, il devient très difficile d'empêcher les rentrées de l'air extérieur dans l'appareil par les défauts que présentent presque inévitablement les joints ou garnitures.

Quant à la hauteur du refoulement, elle n'est évidemment limitée par aucune considération théorique. Si grande que soit la pression exercée sur le piston par suite de la hauteur du tuyau d'ascension, on conçoit qu'on puisse d'abord faire équilibre à cette résistance, et ensuite la surmonter en appliquant au piston une puissance encore plus grande. Cependant il ne faut pas perdre de vue, d'une part, que la machine doit avoir une solidité suffisante pour résister à ces grandes forces; d'autre part, que les fuites deviennent de plus en plus impor-

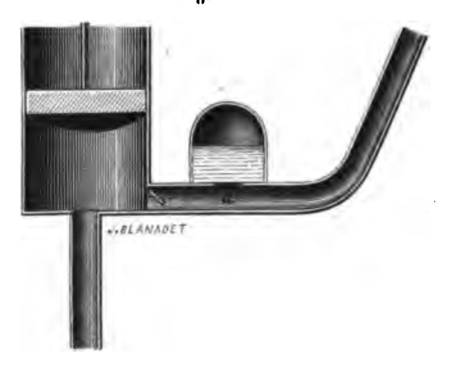
tantes, soit par les soupapes, soit par le jeu entre le piston et le corps de pompe. On se heurte encore là contre des difficultés pratiques, mais au total la limite dont nous parlons dépend de l'habileté du constructeur et des ressources matérielles dont il dispose. On peut citer des exemples de refoulement à des hauteurs assez considérables. La machine de Marly fait monter l'eau à une hauteur de 155^{m}; aux mines d'Huelgoat (Finistère), la hauteur de refoulement est de 230^{m}.

Le mouvement alternatif du piston est ordinairement produit, dans les pompes d'une certaine importance, par la combinaison de bielle et manivelle; ce mouvement présente une vitesse nulle aux deux extrémités de la course, tandis que, vers le milieu, la vitesse passe par un maximum, et l'accélération change de sens. Les mêmes phases se produisent dans le mouvement de l'eau, pendant que le piston la refoulera dans le tuyau d'ascension, si aucune précaution particulière n'est prise pour que les choses se passent autrement. Or, en déterminant la manière dont varie, à un instant donné, la pression dans ce tuyau, il faut, conformément au principe de d'Alembert, avoir égard aux forces d'inertie des molécules liquides; suivant que la vitesse croît ou décroît, ces forces d'inertie sont descendantes ou ascendantes et tendent à augmenter ou à diminuer la pression du liquide contenu dans le corps de pompe. La résistance opposée au mouvement du piston éprouve en conséquence des variations, qui peuvent devenir considérables quand le tuyau d'ascension a une grande longueur. Indépendamment de cette cause d'irrégularité dans la résistance, il y en a encore une autre dans les pompes à simple effet : c'est la dissemblance complète des effets que le piston produit suivant qu'il se meut dans un sens ou dans l'autre. De là résultent d'assez graves inconvénients. D'abord il faut donner aux pièces des dimensions qui les mettent en état de résister aux plus grands efforts et non aux efforts moyens qu'elles supportent; on est donc conduit à construire une machine lourde, coûteuse, perdant beaucoup de travail par les frottements. Ensuite, si l'on emploie comme moteurs des hommes ou des chevaux, l'irrégularité de la résistance les placera dans de mauvaises conditions et ils produiront moins de travail. Il y a donc un intérêt notable à faire en sorte que

le mouvement de l'eau dans le tuyau d'ascension se rapproche autant que possible de l'uniformité.

Un premier moyen qu'on peut employer pour cela consiste à placer un réservoir d'air sur ce tuyau, près du point où il s'embranche sur le corps de pompe (*fig.* 363). Si le mouvement ascensionnel s'accélère dans le tuyau et que la pression augmente en *a*, une partie du liquide pénètre dans le réservoir, où elle s'emmagasine en comprimant l'air qui s'y trouvait primitivement contenu; si, au contraire, le mouvement

Fig. 363.



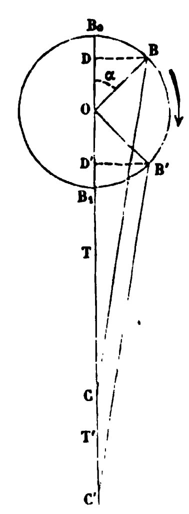
d'ascension se ralentit, la pression en *a* diminue, l'air comprimé réagit pour faire sortir l'eau du réservoir et augmenter la vitesse dans le tuyau. Le réservoir agit donc pour régulariser le mouvement.

Un autre moyen d'atteindre le même but consiste à faire arriver simultanément dans un même tuyau d'ascension les débits de plusieurs pompes. Pour montrer par un exemple l'effet de cette disposition, supposons une manivelle OB (*fig.* 364), de rayon *b*, tournant autour d'un axe projeté en O et s'articulant en B avec une bielle BC, qui elle-même s'articule en C avec la tige guidée TC du piston d'une pompe à double effet.

Une seconde manivelle OB′, en avance de 90° sur la première, conduit de même la tige T′C′ d'une autre pompe à double effet. Les dimensions des deux corps de pompe et les rayons des deux manivelles sont supposés d'égale grandeur. Si l'on

admet en outre que les bielles sont longues comparativement au rayon b, les vitesses des points C et C′ (c'est-à-dire celles des deux pistons) différeront peu des vitesses de B et B′, projetées sur la ligne B_0B_1 des points morts (n° 71); en appelant ω la vitesse angulaire autour de O et x l'angle BOB_0, on aura donc pour ces vitesses de C et C′

Fig. 364.



$$\omega b \sin x \text{ et } \omega b \cos x.$$

Nommons encore S la section des deux corps de pompe, A celle du tuyau d'ascension et U la vitesse que prend le liquide dans ce tuyau. Pendant un temps dt les deux pompes réunies enverront à ce même tuyau un volume d'eau égal au volume total engendré simultanément par les deux pistons réunis, soit un volume

$$S\omega b\, dt\,(\sin x + \cos x),$$

et, comme ce volume s'exprime aussi par $AU\,dt$, on en conclut

$$U = \frac{S}{A}\omega b\,(\sin x + \cos x).$$

Dans cette expression, il faut prendre $\sin x$ et $\cos x$ en valeur absolue; le changement de signe indique simplement que la vitesse de C ou de C′ change de sens, mais cela est indifférent pour le débit d'une pompe à double effet, lequel ne dépend que de la grandeur absolue et non du sens de la vitesse du piston. On aura donc une idée complète de toutes les valeurs de U en faisant varier x seulement de 0° à 90°. Dans cet intervalle, le seul facteur variable $\sin x + \cos x$, d'abord égal à 1, croît jusqu'à un maximum $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ répondant à $x = 45°$, puis décroît jusqu'à 1; sa valeur moyenne est

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx = \frac{4}{\pi} = 1,2732\ldots.$$

On voit donc que le rapport du maximum au minimum est

1,4142...; si la valeur moyenne était prise pour unité, le maximum serait exprimé par 1,1115 et le minimum par 0,7854. Avec une seule manivelle, au contraire, les vitesses U varieraient comme $\sin x$ entre 0° et 90°, c'est-à-dire de 0 à 1, avec la valeur moyenne $\frac{2}{\pi} = 0,6366...$; le rapport du maximum au minimum serait ∞, et, la moyenne étant prise pour unité, on aurait 1,5708 et 0 pour les deux limites. Il est donc bien clair que les vitesses U se rapprocheraient beaucoup moins de l'uniformité dans le second cas que dans le premier.

La vitesse moyenne v du piston d'une pompe s'obtient en divisant la longueur l d'une course par le temps t employé à la parcourir. S'il n'y avait aucune fuite d'eau par les soupapes ou autour du piston, ou encore par les joints, le débit moyen de la pompe serait égal à

$$Sv \text{ ou à } \frac{1}{2} Sv,$$

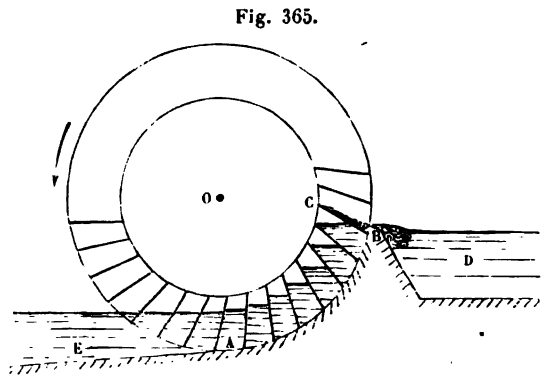
suivant qu'elle serait à double ou simple effet, en conservant à S la même signification que ci-dessus.

Pratiquement, il faut affecter ce débit d'un coefficient de réduction variable avec l'état de la machine; on peut admettre 0,90 pour une pompe dans des conditions ordinaires d'entretien et de bonne construction. D'ailleurs on a reconnu qu'il est bon de prendre v aux environs de $0^m,20$ par seconde, et en tout cas au-dessous de $0^m,30$. Une grande vitesse tend à augmenter beaucoup le frottement de l'eau sur les parois solides; en outre, l'eau aspirée dans le corps de pompe pourrait ne pas aller aussi rapidement que le piston, et alors, quand celui-ci reviendrait en sens inverse, il choquerait l'eau, ce qui donnerait lieu à une perte de travail et pourrait détériorer la machine. Une vitesse trop petite conduit à augmenter beaucoup la section S et aussi celles des tuyaux d'aspiration ou d'ascension, pour obtenir un débit donné, ce qui augmente aussi les frais d'établissement.

325. *Roue à palettes; roue élévatoire.* — La *fig.* 365 donne une idée de la disposition d'une roue à palettes destinée à l'élévation de l'eau. Cette roue tourne autour d'un axe horizon-

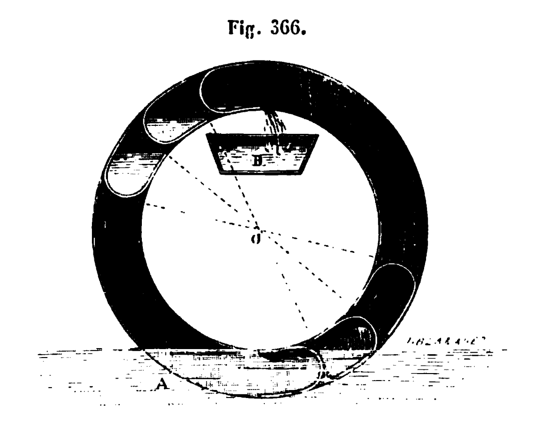
tal O; elle est emboîtée, sur une certaine longueur, dans un coursier circulaire dont AB représente le fond et dont les parois latérales sont des murs verticaux très rapprochés de la roue.

Fig. 365.



Sur sa circonférence sont établies, à intervalles égaux, des palettes un peu inclinées sur le rayon, de manière que la palette BC qui arrive au niveau de l'axe conserve encore une pente notable, pour faciliter le dégorgement, dans le bassin supérieur D, de l'eau qu'elle a entraînée en passant dans le

Fig. 366.



bassin inférieur E. Le mouvement imprimé à la roue par le moteur doit être assez lent pour ne pas produire un choc in-

tense quand ses palettes viennent rencontrer l'eau du bassin E.

La roue élévatoire (*fig.* 366) porte une série d'augets, régulièrement distribués sur toute sa circonférence, qui se remplissent quand, par l'effet de la rotation autour de l'axe horizontal O, ils passent dans le bassin inférieur A, et qui versent leur contenu dans un canal B, en arrivant près du point le plus élevé de leur révolution. Le canal B conduit l'eau dans le bassin supérieur destiné à la recevoir. Ce canal ne peut pas pénétrer dans la roue au delà de la région dans laquelle se meuvent les bras qui la relient à l'arbre; il faut donc que les augets dépassent les bras d'une certaine quantité, dans le sens parallèle à l'axe. C'est dans cette portion en saillie que sont pratiqués les orifices par lesquels l'eau s'écoule dans le canal B.

326. *Chapelet; noria.* — Le *chapelet* consiste en une série de palettes planes *a, a, ...* (*fig.* 367), égales entre elles et ordinairement de forme carrée, fixées par leur centre aux chaînons d'une chaîne sans fin.

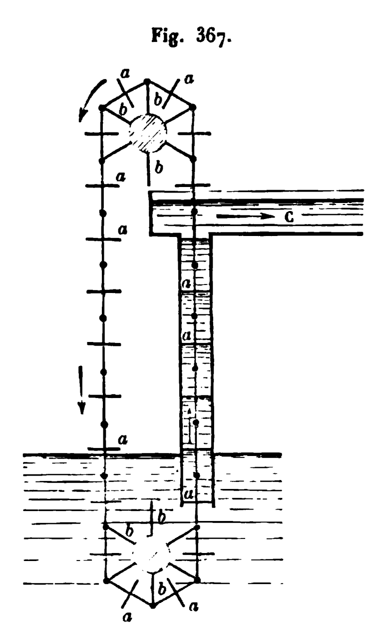
Cette chaîne passe sur deux tambours munis de pointes en fer *b, b, ...* qui s'engagent dans des œillets placés sur les articulations des chaînons, de manière à transmettre à la chaîne le mouvement directement communiqué à l'un des tambours par un moteur. Dans la partie où la chaîne remonte verticalement, les palettes s'engagent à l'intérieur d'un conduit nommé *buse*, dont elles occupent aussi exactement que possible la section transversale. L'extrémité inférieure de la buse est, ainsi que le tambour inférieur, plongée dans le bassin dont il s'agit d'élever l'eau. Chaque palette, en entrant dans la buse, emprisonne l'eau comprise entre sa surface et celle de la palette entrée avant elle, et cette eau se trouve entraînée jusqu'à l'extrémité supérieure de la buse, où elle s'écoule par un canal *c*. Il faut évidemment, pour que l'intervalle de deux palettes se remplisse d'eau, que leur distance ne dépasse pas l'immersion de la buse.

Quelquefois, au lieu de placer les deux tambours l'un directement au-dessus de l'autre, on s'arrange pour que la chaîne ait une position assez inclinée sur la verticale. La paroi supé-

rieure de la buse peut alors être enlevée, à la condition toutefois de surélever un peu les parois latérales, ce qui transforme cette buse en un canal découvert à section rectangulaire.

Dans la *noria*, chacune des palettes *a*, *a*, ... de la *fig.* 367 est remplacée par un seau ou godet qui se remplit pendant son passage sur le tambour inférieur, puis remonte verticalement, avec son ouverture tournée vers le haut, et se déverse,

Fig. 367.



quand il arrive au-dessus du tambour supérieur, dans une auge, d'où l'eau coule jusqu'au bassin destiné à la recevoir. La buse n'existe plus dans cet appareil.

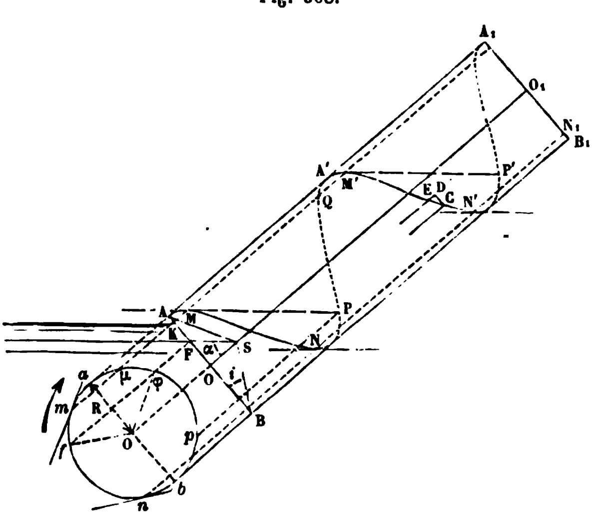
Souvent, afin d'éviter la déperdition de l'eau pendant l'ascension, les seaux ou godets sont fermés par un couvercle à charnière, qui bascule en vertu de son poids et de la pression de l'eau, quand il arrive à la position où le déversement doit commencer. Quelquefois aussi les fonds de ces vases sont munis de clapets qui, par l'action de leur poids, restent ouverts pendant la descente, afin de faciliter la sortie de l'air pendant qu'ils entrent dans l'eau, avec l'ouverture tournée

vers le bas; ces clapets se referment ensuite spontanément pendant la montée.

Mais au total ils semblent assez inutiles, parce que les seaux ou godets ont leur ouverture tournée vers le haut avant l'instant de leur émersion, ce qui permet toujours le dégagement de l'air et supprime la difficulté du remplissage; ils ont d'ailleurs l'inconvénient de laisser perdre une certaine quantité d'eau.

327. *Vis d'Archimède.* — Considérons d'abord un tube de petit diamètre, contourné en hélice sur un cylindre circulaire

Fig. 368.



de rayon R, que limitent les sections droites AB, A_1B_1 (*fig.* 368), et supposons que l'hélice ait des tangentes horizontales. Alors une petite boule pesante pourrait rester en équilibre au point le plus bas N, N', ... de chaque spire. Si l'on fait tourner le cylindre autour de son axe, dans le sens de la flèche, d'un angle quelconque θ, en même temps que l'hélice, chaque point C de cette courbe décrira un arc $\overline{CD} = R\theta$ sur sa section droite, et la génératrice menée par le point D coupera la position primitive de l'hélice en un point E tel que

$\overline{DE} = R\theta \tang i$, en désignant par i l'angle de l'hélice avec les sections droites. La quantité $\overline{DE}$ reste donc constante pour tous les points, d'où l'on conclut que le lieu des points D, c'est-à-dire la position nouvelle prise par l'hélice après la rotation, s'obtient en faisant glisser une portion convenablement limitée de la première hélice, d'une quantité $R\theta \tang i$ suivant une direction parallèle à OO_1. Les points N, N′, ..., les plus bas des spires successives glissent donc aussi suivant une génératrice; par suite, la petite boule que nous supposons placée en l'un de ces points arrive, après une rotation suffisamment prolongée, à la section A_1B_1, et tombe en N_1, par l'extrémité ouverte du tube. Cette boule peut être remplacée par une certaine quantité d'eau qui serait entrée à l'autre bout de ce tube, pendant son passage à travers l'eau d'un réservoir; l'introduction du liquide se produit effectivement, si l'extrémité A passe, en vertu de sa rotation, alternativement au-dessous et au-dessus de la surface libre, car, à l'instant où elle émerge, une certaine quantité d'eau se trouve séparée du reste de la masse liquide, et vient se placer autour du point le plus bas de la première spire. On conçoit donc que ce tube donne un moyen de faire passer l'eau d'un réservoir inférieur à un autre réservoir placé de manière à recueillir le liquide tombant en N_1.

La quantité d'eau introduite dans une spire ANA′ ne peut pas s'élever au-dessus du point M où la tangente est encore horizontale, mais répond à un maximum d'élévation, au lieu d'un minimum; en menant par M un plan horizontal, il coupera la spire en un point P, qui donne l'autre limite à laquelle doit s'arrêter l'eau contenue dans la même spire. L'arc MNP se nomme *arc hydrophore*.

On peut déterminer les tangentes horizontales et l'arc hydrophore au moyen de la construction suivante. Disons d'abord que la figure représente deux projections du cylindre et de l'hélice, l'une sur le plan vertical parallèle à l'axe, l'autre sur le plan de la section droite AB. Maintenant, imaginons par un point S de l'axe OO_1 des parallèles à toutes les tangentes de l'hélice; elles formeront un cône ayant $90° - i$ pour angle générateur, et, en prenant $\overline{OS} = R \tang i$, ce cône aura justement pour base la base AB du cylindre. S'il y a des tangentes

horizontales à l'hélice, le cône sAB doit avoir des génératrices horizontales; donc il doit être coupé par un plan horizontal mené en s. Pour que cela ait lieu, il faut que l'horizontale sF fasse avec l'axe un angle plus petit que OSA, ce qui, en nommant α l'inclinaison de l'axe sur le plan horizontal, se traduit par l'inégalité

$$(1) \qquad \alpha < 90^\circ - i.$$

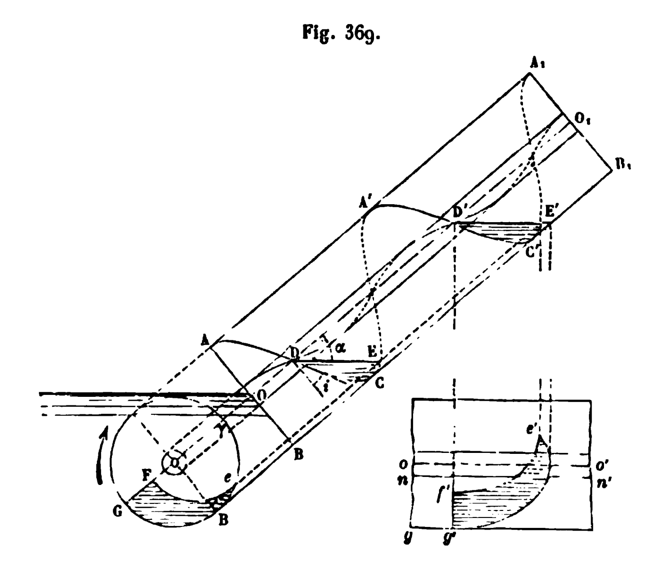
Cette condition étant supposée remplie, on aura les génératrices horizontales du cône projetées suivant $O\varphi$ et Of sur le plan de la section droite; on mènera les tangentes en m et n respectivement parallèles à ces projections, ce qui donnera les tangentes horizontales de l'hélice, en projection sur le même plan. Menant enfin par m et n les parallèles mMM', nNN' à l'axe, on aura par leurs rencontres M, M', ..., N, N', ... avec l'hélice, les points où les tangentes sont horizontales. Les tangentes MP, M'P', ... en M, M', ... déterminent les points P, P', ... et les deux projections MNP, M'N'P', ... et mnp des arcs hydrophores.

On a déjà dit que l'extrémité inférieure A du tube doit passer alternativement au-dessus et au-dessous du niveau de l'eau dans le bassin inférieur; cela est évidemment nécessaire; car, si elle restait toujours dans l'air, elle n'introduirait aucune quantité d'eau dans le tube, et, dans le cas contraire, le tube et le bassin formeraient deux vases communiquants, où le même niveau s'établirait toujours. D'un autre côté, pour que l'arc hydrophore soit plein, il faut que la tangente à l'extrémité A du tube soit horizontale à l'instant où ce point va sortir de l'eau. A cet instant, les projections de l'extrémité doivent donc être K et m, d'où il suit que le niveau du réservoir doit coïncider avec le plan horizontal mené en K, lequel coupe le plan de la base AB suivant la ligne projetée d'un côté sur ce point et de l'autre sur mp. De là résulte une autre conséquence. L'extrémité inférieure du tube qui sort de l'eau quand elle passe par la position (K, m) y rentre en arrivant à la position (K, μ); à l'instant où la rentrée va s'opérer, la quantité d'air emprisonnée occupe dans le tube une longueur d'arc projetée sur μam, ce qui répond dans l'autre projection à un arc de courbe ayant même longueur que

M'A'Q; cet air emprisonné se trouve alors à la pression atmosphérique. Mais un peu plus tard, quand l'arc hydrophore inférieur se sera de nouveau rempli d'eau, le volume M'A'Q d'air à la pression atmosphérique devra occuper le volume plus grand M'A'P, compris entre deux arcs hydrophores consécutifs. La pression dans les intervalles du tube non occupés par l'eau est donc moindre que la pression atmosphérique, et, comme cette dernière s'exerce à l'extrémité supérieure du tube, elle gêne l'écoulement de l'eau et tend à la faire redescendre le long du tube. Pour remédier à cet inconvénient, on perce sur le tube une suite de trous capillaires qui permettent la rentrée de l'air sans laisser sortir l'eau.

Les vis d'Archimède ainsi construites ne se trouvent que dans les cabinets de Physique ou collections de modèles en

Fig. 369.



petit. Dans la pratique, la vis se compose : 1° d'une enveloppe cylindrique extérieure; 2° d'un noyau plein, en forme de cylindre concentrique au précédent; 3° d'une surface hélicoïdale gauche, placée entre le noyau et l'enveloppe. Cette surface coupe le cylindre extérieur suivant une hélice ACA'C', ... (*fig.* 369); elle est engendrée par une droite qui se meut en

s'appuyant toujours sur cette hélice et sur l'axe auquel elle doit de plus rester perpendiculaire.

L'intersection du même hélicoïde par une suite de cylindres concentriques, de rayons r' variables entre le rayon r du noyau et le rayon R de l'enveloppe extérieure, donnerait une série d'hélices de même pas; en nommant d'une manière générale i' l'inclinaison d'une de ces hélices sur le plan perpendiculaire à l'axe, et i la valeur particulière de i' pour $r' = R$, on aurait donc

$$r' \operatorname{tang} i' = R \operatorname{tang} i,$$

ce qui montre que i' croît d'une manière continue de i jusqu'à 90°, lorsqu'on fait varier r' de R à o.

Supposons maintenant la condition (1) satisfaite pour l'hélice tracée sur le cylindre extérieur; cela revient à supposer qu'on a pris

$$\operatorname{tang} i < \cot \alpha.$$

Lorsque, au lieu de cette hélice, on considère celle qui est tracée sur le cylindre de rayon r', la condition pour qu'on y trouve encore un arc hydrophore devient $\operatorname{tang} i' < \cot \alpha$ ou bien

$$\frac{R}{r'} \operatorname{tang} i < \cot \alpha;$$

il est clair que cette condition ne peut pas se vérifier toujours, en faisant décroître r' jusqu'à o, et nous supposerons qu'elle cesse d'être remplie lorsque r' devient inférieur à un rayon $\overline{OF} = r''$, tel que r'' soit plus grand que le rayon r du noyau. La longueur r'' doit satisfaire à l'équation

$$\frac{R}{r''} \operatorname{tang} i = \cot \alpha, \quad \text{d'où} \quad r'' = R \operatorname{tang} i \operatorname{tang} \alpha.$$

L'inclinaison i'' sur le plan AB de l'hélice tracée sur le cylindre de rayon r'' serait telle que $\alpha + i''$ deviendrait égal à 90°, puisque la dernière équation peut s'écrire $\operatorname{tang} i'' = \cot \alpha$; alors la construction indiquée plus haut pour obtenir ses tangentes horizontales n'en donnerait plus qu'une seule, et l'arc hydrophore se réduirait à un seul élément.

Cela posé, considérons la génératrice de l'hélicoïde pro-

jetée verticalement en D et en OG sur le plan de la base; c'est une droite horizontale, par laquelle nous pouvons mener un plan horizontal DE. Pour tous les points de cette droite compris entre les points (D, G) et (D, F), on a

$$\text{tang}\, i' < \cot\alpha \quad \text{ou} \quad i' < 90^\circ - \alpha;$$

par conséquent, les hélices partant de ces points commencent par descendre en allant vers la base supérieure A_1B_1, et par monter en allant vers la base inférieure AB de la vis, c'est-à-dire qu'elles présentent une disposition analogue à celle de l'hélice ACA'C', ..., et ont une portion DCE au-dessous du plan horizontal DE. Pour le point (D, F) en particulier, le premier élément d'hélice partant de ce point est horizontal, et l'arc DCE se réduit à une longueur nulle. Enfin, pour les points situés sur la même génératrice et plus rapprochés de l'axe, l'hélice monte du côté de A_1B_1 et descend du côté de AB, de sorte qu'il n'y a plus d'arc analogue à DCE. On voit par là que la surface hélicoïdale forme au-dessous du plan DE une sorte de poche, lieu géométrique des arcs analogues à DCE, et que l'eau peut rester en équilibre dans cette poche, si la vis est immobile. On ne pourrait d'ailleurs donner à cette eau un niveau plus élevé, car la portion de génératrice comprise entre le point (D, F) et le noyau est comme le seuil d'un déversoir par lequel tout l'excédent s'écoulerait jusqu'au réservoir inférieur, sans rencontrer d'obstacle, puisque les hélices répondant à des rayons r' moindres que r'' sont constamment en pente de ce côté.

Pour avoir une idée plus nette de ce volume hydrophore projeté verticalement sur DCE, on pourrait chercher sa projection sur le plan de la section droite. Sans nous arrêter à résoudre complètement cette question de Géométrie, nous nous bornerons à remarquer que la surface libre du liquide est limitée : 1° par la portion (D, GF) de la génératrice; 2° par l'arc d'ellipse (DE, Ge) formant l'intersection du plan horizontal DE avec le cylindre extérieur; 3° par une courbe (DE, Fe), que détermine la rencontre du même plan DE avec la surface hélicoïdale. La même projection GFe est commune à tous les autres volumes hydrophores tels que D'C'E', pris dans les spires suivantes. La figure donne encore la projec-

tion sur un plan horizontal de la surface libre du liquide dans le plan D′E′, projection comprenant : 1° la droite $\overline{f'g'} = \overline{FG}$; 2° l'arc d'ellipse $g'e'$; 3° l'arc de courbe $f'e'$ qui répond à Fe. Les tangentes en F et f' à Fe et $f'e'$ sont respectivement perpendiculaires à FG et $f'g'$; en effet, le premier élément de la tangente horizontale, menée au point (D′, F) à l'hélice partant de ce point, appartient à la courbe ($f'e'$, Fe), et l'angle droit fait par cet élément avec la génératrice rectiligne (D′, GF), se reproduit en vraie grandeur dans les deux projections, parce que l'une est faite sur un plan parallèle à celui de l'angle, l'autre sur un plan parallèle à un de ses deux côtés.

Quand on fait tourner le cylindre autour de son axe, dans le sens de la flèche, on peut reconnaître, comme dans le cas de la vis réduite à un simple tube, que tous les points des volumes DCE, D′C′E′, ... avancent en montant dans la vis parallèlement à l'axe; par suite, l'eau contenue dans les volumes hydrophores finit par arriver à la section A_1B_1, où elle se déverse dans un bassin supérieur.

L'air circule librement autour du noyau, puisque les volumes hydrophores sont limités intérieurement à des rayons r'' moindres que r; il n'y a donc aucune précaution à prendre pour que l'eau contenue dans la vis supporte partout la pression atmosphérique sur sa surface libre. Mais, pour que le volume hydrophore se remplisse entièrement à chaque tour du cylindre, il faut faire en sorte que l'extrémité O de l'axe soit placée au niveau du réservoir inférieur, car alors la génératrice issue de ce point se trouve dans la surface libre de ce réservoir quand la rotation lui a fait prendre la position horizontale et qu'elle est sur le point d'émerger; à cet instant le volume hydrophore est plein d'eau.

Lorsque la vis d'Archimède doit être construite dans un emplacement déterminé, on peut supprimer l'enveloppe cylindrique extérieure et lui substituer un canal cylindrique fixe, découvert à sa partie supérieure, dans lequel la vis est mobile avec un jeu aussi petit que possible. Comme on ne peut pas, en raison des imperfections inévitables d'une construction de ce genre, annuler tout à fait l'intervalle entre le canal fixe ou coursier et le cylindre géométrique limitant la surface hélicoïdale, une partie de l'eau retombe en pure perte,

par ce jeu, dans le réservoir inférieur. Mais, d'un autre côté, on a l'avantage de diminuer la pression et le frottement sur les points d'appuis de la vis, qui n'ont plus à supporter le poids de l'enveloppe et sont même déchargés en partie du poids de l'eau contenue dans la machine; ce poids peut en effet se décomposer en une force parallèle à l'axe, qui se transmet aux appuis, et une force normale au coursier, qui est équilibrée par les réactions de celui-ci. La vis ainsi disposée a été fréquemment employée en Hollande, pour des épuisements; elle porte, pour cette raison, le nom de *vis hollandaise*.

§ IV. — Machines à vapeur.

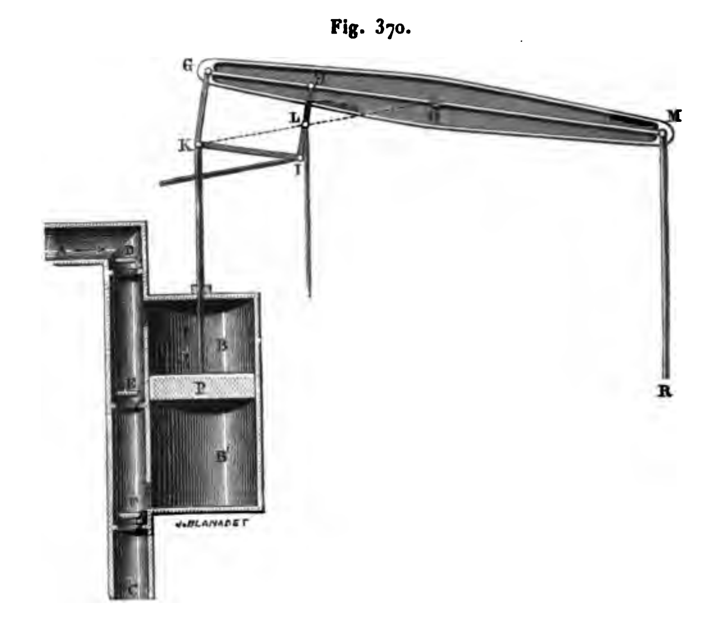
328. *Aperçu historique sur l'invention des machines à vapeur.* — Au IIe siècle avant notre ère (an 120 avant J.-C.), Héron d'Alexandrie avait déjà songé à employer la vapeur comme force motrice. Après un long intervalle de temps, la même idée reparaît dans des ouvrages publiés au XVIe et au XVIIe siècle de notre ère. Denis Papin, né à Blois en 1650 et mort en 1710, est le premier qui ait eu l'idée de se servir de la vapeur pour produire le mouvement alternatif d'un piston dans un corps de pompe, ce qui peut être regardé comme un grand progrès relativement aux conceptions de ses devanciers. Des mécaniciens anglais, contemporains de Papin, construisirent, à peu près en même temps que lui, des machines dont le principe avait beaucoup d'analogie avec l'idée première qu'il avait lui-même appliquée. Mais toutes ces machines étaient très imparfaites, et il faut arriver jusqu'à l'année 1769 pour trouver des machines à vapeur fonctionnant dans de bonnes conditions; leur auteur était l'illustre Watt, né en 1736 à Greenock, en Écosse, mort en 1819. Depuis Watt, on a réalisé peu à peu bien des perfectionnements, dont quelques-uns sont d'une grande importance; mais il avait trouvé ce qu'il y a de plus essentiel.

S'il est permis d'employer cette comparaison, nous dirons qu'avant lui l'art des machines à vapeur était tout au plus dans l'enfance, qu'il l'a conduit jusqu'à l'âge adulte et que ses continuateurs l'ont amené à l'état de maturité.

329. *Machines de Watt à simple effet.* — Les machines à vapeur sont dites *à simple effet* ou *à double effet,* suivant que la vapeur agit d'un seul côté du piston ou successivement des deux côtés. Les secondes donnent une action moins irrégulière sur l'extrémité d'une manivelle, quand on emploie, comme on le fait habituellement, cet intermédiaire pour transformer le mouvement alternatif du piston en un mouvement de rotation continu; elles sont aussi les plus répandues. Mais les machines à simple effet peuvent aussi rendre de bons services dans certains cas spéciaux, et nous allons par conséquent décrire celle de Watt.

L'organe principal de la machine de Watt à simple effet

Fig. 370.



est un piston mobile dans un corps de pompe vertical BB' (*fig.* 370). La vapeur produite dans une chaudière arrive par un conduit A et vient agir au-dessus du piston P, en traversant la *soupape d'admission* D. Le dessous du piston communique par une autre soupape F, dite *soupape d'exhaustion,* avec une capacité fermée C, qu'on nomme le *condenseur,*

sans cesse refroidie par un jet d'eau fraîche; dans cette capacité vient se condenser la vapeur qui, pendant une période précédente, était entrée dans la partie inférieure B′ du corps de pompe. A certains instants la communication peut être établie entre B et B′ par une troisième soupape E, dite *soupape d'équilibre.*

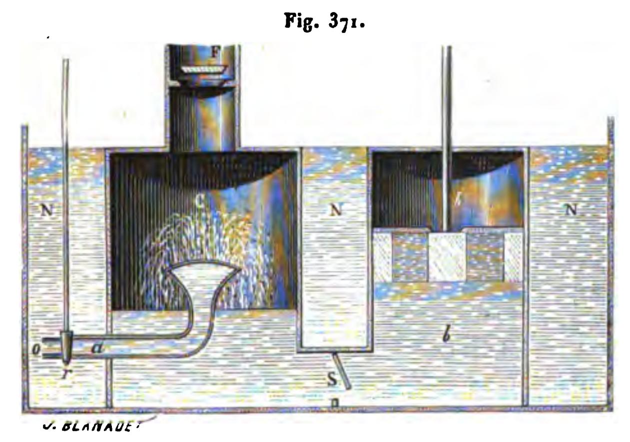
Voici maintenant comment le piston est mis en mouvement. Supposons-le d'abord en haut de sa course; ouvrons les soupapes D et F, tandis que E restera fermée. La face supérieure du piston sera soumise à la pression de la vapeur venant de la chaudière, et la face inférieure ne supportera que la pression beaucoup moindre du condenseur. Le piston descendra donc et soulèvera, pendant sa descente, une tige verticale MR, articulée en M avec un balancier MOG, auquel le piston communique un mouvement d'oscillation autour de son axe O, par l'intermédiaire d'un parallélogramme de Watt GHIK (n° 73). Quand l'impulsion donnée par la vapeur au piston est devenue suffisante pour qu'il puisse terminer sa course, la soupape E s'ouvre, et simultanément D et F se ferment. Les deux faces du piston se trouvent alors également pressées par la vapeur, qui se répand dans les compartiments B, B′; la tige MR, chargée d'un poids suffisant, descend sous l'action de ce poids en faisant remonter le piston, et pendant sa descente effectue en outre un travail utile; ce travail consiste ordinairement à refouler une colonne d'eau dans un tuyau d'ascension. Le piston étant revenu à son point de départ, on peut, après un temps de repos de longueur quelconque, recommencer une nouvelle période semblable à la précédente, et ainsi de suite indéfiniment.

Le condenseur C (*fig.* 371) est placé dans une bâche NNN remplie d'eau froide; cette eau se renouvelle au moyen d'une pompe mue par la machine elle-même. De la bâche l'eau passe dans le condenseur par un tuyau *a* ouvert en *o*, et se répand sous forme de pluie, en traversant une pomme d'arrosoir *d*; un robinet *r* permet de modérer ou d'arrêter l'injection de l'eau. Pour empêcher l'accumulation de l'eau dans le condenseur, et aussi celle de l'air entraîné par elle, qui finirait par produire en C une pression nuisible, détruisant en partie l'action motrice de la vapeur, on a disposé à côté

du condenseur une pompe *b*, dite *pompe à air*. Le piston de cette pompe engendre, pendant sa montée, un volume supérieur à celui de l'eau à extraire ; par suite, il aspire d'abord l'eau par la soupape *s*, et vers la fin de la course ascendante, en continuant à faire le vide, il aspire l'air à son tour. Moyennant ces précautions, la pression peut se maintenir dans le condenseur aux environs de $\frac{1}{10}$ d'atmosphère et même au-dessous.

La machine met en mouvement la pompe *b*, et encore une

Fig. 371.



troisième pompe qu'on nomme la *pompe alimentaire*, destinée à faire passer dans la chaudière une portion de l'eau, déjà un peu réchauffée par la vapeur, que *b* rejette au dehors. Les tiges des trois pistons de ces pompes sont attachées au balancier; la pompe à air étant la plus importante des trois, au point de vue de ses dimensions et de l'effort moteur qu'elle exige, sa tige est articulée au point L (*fig.* 370) du parallélogramme, qui décrit une courbe semblable à celle du point K.

La machine à simple effet de Watt est depuis longtemps employée dans le comté de Cornouailles, pour l'extraction des eaux de mines. Mais elle y a reçu des perfectionnements notables, et pour ce motif on donne à la machine modifiée le

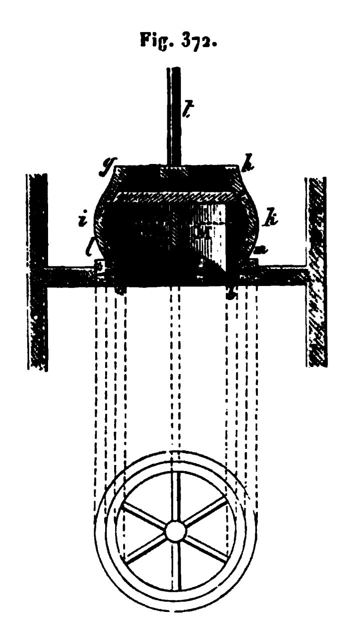
nom de *machine de Cornouailles*. Voici une indication sommaire des perfectionnements les plus essentiels.

(*a*) *Détente*. — Au lieu de faire agir la vapeur sur le piston avec une pression égale à celle de la chaudière pendant tout le temps que la soupape d'équilibre reste fermée, on peut fermer la soupape d'admission avant d'ouvrir la précédente, lorsque le piston n'a encore parcouru, en descendant, qu'une fraction plus ou moins petite de sa course. La vapeur déjà introduite n'en continue pas moins, jusqu'à l'ouverture de la soupape d'équilibre, à exercer sur lui une pression pour le faire descendre; mais elle agit *par détente*, c'est-à-dire avec une pression de plus en plus petite à mesure que son volume s'accroît, sans qu'il y ait augmentation de sa masse totale. Il est facile de reconnaître qu'on tire ainsi de la vapeur un plus grand travail, à égalité du volume pris dans la chaudière. Supposons en effet qu'un volume V agissant en pleine pression pendant une course produise un travail T; si l'admission ne se fait plus que pendant la fraction $\frac{1}{n}$ de cette course, avec le volume dépensé $\frac{V}{n}$, on produira d'abord le travail $\frac{T}{n}$, plus le travail T', répondant à la détente; d'où il suit que le travail par unité de volume dépensée, égal à $\frac{T}{V}$ dans la première hypothèse, devient $\frac{T+nT'}{V}$ dans la seconde. Il y a donc une augmentation $\frac{nT'}{V}$ due à l'emploi de la détente.

(*b*) *Soupape de Cornouailles*. — Les soupapes peuvent exiger parfois un effort considérable pour produire leur déplacement. Supposons, par exemple, une différence de pression de 50000^{kg} par mètre carré (environ 5^{atm}) des deux côtés d'une soupape conique présentant une surface de $0^{mq},01$; il faudrait, pour l'ouvrir, une force de 500^{kg} appliquée suivant la tige, abstraction faite des frottements. En outre, quand la soupape commence à quitter son siège, elle donne d'abord une ouverture très étroite à la vapeur qui doit y passer. On évite ces deux inconvénients au moyen de la soupape à double siège, dite *soupape de Cornouailles*, dont la *fig.* 372

donne une idée. Un premier siège tronconique *acdb* est lié à une pièce fixe MM formée de six cloisons planes se coupant sous des angles de 60°, comme l'indique la projection horizontale, et d'un couvercle plein *ef* que termine latéralement un second siège tronconique. La soupape est une sorte de manchon *lghm* lié à la tige *t* par un couvercle évidé *gh*; selon le déplacement que lui communique la

Fig. 372.



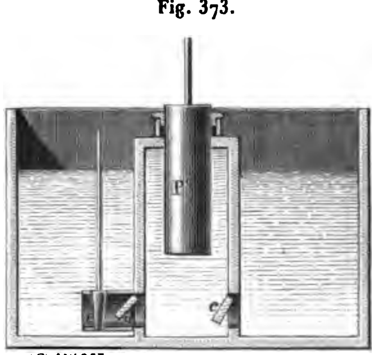
tige *t*, il peut ou s'appuyer simultanément sur les deux sièges, ou se soulever à une certaine hauteur au-dessus. Dans le premier cas, la soupape est fermée; dans le second, elle est ouverte, et l'on voit qu'alors la vapeur a une issue beaucoup plus grande qu'avec une soupape conique ordinaire, de même diamètre, puisqu'elle peut sortir par l'intervalle rendu libre au-dessus de chaque siège. D'ailleurs une petite force suffit à mouvoir la soupape. En effet, les actions de la vapeur s'équilibrent dans le sens horizontal, pour raison de symétrie tout autour de l'axe; et, dans le sens vertical, elles s'équilibrent à peu près, parce que la projection hori-

zontale des parties telles que *ig*, où les pressions sont descendantes, ne diffère pas beaucoup de la projection des parties telles que *il*, où le fait contraire se produit. La pression résultante serait égale au produit de la différence des deux projections par la pression de la vapeur sur l'unité de surface (n° 266, 1°).

(*c*) *Cataracte.* — L'appareil qui, dans la machine de Cornouailles, a reçu le nom de *cataracte,* a pour but de maintenir le piston en repos, pendant un temps plus ou moins long, après qu'il a terminé une double course (aller et retour) et avant d'en recommencer une autre. On proportionne de la sorte le nombre des coups de piston au volume d'eau qu'il faut à chaque instant retirer de la mine, et l'on arrive ainsi à la moindre dépense possible de vapeur et de charbon.

Pour obtenir ce résultat, on établit, dans une bâche remplie d'eau, un corps de pompe où se meut un piston plongeur P′ (*fig.* 373). Quand le piston à vapeur descend, la ma-

Fig. 373.

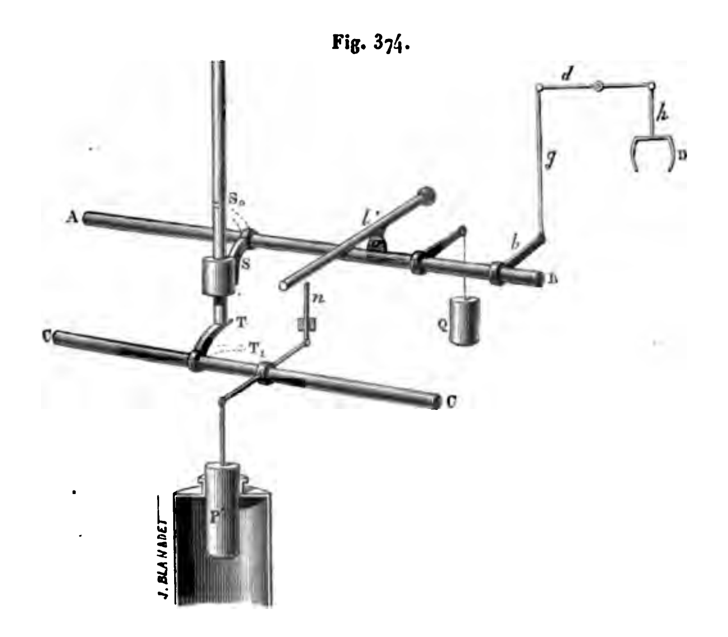


chine soulève P′ et l'abandonne ensuite à lui-même, pendant que le premier piston remonte. Le piston P′ aspire, en montant, une certaine quantité d'eau, qui entre dans le corps de pompe par la soupape *c*; lorsque ensuite P′ redescend sous l'action de son poids, *c* se ferme, une autre soupape *d* s'ouvre et laisse échapper le liquide par un orifice qu'on peut diminuer à volonté, au moyen d'un robinet *e*. Il résulte de là que

le temps nécessaire à la descente du piston P′ peut être plus ou moins long, et qu'on a la faculté de le faire varier depuis une très petite limite inférieure jusqu'à une limite supérieure quelconque. Les soupapes d'admission et d'exhaustion ne s'ouvrant que lorsque P′ arrive au bas de sa course, on voit qu'on établit ainsi tel intervalle de temps qu'on veut entre une période d'action de la vapeur et celle qui l'a précédée.

Voici maintenant par quel mécanisme se produit l'ouverture des soupapes. Le diagramme de la *fig.* 374 paraît suffi-

Fig. 374.



sant pour en faire concevoir la disposition générale. Quand le piston P′ de la cataracte arrive au bas de sa course, il soulève, par l'intermédiaire de la tige verticale *n*, un loquet horizontal *l* portant une dent qui arrête une came *a* solidaire avec l'arbre AB. Cet arbre tourne alors rapidement d'un quart de tour sous l'action d'un poids Q et soulève la soupape d'admission D par l'action des leviers *b* et *d* et des tiges articulées *g*, *h*. Alors le piston à vapeur descend; la moitié du balancier qui s'abaisse en même temps porte une tige verti-

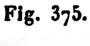
cale nommée *poutrelle* qui, d'une part, agit par un taquet sur une came S_0 solidaire avec AB et l'amène dans la position S, et, d'autre part, force la came T, solidaire avec CC, de prendre la position T_1. Le piston P′ est ainsi élevé en haut de sa course par la rotation de l'arbre CC; le levier *b* fait refermer la soupape D, et la tige *n* laisse retomber le loquet *l* qui se remet en prise avec la came *a*. Enfin la poutrelle remonte avec le piston à vapeur en abandonnant les deux cames et, quand ce piston sera revenu en haut de sa course, il y restera jusqu'à ce que les choses recommencent de la manière ci-dessus indiquée.

Les soupapes d'exhaustion et d'équilibre sont manœuvrées par des moyens analogues.

330. *Machine de Watt à double effet.* — La vapeur venant de la chaudière se rend, par le tuyau d'amenée A (*fig.* 375), dans un cylindre B, où se meut un double piston que traverse une tige creuse *t*. La soupape à gorge S, analogue à une clef de poêle, permet de modérer la quantité de vapeur introduite et, au besoin, d'en empêcher l'entrée dans le cylindre. La vapeur entre ensuite dans un espace annulaire *mm*, nommé *chemise de vapeur,* qui entoure le corps de pompe CC′ où se meut le piston principal, recevant l'action motrice. Du cylindre B la vapeur doit aussi passer dans CC′ et agir alternativement sur chacune des deux faces du piston, pendant que l'autre face communique avec un condenseur; à cet effet Watt employait le double piston ci-dessus mentionné, mobile dans le cylindre B. Dans la position représentée par la figure, la pression de la vapeur s'exerce sur la face supérieure, et le dessous communique avec le condenseur. L'inverse aura lieu en faisant descendre le double piston d'une quantité convenable; dans la position dessinée en pointillé, la partie supérieure C du corps de pompe est mise en communication avec le condenseur, par l'intérieur de la tige creuse, tandis que la partie C′ communique avec A et par suite avec la chaudière. Ainsi le mouvement du double piston détermine celui du piston principal successivement dans les deux sens; ce dernier mouvement se transforme d'abord en oscillation d'un balancier par l'intermédiaire d'un parallélo-

gramme de Watt (n° 73), puis en mouvement de rotation continu d'un arbre principal, par le moyen d'une bielle et d'une manivelle (n° 70).

Le condenseur et les trois pompes nécessaires au jeu de la


Fig. 375.

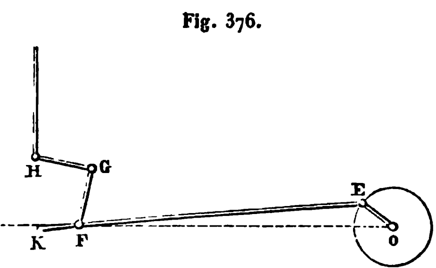


machine se retrouvent ici, comme dans la machine à simple effet (n° 329).

Le mouvement alternatif du double piston est produit par la machine elle-même. Sur l'arbre principal O (*fig.* 376) on cale un excentrique circulaire (n° 72), représenté dans la figure par son rayon d'excentricité OE; cet excentrique transmet un mouvement horizontal alternatif à l'une des extrémités F d'un levier coudé FGH, mobile autour de l'axe G. La branche GF ne décrivant qu'un petit angle de part et d'autre d'une verticale, l'extrémité H de la branche perpendiculaire GH oscille à peu près verticalement et transmet, au moyen d'une tige liée au double piston, le mouvement que celui-ci doit

recevoir. La barre d'excentrique porte d'ailleurs en K une poignée KF qui permet de la soulever; alors elle cesse d'entraîner le bouton F de la barre FG, et, le double piston cessant de fonctionner, le mouvement de la machine s'arrête bientôt.

Fig. 376.



La soupape S (*fig.* 375) a son mouvement limité à $\frac{1}{4}$ de tour, ce qui suffit pour lui donner tous les degrés d'ouverture possibles; elle est manœuvrée par un régulateur à force centrifuge (n° **254**), dont l'axe de rotation reçoit un mouvement proportionnel à celui de l'arbre principal. Ce régulateur laisse la soupape ouverte à un certain degré quand la vitesse angulaire a sa valeur normale, augmente l'ouverture s'il y a ralentissement et la diminue de plus en plus dans le cas contraire; la fermeture devenant complète quand la vitesse dépasse une certaine limite. Il semble que l'étranglement produit dans le tuyau A par le fait d'une ouverture partielle de la soupape doit occasionner une perte de charge (n° **284**), et par conséquent un travail des forces de viscosité (n° **276**), diminuant d'autant celui que la vapeur peut transmettre au piston. Toutefois cette opinion est aujourd'hui contestée, par cette raison que le travail des forces de viscosité peut se transformer en chaleur et que celle-ci peut à son tour se transformer en travail, d'où résulterait une compensation. C'est une question qui n'est guère susceptible de se trancher autrement que par l'expérience.

Il est naturel de se demander pourquoi Watt a cru devoir entourer le corps de pompe CC′ de la chemise de vapeur *mm*. Il est bien vrai que l'enveloppe extérieure offre ainsi au refroidissement une surface plus grande, puisque son rayon se

trouve augmenté; mais du moins la vapeur en contact avec cette paroi extérieure se trouve toujours à la même pression. Au contraire, si la chemise était supprimée et le corps de pompe directement exposé au refroidissement produit par l'air du dehors, la vapeur devrait, en arrivant, réchauffer les parois et par suite se condenser en partie; puis, quand cette eau serait en communication avec le condenseur, la pression devenant très petite, il y aurait vaporisation et, par suite, nouveau refroidissement des parois. A la course suivante, il faudrait encore que la vapeur réchauffât le corps de pompe, et ainsi de suite. Une plus grande perte de chaleur et de travail est la conséquence de toutes ces alternatives de hautes et de basses pressions, de condensation et de vaporisation nouvelle. L'expérience, aussi bien qu'une théorie plus approfondie, a prouvé que la conception de Watt était juste. Cependant on supprime assez ordinairement aujourd'hui la chemise de vapeur; mais on a soin de défendre l'intérieur du corps de pompe contre les causes de refroidissement, en l'entourant de substances peu conductrices de la chaleur, et évitant autant que possible de le placer au milieu de courants d'air.

Lorsque la place manque ou qu'on ne dispose pas d'une quantité suffisante d'eau, on supprime le condenseur et on laisse la vapeur, après sa période d'action sur le piston, s'échapper directement dans l'atmosphère. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans le cas des locomotives. Il est bien évident du reste que la vapeur doit alors être employée à une pression notablement supérieure à la pression atmosphérique, pour donner sur le piston une action motrice assez intense, puisque cette action n'est produite que par l'excès de la première de ces deux pressions sur la seconde.

On a renoncé aujourd'hui, presque universellement, à l'appareil encombrant du balancier. La tige du piston, convenablement guidée dans son mouvement rectiligne par une glissière ou un galet mobile entre des pièces fixes, s'articule à une bielle agissant directement sur une manivelle (nº 71) qui fait corps avec l'arbre principal. Les machines ainsi disposées sont dites *à connexion directe;* ce sont elles que nous aurons en vue dans la plupart des explications qui nous

restent à donner au sujet de la *distribution de vapeur,* c'est-à-dire des moyens employés pour la faire arriver alternativement sur les deux faces du piston moteur.

Très souvent aussi le corps de pompe où se meut ce piston est placé horizontalement dans les machines à connexion directe.

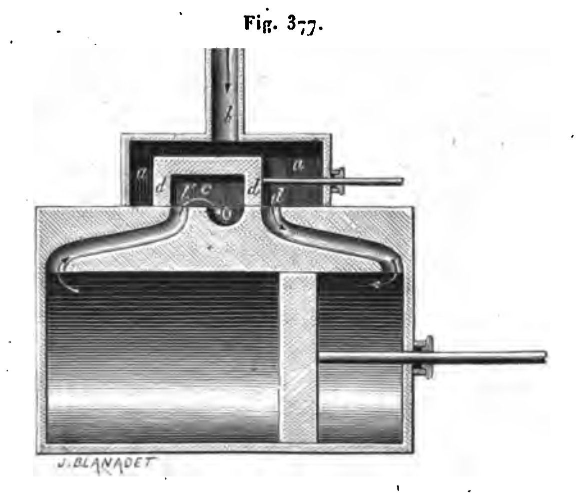
331. *Distribution de vapeur.* — Le double piston par lequel Watt intervertissait périodiquement le rôle des deux faces du piston moteur, et qui a reçu le nom de *tiroir en* D, parce que le profil transversal était en forme de segment circulaire, présente des inconvénients assez graves. Il est de grandes dimensions, et le cylindre où il se meut offre beaucoup de surface au refroidissement; ensuite le double piston s'use par le frottement et il se produit, sur tout son contour, un jeu par lequel la vapeur de la chaudière peut s'échapper en pure perte, en passant directement dans le condenseur. Cet appareil n'est plus usité; on l'a remplacé par d'autres, dont nous allons maintenant nous occuper.

(*a*) *Tiroir à coquille; distribution normale.* — Le *tiroir à coquille* est une sorte de boîte, ouverte d'un côté et analogue à un tiroir de commode, qui s'applique et glisse sur une surface plane bien dressée, en lui présentant sa face ouverte (*fig.* 377). Ce tiroir se meut dans un espace clos *aa* nommé *boîte à vapeur,* lequel communique par un tuyau *b* avec la chaudière. L'intérieur du tiroir communique avec le condenseur (ou avec l'atmosphère, si le condenseur n'existe pas), au moyen de l'ouverture *o*. Il résulte de là que la pression de la vapeur applique toujours le tiroir sur sa surface d'appui, quelle que soit l'usure, pourvu cependant qu'elle n'ait pas sensiblement déformé les plans en contact. De chaque côté de l'ouverture centrale *o*, se trouvent deux autres ouvertures *l*, *l'*, dites *les lumières d'admission,* par lesquelles la vapeur peut arriver de la boîte *a* jusqu'au piston moteur. Ces trois ouvertures sont rapprochées les unes des autres, afin de réduire autant que possible les longueurs de la boîte à vapeur et du tiroir, dans le sens parallèle à la longueur du corps de pompe. De plus on donne aux lumières d'admission une petite dimension dans le même sens, et une assez grande

largeur dans le sens perpendiculaire, afin que la translation donnée au tiroir parallèlement à la première de ces deux lignes ait rapidement pour effet de faire passer chaque bord dd du tiroir d'un côté à l'autre des lumières d'admission.

Voici maintenant quel est le fonctionnement de l'appareil. Dans la position que représente la figure, la vapeur de la chaudière entre dans le corps de pompe par la lumière d'admission l et pousse le piston de droite à gauche, pendant que la vapeur précédemment entrée de l'autre côté s'échappe par l', pour aller au condenseur ou dans l'atmosphère. Si

Fig. 377.

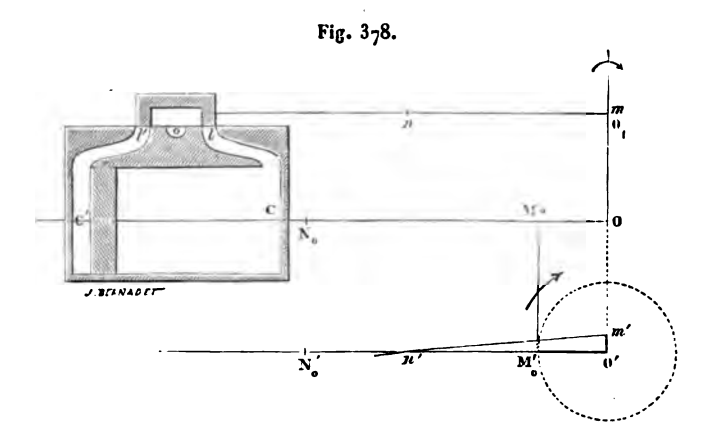


l'on déplace ensuite le tiroir vers la droite, d'une quantité suffisante pour faire passer la lumière l' au dehors et la lumière l dans son intérieur, les rôles des deux faces du piston seront renversés : la vapeur agira sur la face gauche pour pousser à droite, pendant que la face droite sera en communication avec l'ouverture o d'échappement. Faisant ensuite revenir le tiroir à la position de la figure, on recommencera une période semblable à la première, et ainsi de suite indéfiniment.

On voit par cette explication que le tiroir doit recevoir un mouvement alternatif, parallèlement à la longueur du corps

de pompe. Le moyen le plus usité pour produire ce mouvement consiste dans l'emploi d'un excentrique circulaire (n° 72), calé sur l'arbre principal de la machine, c'est-à-dire sur celui auquel le piston transmet le mouvement en agissant sur une manivelle par l'intermédiaire d'une bielle. L'excentrique circulaire agira de même par sa barre, pour mouvoir alternativement une tige guidée solidaire avec le tiroir. Cherchons à reconnaître quelle relation de position il y a lieu d'établir entre la manivelle du piston et le rayon d'excentricité de l'excentrique circulaire. Supposons d'abord que le tiroir, dans une de ses positions, bouche exactement les lumières d'admission (*fig.* 378); au même instant le piston moteur se trouve à l'une des extrémités de sa course.

Fig. 378.



Il faut en effet qu'à cet instant un petit déplacement du tiroir, dans un sens ou dans l'autre, intervertisse les rôles des deux faces du piston, et une semblable interversion ne doit se produire que lorsque le piston vient d'achever une course. En supposant, par exemple, qu'il vienne d'arriver à sa position extrême vers la gauche, la manivelle qu'il conduit occupe une position correspondante représentée par OM_0 et $O'M'_0$, en projection sur deux plans dont le premier passe par l'axe de rotation OO_1 et par l'axe OCC' du corps de pompe, et dont le second est perpendiculaire à OO_1. A partir de là, il faut que le tiroir se meuve vers la droite, pour laisser la vapeur

arriver de la chaudière en C′ par la lumière l', pendant que C communique par la lumière l avec le tuyau d'échappement o. Ensuite le tiroir devra revenir en sens contraire et avoir repris la position indiquée dans la figure quand la course du piston vers la droite sera terminée; car alors il doit être prêt à laisser passer la vapeur par la lumière l, pour qu'elle agisse en C, et à mettre l' en communication avec o, ce qui arrivera en donnant au tiroir un mouvement symétrique de celui qu'il avait pendant la course du piston vers la droite. Toutes ces conditions sont remplies et ne peuvent l'être qu'en plaçant le rayon d'excentricité ($O_1 m$, $O'm'$) en avance d'un angle droit sur la manivelle (OM_0, $O'M'_0$), dans le sens de la rotation de l'arbre principal autour de OO_1. En effet, les deux directions doivent d'abord être rectangulaires, parce que la position moyenne du tiroir répond aux positions extrêmes du piston; ensuite il faut qu'il y ait avance et non retard de 90° pour le rayon d'excentricité, pour que le mouvement du tiroir, en partant de sa position moyenne, soit toujours dans le même sens que le mouvement simultané du piston, lorsque celui-ci commence une course.

Le tiroir que nous venons de décrire met toujours une des deux faces du piston en communication avec la chaudière, et l'autre avec le condenseur ou l'atmosphère. Il ne produit par conséquent ni détente, ni compression de la vapeur. On la nomme, probablement en raison de ce fait, *tiroir à distribution normale.*

Nous allons maintenant décrire quelques-uns des nombreux moyens employés pour faire agir la vapeur avec détente.

(*b*) *Tiroir à détente, mû par un excentrique à ondes.* — Un premier moyen consiste simplement à donner un peu plus de longueur au tiroir précédent, de manière que, l'une des deux lumières d'admission étant couverte par un des bords, l'autre lumière se trouve simultanément dans l'intérieur du tiroir. On fait prendre à ce tiroir allongé les quatre positions indiquées dans la *fig.* 379.

En désignant toujours par C et C′ les côtés droit et gauche du piston, la figure montre que la communication existe :

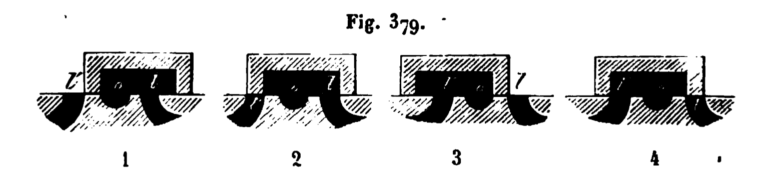
Dans la position 1, entre C′ et la chaudière, entre C et le condenseur ou l'atmosphère;

Dans la position 2, entre C et le condenseur ou l'atmosphère, l'arrivée de la vapeur en C′ étant supprimée;

Dans la position 3, entre C et la chaudière, entre C′ et le condenseur ou l'atmosphère;

Dans la position 4, entre C′ et le condenseur ou l'atmosphère, l'arrivée de la vapeur en C étant supprimée.

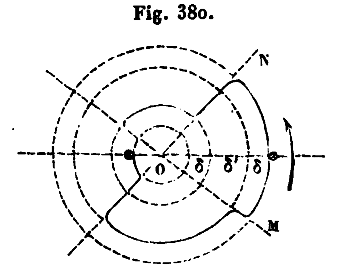
Fig. 379.



Quand le tiroir occupe les positions 1 et 3, on voit que la vapeur agit à pleine pression; quand il occupe les positions 2 et 4, la vapeur agit au contraire par détente; puisqu'un des côtés du piston communique avec le condenseur ou avec l'atmosphère et que l'orifice d'admission est simultanément fermé pour l'autre côté, qui dès lors conserve un poids constant de vapeur pendant le déplacement du piston. Il ne s'agit donc plus que de savoir comment on pourra produire, aux instants convenables, le passage périodique du tiroir à ces quatre positions successives.

On emploie pour cela l'*excentrique à ondes*. C'est un excentrique à galets (nº 68, *a*), composé de quatre arcs de cercles décrits autour d'un même centre O (*fig.* 380), et deux à deux séparés par une distance δ égale à la largeur commune des deux lumières l, l' et des bords du tiroir qui doivent les recouvrir de temps à autre. Les deux plus petits rayons diffèrent de δ, ainsi que les deux plus grands; quant aux deux moyens, ils diffèrent d'une quantité δ', telle que $\delta + \delta'$ soit la longueur parcourue par le tiroir en allant de la position 2 à la position 3, ou de 4 à 1. Chacun des arcs de cercle occupe sur sa circonférence l'un des quatre angles

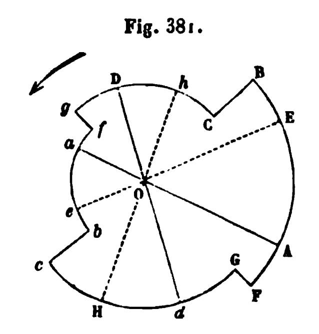
Fig. 380.



formés par deux droites OM, ON qui se croisent en O; ils sont raccordés par des courbes suffisamment adoucies, afin de faciliter le mouvement des galets, quand il doit y avoir un passage d'un arc à l'autre. Si l'on fait tourner l'excentrique autour de O dans le sens de la flèche, le système solide formé par le tiroir, les galets et la tige guidée qui les porte, après être resté quelque temps immobile dans une position que nous supposons coïncider avec 1, recule de δ vers la gauche, puis de $\delta + \delta'$ encore dans le même sens, après quoi il avancera de δ vers la droite, puis de $\delta + \delta'$ aussi vers la droite, et sera ainsi revenu à son point de départ; ce système aura donc bien pris les positions successives qu'on avait en vue.

En supposant uniforme la rotation de l'excentrique, le temps pendant lequel le tiroir demeure immobile dans chacune des quatre positions est mesuré par l'angle au centre de l'arc de cercle correspondant, et par conséquent le degré de détente ou la fraction de la course pendant laquelle la vapeur agit à pleine pression dépend uniquement de l'angle MON. On pourrait faire varier le degré de détente dans une même machine, en l'arrêtant et remplaçant l'excentrique par un autre, dans lequel on aurait changé l'angle MON et conservé les mêmes rayons pour les arcs de cercle. On peut aussi construire l'excentrique, de manière qu'on ait la faculté d'y faire varier MON, mais toujours en arrêtant la marche de la machine. Imaginons en effet que l'on construise d'abord les deux secteurs opposés par le sommet OABCDO, O*abcd*O (*fig.* 381); puis un peu en arrière, dans un plan parallèle, plaçons les deux secteurs, concentriques aux premiers et également opposés par le sommet, OEFGHO, O*efgh*O. L'ensemble des quatre secteurs donne l'excentrique complet, avec certaines portions en double, ce qui est indifférent, pourvu que la hauteur des galets soit égale à la somme des deux épaisseurs superposées. Or, si l'on fait tourner les deux premiers secteurs relativement aux deux autres autour de O dans le sens

Fig. 381.



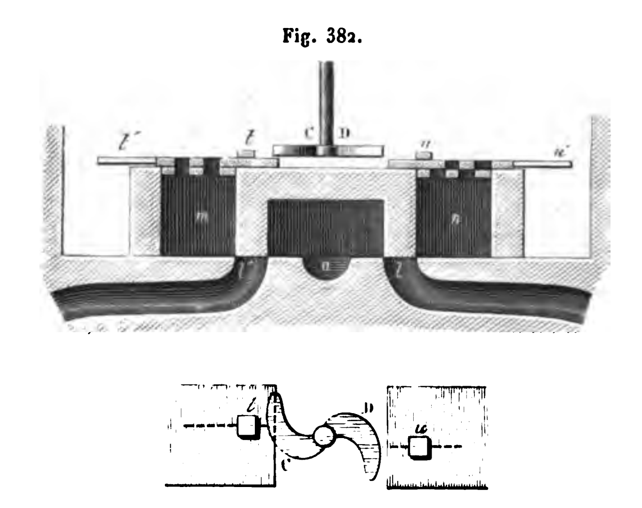
de la flèche, d'un angle assez petit pour qu'ils ne cessent d'avoir des arcs communs sur les quatre circonférences, on voit que les angles AOE, aOe vont diminuer pendant que DOh et dOH augmenteront; donc les arcs BF, bf du profil complet auront diminué, et les arcs Cg, cG auront augmenté, ce qui est justement l'effet produit par l'augmentation de l'angle MON dans la *fig.* 380. En changeant le sens de la rotation relative donnée aux deux systèmes de secteurs, on produirait l'effet inverse.

Outre l'inconvénient de ne se prêter à un changement dans le degré de la détente qu'à la condition d'un arrêt de la machine, l'excentrique à ondes présente celui de donner au tiroir un mouvement dur et saccadé, nuisible à la conservation des pièces. On a imaginé en conséquence beaucoup d'autres appareils pour produire la détente et en faire varier le degré pendant la marche même de la machine, suivant la quantité de travail moteur dont on a besoin à chaque instant, et qui correspond aux résistances variables à surmonter. Nous nous bornerons à en indiquer deux.

(*c*) *Détente variable de Farcot.* — Concevons d'abord un tiroir à distribution normale qui, dans sa position moyenne, bouche exactement les deux lumières l, l' (*fig.* 382), et qui est conduit par un excentrique circulaire, comme on l'a vu plus haut (nº 331, *a*); ajoutons ensuite à chaque bord un excédent d'épaisseur où l'on prendra les deux cavités m et n. Ces cavités sont séparées de la boîte à vapeur où se meut le tiroir, par des plaques percées d'ouvertures analogues aux fentes d'une persienne; ces plaques font corps avec le tiroir. D'autres plaques entraînées dans le mouvement du tiroir, mais pouvant prendre sur lui un glissement relatif, sont percées d'ouvertures de mêmes dimensions. Prenons le tiroir dans sa position moyenne, tel que le représente la figure; à cet instant, les fentes se superposent pour la cavité m et la laissent communiquer avec la boîte à vapeur; l'inverse a lieu pour la cavité n. Si nous faisons marcher le tiroir vers la droite, la lumière l' se découvre et reçoit la vapeur de la chaudière, pendant que la lumière l communique avec le condenseur ou l'atmosphère; le piston moteur va donc commencer aussi sa course de gauche à droite. On sait qu'il la

finira quand le tiroir aura marché vers la droite d'une certaine quantité, puis sera revenu de la même quantité vers la gauche; mais, avant qu'il ait terminé son excursion à droite, une saillie *t*, solidaire avec la plaque mobile de gauche, vient buter contre une came C, fixe dans la boîte à vapeur, les fentes se ferment pour la cavité *m*, la vapeur cesse d'arriver sur la face gauche du piston moteur, et la course de celui-ci vers la droite s'achève avec détente. Avant le retour du tiroir vers la gauche, une tige *u'*, solidaire avec la plaque mobile de

Fig. 382.



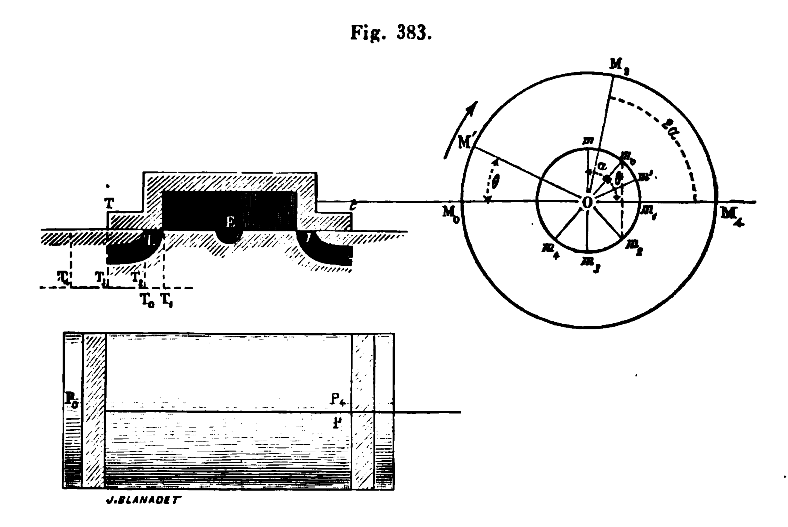
droite, est venue buter contre un des fonds de la boîte à vapeur, et a ouvert les fentes par lesquelles la cavité *n* peut recevoir la vapeur; en conséquence, quand le tiroir va faire, à gauche de sa position moyenne, l'oscillation qu'il vient de faire à droite, les rôles seront simplement permutés pour les deux côtés du tiroir et du piston, et les mêmes faits se reproduiront, pour recommencer de même aux courses suivantes.

Ici le degré de détente varie avec le plus ou moins de saillie qu'on donne à la came C et à son analogue D, répondant au côté droit. Ces deux cames sont montées sur une tige qui traverse la boîte à vapeur, et qu'on peut, en agissant au dehors, faire tourner autour de son axe de figure; de plus

elles ont une figure choisie de manière que cette rotation leur donne la saillie variable d'où résulte le changement dans le degré de détente. Tout se réduit donc à produire cette rotation. On pourrait simplement la produire avec la main. On y arrive aussi au moyen du régulateur à force centrifuge, qui imprime une rotation dans un sens ou dans l'autre suivant que la marche est trop lente ou trop rapide; on peut s'arranger pour que, dans le premier cas, la saillie soit diminuée (ce qui augmentera l'admission de la vapeur), et que le contraire arrive dans le second cas.

(*d*) *Tiroir à recouvrement.* — Le tiroir à recouvrement diffère du tiroir à distribution normale en ce que les bords

Fig. 383.



sont établis avec des largeurs supérieures à celles des lumières d'admission, comme le représente la *fig.* 383. Ce système est très ordinairement employé dans les locomotives. Voici d'abord quelles sont ses propriétés les plus essentielles; nous verrons un peu plus loin comment on a pu, par son emploi combiné avec celui d'un autre appareil, obtenir une détente variable pendant la marche de la machine.

La position moyenne du tiroir est T*t*, répondant à la position O*m* du rayon d'excentricité de son excentrique conduc-

teur; nous supposons qu'alors les bords du tiroir dépassent extérieurement les lumières, d'une certaine longueur e nommée *recouvrement extérieur,* mais qu'il y a coïncidence des limites intérieures pour ces mêmes lumières et bords du tiroir. La position correspondante de la manivelle du piston ne peut pas être, comme dans le cas de la distribution normale, la perpendiculaire OM_0 à 90° en arrière de Om; car, si cela était, le piston moteur P se trouverait alors en P_0, à l'extrémité gauche de sa course, et cependant la lumière d'admission L ne serait pas prête à se découvrir pour laisser entrer la vapeur. Il faut qu'à l'instant où P est en P_0, l'extrémité T du tiroir ait déjà parcouru l'espace $\overline{TT_0} = e$ vers la droite; que, par conséquent, le rayon Om ait décrit un angle $mOm_0 = \alpha$, tel que la projection de l'arc mm_0 sur le diamètre M_0M_4 parallèle au mouvement de T soit égal à e, d'où résulte que l'angle de Om avec la manivelle du piston est $90° + \alpha$. Cet angle obtus se nomme *angle de calage;* l'angle aigu α est dit *angle d'avance.*

Voyons maintenant ce qui arrive lorsque le rayon d'excentricité Om fait une révolution complète. Quand m passe de m_0 à m_1 et ensuite à m_2, point symétrique de m_0, le point T du tiroir parcourt les espaces égaux et de sens contraires $\overline{T_0T_1}$, $\overline{T_1T_2}$; la lumière L reste pendant tout ce temps plus ou moins découverte, et la vapeur agit à pleine pression. Si le point m va de m_2 à m_3, le point T parcourt l'intervalle $\overline{T_2T_3}$, pour arriver à sa position moyenne, représentée par la figure; la lumière L reste donc fermée, et la vapeur agit par détente. Dans tout ce parcours de l'arc $m_0m_1m_2m_3$, le tiroir est toujours demeuré à droite de sa position moyenne, et par conséquent la lumière l a été en communication constante avec le tuyau d'échappement. Pendant le reste de la demi-révolution finissant en m_4, point diamétralement opposé à m_0, le tiroir va parcourir l'espace $\overline{T_3T_4} = \overline{TT_0} = e$; la lumière L communique alors avec l'échappement et l reste fermée; la vapeur agissant sur le côté gauche du piston s'échappe donc avant qu'il ait achevé sa course entière de P_0 à P_4, et simultanément la vapeur qui restait sur le côté droit se trouve emprisonnée et comprimée par le piston. Ce sont là des inconvénients inhérents au système. Du reste, la compression de la

vapeur amène une certaine production de chaleur qui compense au moins en partie le travail mécanique dépensé par le fait de cette compression ; la vapeur emprisonnée se réchauffe et ne se trouve plus à une température trop inférieure à celle que possède la vapeur arrivant de la chaudière, à l'instant où commencera une nouvelle course du piston, en sens contraire de celle qui s'achève.

Dans la seconde moitié de la révolution complète du rayon Om, on retrouve les mêmes phases; mais les rôles sont intervertis pour le côté droit et le côté gauche de la figure.

Il est aisé de déterminer la fraction de la course du piston qui s'accomplit sous l'action de la vapeur à pleine pression ; elle correspond au parcours de l'angle $m_0 O m_2 = 180^\circ - 2\alpha$ par le rayon Om, et par conséquent à un angle égal M_0OM_2 décrit par la manivelle du piston à partir de sa position initiale OM_0. Si l'on néglige l'obliquité de la bielle, la longueur correspondante parcourue par le piston sera la projection de l'arc M_0M_2 sur le diamètre M_0M_4, ou bien

$$\overline{OM_0}(1 + \cos 2\alpha);$$

d'autre part, la longueur totale de la course est $2\overline{OM_0}$; donc le degré de détente ou fraction accomplie à pleine pression est

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \cos^2 \alpha.$$

L'avance à l'échappement, qu'on a reconnue ci-dessus, pourrait évidemment être diminuée par un *recouvrement intérieur*, en vertu duquel l'écartement intérieur des deux bords du tiroir serait un peu moindre que celui des deux lumières d'admission ; mais, par contre, on augmenterait aussi la période de compression de la vapeur. Dans la pratique on fait le recouvrement intérieur très petit, de $0^m,001$ environ sur chaque bord; le but de cette disposition est surtout d'éviter que les deux lumières communiquent simultanément avec l'orifice E. On donne aussi une petite avance à l'admission, c'est-à-dire que la lumière L, par exemple, au lieu de ne commencer à se découvrir qu'à l'instant où le

piston moteur est en P_0, se découvre un peu plus tôt, et que l'orifice a déjà une petite largeur libre δ à l'instant dont il s'agit. De cette manière, quand la course va commencer, la vapeur est arrivée au piston et se trouve prête à le pousser immédiatement; d'ailleurs, à cet instant, la vitesse du piston est nulle et sa force d'inertie est au contraire maximum, ce qui est une raison pour ne pas retarder l'action de la force mouvante.

Étant donné : 1° que le tiroir doit être mené par un excentrique ayant un rayon d'excentricité r et un angle d'avance α; 2° que ce tiroir doit présenter un recouvrement intérieur i et un recouvrement extérieur e, le calcul ci-après permet de se rendre compte des principales circonstances de la distribution. Soit, en effet, Om' une position quelconque du rayon d'excentricité, répondant à l'angle $m_0Om' = \theta$ parcouru depuis la position initiale, la distance x du tiroir à sa position moyenne sera (en négligeant toujours l'obliquité de la barre d'excentrique) égale à la projection de l'arc mm' sur Om_1, ce qui donne

$$(1) \qquad x = r\sin(\alpha + \theta),$$

relation applicable à toutes les valeurs de θ, pourvu que l'on considère la distance x comme positive ou négative, suivant qu'elle est comptée à droite ou à gauche de la position moyenne. Cette distance x doit être $e + \delta$ pour $\theta = 0$, en raison de ce qu'on suppose alors la lumière déjà découverte sur une largeur δ; donc

$$(2) \qquad e + \delta = r\sin\alpha,$$

relation qui fera connaître δ. Si maintenant on nomme θ', θ'' les valeurs de θ répondant au commencement et à la fin de l'admission; θ''', θ^{IV} celles qui répondent au commencement et à la fin de l'échappement, sur la même face du piston; ces angles doivent satisfaire aux équations

$$(3) \qquad e = r\sin(\alpha + \theta'), \qquad e = r\sin(\alpha + \theta''),$$

$$(4) \qquad -i = r\sin(\alpha + \theta'''), \quad -i = r\sin(\alpha + \theta^{\text{IV}}).$$

On tirera des relations (3) des valeurs supplémentaires

pour $\alpha+\theta'$ et $\alpha+\theta''$; d'après l'équation (2) ces valeurs ne seraient autre chose que α et $180^\circ-\alpha$, si l'on faisait $\delta=0$; mais, comme δ est seulement petit sans être nul, il faut que θ' ait une petite valeur négative et que, par suite, $\alpha+\theta''$ dépasse légèrement $180^\circ-\alpha$. De même les relations (4) fourniront des valeurs de $\alpha+\theta'''$ et de $\alpha+\theta^{\text{iv}}$, respectivement peu éloignées de 180° et 360°, la première un peu au-dessus, la seconde un peu au-dessous de ces valeurs approximatives, qui répondraient à l'hypothèse $i=0$. On connaîtra ainsi les quatre angles θ', θ'', θ''', θ^{iv}. Enfin on remarquera que l'ouverture maximum b de la lumière L se produit quand Om prend la position Om_1, pour $\alpha+\theta=90^\circ$; à cet instant la distance x devient égale à r et elle s'exprime aussi par $b+e$, d'où résulte la valeur de b

$$(5) \qquad b=r-e.$$

Réciproquement, au lieu de considérer r, α, e, i comme des données et d'en déduire les circonstances de la distribution, on pourrait déterminer ces quantités de manière à remplir quatre conditions qu'on se serait imposées *a priori*. Par exemple on peut se donner θ', θ'', θ''' et b. Alors on a

$$\alpha+\theta'=180^\circ-(\alpha+\theta''),$$

ce qui donne

$$\alpha=90^\circ-\frac{1}{2}(\theta'+\theta'').$$

On trouve ensuite r et e par l'équation (5) jointe à l'une des équations (3), i par la première équation (4), et enfin θ^{iv} par la relation

$$\alpha+\theta^{\text{iv}}=540^\circ-(\alpha+\theta''').$$

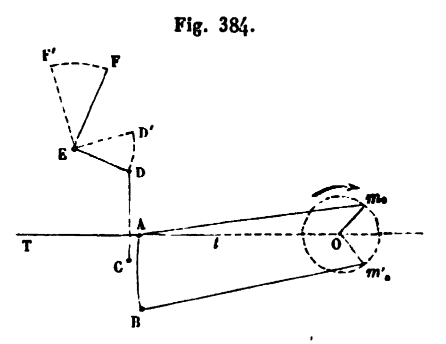
Connaissant r et α, il serait également facile de retrouver par l'équation (1) la valeur de θ répondant à une valeur donnée de x; l'angle θ ferait connaître la position correspondante de la manivelle OM′ du piston, et par conséquent la position de celui-ci.

Remarque. — Supposons le piston en P_0 (*fig.* 383) au bout de sa course vers la gauche; si, à partir de cette position, le rayon d'excentricité Om_0 est remplacé par la ligne symétrique

Om_1, l'excentrique aura la position convenable pour une rotation de sens contraire autour de l'axe O. Le changement de sens ne peut pas être immédiat, à cause de la vitesse acquise; pendant un certain nombre de tours, le piston marche à contre-vapeur, puis la vitesse passe par zéro, et finalement elle change de sens.

(*e*) *Emploi de la coulisse de Stephenson.* — La coulisse de Stephenson, décrite au n° 77, permet tout à la fois de réaliser le changement du sens de la marche, dont on vient de parler, et d'obtenir, avec le tiroir à recouvrement, divers degrés de détente. Soient Om_0 et Om'_0 les deux rayons d'excentricité répondant aux deux sens de la rotation de l'arbre principal autour de l'axe O (*fig.* 384); les deux barres d'ex-

Fig. 384.



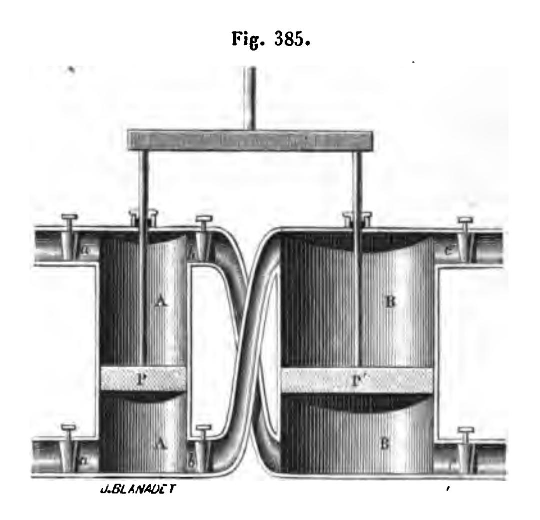
centrique Am_0, Bm'_0 sont articulées aux deux extrémités d'une coulisse AB, dans laquelle s'engage le coulisseau, faisant corps avec la tige T*t* du tiroir. Quand la coulisse occupe la position indiquée dans la figure, le coulisseau est en A, et la rotation autour de O se produit dans le sens qui répond au rayon d'excentricité Om_0. Quand on veut le changer, on agit sur l'extrémité F du levier coudé FED (mobile quand on le veut, autour de E, mais fixe dans l'état ordinaire), de manière à relever la tige DC, articulée en D avec ED et en C avec la coulisse; on amène ainsi l'extrémité B de celle-ci à coïncider avec le coulisseau. Alors c'est l'excentrique ayant Om'_0 pour rayon d'excentricité qui détermine le mouvement du tiroir, et la rotation autour de O change de sens. Si, au lieu d'amener

le coulisseau à coïncider avec l'une des extrémités de la coulisse, on lui donne une situation intermédiaire, on obtient pour le tiroir des mouvements d'amplitude variable, qui produisent un degré de détente également variable avec la marche dans l'un ou l'autre sens.

C'est là le second système de détente variable que nous avions annoncé plus haut.

332. *Machine de Woolf.* — Considérons deux pistons P, P′ (*fig.* 385) mobiles dans des corps de pompe de rayons iné-

Fig. 385.



gaux, mais accomplissant des courses de même étendue; les tiges de ces pistons sont unies par une barre transversale, sorte de joug, sur lequel s'assemble une tige unique destinée à transmettre l'action motrice de la vapeur à un arbre tournant, soit par l'intermédiaire d'un balancier, soit par le système de la connexion directe. Le plus petit corps de pompe, où se meut le piston P, est muni de quatre orifices *a*, *a′*, *b*, *b′*, à volonté ouverts ou fermés, par le moyen de soupapes ou de tiroirs; la figure indique des robinets, pour simplifier le dessin. Les ouvertures *a*, *a′* font communiquer le corps de pompe AA avec la chaudière; les deux autres permettent la communication, par des tuyaux croisés, entre AA et le plus

grand corps de pompe BB. Ce dernier présente encore deux orifices c, c' également munis d'un moyen de fermeture, qui établissent une communication avec le condenseur. Lorsque les deux pistons se trouvent en haut de leur course, les orifices a, b, c sont ouverts, et a', b', c' fermés; la vapeur arrive au-dessus du piston P et agit pour le faire descendre; la vapeur qui avait agi précédemment sur l'autre face se répand dans le volume intermédiaire entre les deux pistons, exerce une force ascendante sur P et une force descendante sur P′, mais en somme une force descendante sur l'ensemble des deux, parce que la section de P′ l'emporte sur la section de P; enfin la vapeur qui était au-dessous de P′ s'en va dans le condenseur. Lorsque les deux pistons arrivent au bas de leur course, on ferme a, b, c et l'on ouvre a', b', c'; alors tout se passe de la même manière, sauf le changement de sens dans le mouvement des pistons et l'interversion de rôle entre les faces supérieure et inférieure de chacun d'eux.

On voit que dans ce système la vapeur agit d'abord à pleine pression pendant qu'elle est contenue dans le petit cylindre; elle agit ensuite par détente quand elle passe dans le grand. Rien n'empêcherait d'ailleurs de fermer l'orifice d'admission a avant la fin de la course descendante, et a' avant la fin de la course montante; dans ce cas la vapeur commencerait à se détendre dans le petit cylindre et achèverait sa détente dans le grand; rien ne serait changé d'ailleurs.

En admettant que la détente de la vapeur s'accomplisse conformément à la loi de Mariotte, on peut se rendre compte, par le calcul suivant, du travail transmis à l'ensemble des deux pistons. Nommons

p_0 la pression de la vapeur, à son arrivée dans le corps de pompe AA, pendant la période d'admission;

p_1 la pression de cette même vapeur quand elle remplit le petit corps de pompe;

p_2 sa pression quand elle a pris son volume maximum et va passer dans le condenseur;

p' la pression du condenseur;

v_0 le volume engendré par le petit piston P pendant la période d'admission;

v_1 le volume engendré par ce même piston dans une course entière;

v_2 le volume engendré de même, pendant une course complète, par le grand piston P'.

Considérons, pour fixer les idées, une course descendante. Alors la vapeur qui est au-dessus du piston P fait, en agissant à pleine pression, un travail $p_0 v_0$ (n° 298, 1°); puis, en se détendant du volume v_0 jusqu'au volume v_1 dans le petit corps de pompe, elle fait encore le travail $p_0 v_0 \mathrm{L}\frac{v_1}{v_0}$ (n° 298, 2°). La détente continuant ensuite dans le grand corps de pompe jusqu'au volume v_2, il y a production d'un nouveau travail $p_0 v_0 \mathrm{L}\frac{v_2}{v_1}$, qui, avec les précédents, forme le total des travaux moteurs reçus par les deux pistons pendant une course simple, soit $p_0 v_0\left(1+\mathrm{L}\frac{v_2}{v_0}\right)$. Il faut en retrancher le travail résistant dû à la contre-pression p' sur la face inférieure du grand piston, c'est-à-dire un travail $p'v_2$, et il reste, pour le travail net $\mathfrak{T}$ répondant à une course,

$$\mathfrak{T}=p_0 v_0\left(1+\mathrm{L}\frac{v_2}{v_0}\right)-p'v_2.$$

Cette expression se transforme, en remarquant que la même quantité de vapeur occupe le volume v_0 sous la pression p_0, et le volume v_2 sous la pression p_2, d'où résulte, conformément à la loi de Mariotte,

$$p_0 v_0 = p_2 v_2 \quad \text{ou} \quad v_2=\frac{p_0 v_0}{p_2};$$

si l'on porte cette valeur de v_2 dans celle de $\mathfrak{T}$, on trouve

$$\mathfrak{T}=p_0 v_0\left(1+\mathrm{L}\frac{p_0}{p_2}-\frac{p'}{p_2}\right).$$

Le résultat est absolument identique à celui qu'on obtiendrait si la détente de la vapeur entre le volume v_0 et le volume v_2, avec les pressions correspondantes p_0 et p_2, s'effectuait dans un seul cylindre au lieu de deux, la contre-pression du côté du

condenseur étant d'ailleurs supposée la même dans les deux cas.

Il est dès lors naturel de se demander quel bénéfice on peut trouver à établir deux cylindres, au lieu d'un seul où le piston engendrerait le volume v_2 dans chaque course, en ne recevant que le volume v_0 à pleine pression. En premier lieu, le calcul ci-dessus est un peu incertain, parce que nous avons admis la loi de Mariotte, ce qui revient à négliger les variations de température de la vapeur; dans la réalité, la température varie, et l'expérience prouve qu'il y a quelque avantage à effectuer la détente dans un second corps de pompe interposé entre celui qui reçoit la vapeur à pleine pression et le condenseur. Secondement, alors même que cet avantage n'existerait pas, la machine de Woolf présenterait au moins celui de donner de moins grandes variations dans l'intensité de la force motrice, à égalité du degré de détente, et par conséquent de produire un mouvement plus doux et plus régulier, ou encore d'exiger, pour une même régularité, un volant moindre. Nommons, en effet, ω et ω' les sections des deux pistons P et P'; au commencement de l'admission, la force motrice totale F a pour valeur

$$F = p_0\omega + p_1(\omega' - \omega);$$

chacune des deux parties ne peut ensuite que rester constante ou diminuer jusqu'à la fin de la course, et l'on obtient alors une valeur F_1 de la force totale, exprimée par

$$F_1 = p_1\omega + p_2(\omega' - \omega).$$

Le rapport du maximum au minimum de l'effort moteur est donc

$$\frac{F}{F_1} = \frac{p_0\omega + p_1(\omega' - \omega)}{p_1\omega + p_2(\omega' - \omega)};$$

comme on l'obtient par l'addition terme à terme des rapports

$$\frac{p_0\omega}{p_1\omega} = \frac{p_0}{p_1}, \quad \frac{p_1(\omega' - \omega)}{p_2(\omega' - \omega)} = \frac{p_1}{p_2},$$

tous deux à termes positifs, il en résulte qu'il a une valeur in-

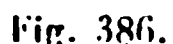
termédiaire entre $\frac{p_0}{p_1}$ et $\frac{p_1}{p_2}$. Dans le cas où la machine n'aurait qu'un seul cylindre, le rapport de la plus grande à la plus petite intensité de la force motrice deviendrait $\frac{p_0}{p_2}$, quantité égale au produit des deux limites précédentes et, par conséquent, au moins égale à la plus grande d'entre elles, puisque aucune des deux n'est inférieure à l'unité; $\frac{p_0}{p_2}$ dépasserait donc nécessairement une grandeur intermédiaire entre ces limites, ce qui justifie notre proposition.

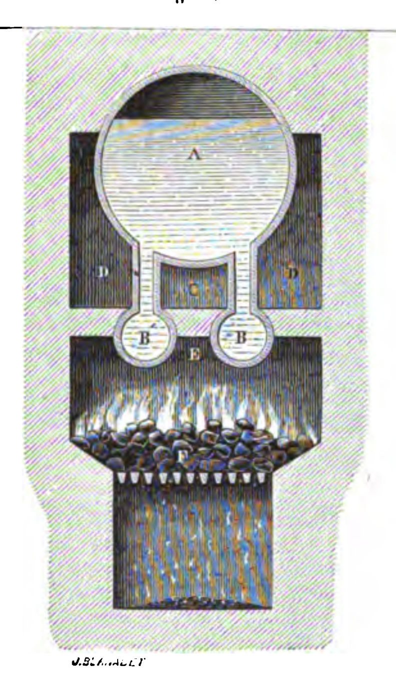
L'idée de Woolf, connue dès 1804 par un brevet qu'il prit à cette époque, a été reproduite et employée, sous diverses formes, dans ces dernières années. On a, par exemple, disposé les deux cylindres de manière à mettre leurs axes sur une même ligne; les deux pistons agissent alors sur une même tige et transmettent le mouvement à un axe, comme on l'a dit plus haut; deux tuyaux font communiquer, aux époques voulues, d'une part, les deux fonds du corps de pompe les plus voisins, d'autre part les deux qui sont les plus éloignés. D'autres fois, les tiges parallèles (mais non plus confondues) des deux pistons agissent séparément, par connexion directe, sur deux manivelles solidaires avec un même arbre; ces manivelles sont tantôt parallèles et de même sens, ou de sens contraires, ou encore non parallèles. Mais nous ne pouvons que nous borner à une simple mention de toutes ces variantes, parmi lesquelles se trouvent les machines que les Anglais ont nommées *machines compound* (composées).

333. *Chaudières à vapeur.* — Parmi les nombreux types de chaudières à vapeur, nous nous contenterons d'en décrire sommairement deux, qui sont très usités :

(*a*) *Chaudière à bouilleurs.* — La *fig.* 386 représente une coupe transversale de la chaudière et de son fourneau. La chaudière a la forme d'un cylindre allongé A terminé par deux hémisphères; elle communique par des tubulures avec deux autres cylindres B, B, de rayon plus petit, mais de même longueur que A et terminés aussi par des surfaces hémisphériques. Les cylindres sont ce qu'on nomme les *bouilleurs*. La

flamme et les gaz que fournit un foyer F, placé sous l'extrémité antérieure de la chaudière, suivent d'abord une galerie horizontale E et chauffent les bouilleurs, puis reviennent en sens inverse par une galerie C; quand ils sont arrivés à peu près au-dessus de leur point de départ, ils se divisent entre les deux conduits latéraux D, D, nommés *carneaux,* et se ren-


Fig. 386.



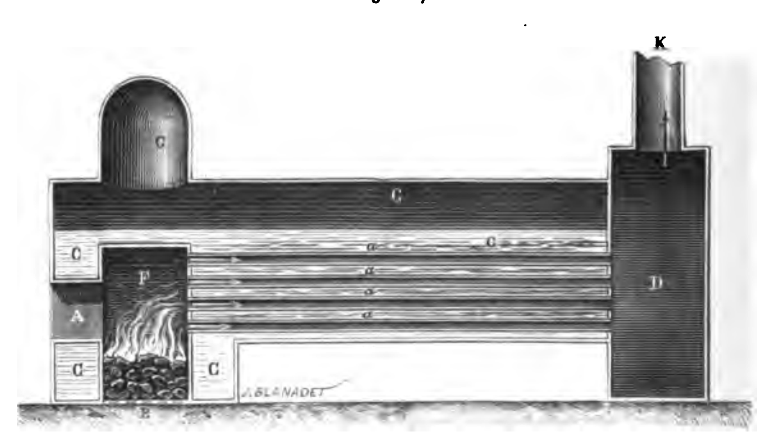
dent ainsi à la cheminée, placée vers l'extrémité opposée au foyer. L'eau contenue dans A se trouve ainsi chauffée de deux manières : d'abord par sa communication avec les bouilleurs, et en second lieu par les gaz à haute température qui circulent dans les conduits C, D, D. Ces conduits sont séparés les uns des autres par des cloisons longitudinales et ne communiquent entre eux que de la manière ci-dessus indiquée.

(*b*) *Chaudière tubulaire des locomotives.* — Une des difficultés qui ont retardé longtemps l'emploi de machines à va-

peur locomotives pour traîner un convoi de voitures consistait en ce qu'on ne connaissait pas de chaudière qui, avec des dimensions comparativement restreintes, fût capable de produire la quantité de vapeur nécessaire à la marche de la machine. Cette difficulté a été résolue en 1828 par l'invention des chaudières tubulaires, due à Séguin. Voici quelle en est la disposition habituelle.

La chaudière CC... (*fig.* 387), cylindrique sur la plus grande partie de sa longueur, présente, vers la partie antérieure, les

Fig. 387.



modifications de forme nécessaires pour entourer une capacité rectangulaire F, nommée *boîte à feu*, où se trouve le foyer; la boîte à feu est de toute part en contact avec l'eau de la chaudière, sauf dans la partie inférieure B occupée par la grille du cendrier, et dans la partie A où est placée la porte par laquelle on introduit le combustible. La flamme et les gaz se rendent de F à une autre capacité D, qu'on nomme *boîte à fumée*, en suivant une série de tubes horizontaux *a*, *a*, ... qui traversent l'eau de la chaudière; ces tubes ont un diamètre de $0^m,05$ environ et sont au nombre de 100 à 150. Une cheminée K surmonte la boîte à fumée et donne issue aux produits de la combustion.

Au-dessus de la boîte à feu, la chaudière présente une partie plus élevée, nommée *dôme;* vers le sommet du dôme, en

un point suffisamment éloigné de l'eau en ébullition, se place l'origine du tuyau par lequel sort la vapeur, pour se rendre dans les corps de pompe où elle exerce son action motrice. Les tuyaux d'échappement par lesquels elle est rejetée au dehors débouchent dans la boîte à fumée, et le courant gazeux qui en résulte concourt à rendre plus actif le tirage du foyer.

CHAPITRE TROISIÈME.

THERMODYNAMIQUE.

§ I. — Définitions; principes fondamentaux.

334. *Préliminaires.* — Beaucoup de faits très connus et devenus pour ainsi dire vulgaires démontrent la possibilité de transformer la chaleur en mouvement, et *vice versa.* Par exemple, lorsqu'un gaz est contenu dans un cylindre fermé par un piston et qu'on lui communique de la chaleur, sa force élastique augmente, et il devient capable de déplacer le piston, en surmontant une certaine résistance opposée à ce déplacement. Si l'on agit, au contraire, sur le piston de manière à comprimer le gaz, on constate que ce dernier s'échauffe et qu'on a produit de la chaleur.

La *Thermodynamique* ou *Théorie mécanique de la chaleur* a pour but de rechercher les lois qui régissent ces transformations.

La transformation s'opère toujours par l'intermédiaire d'un corps, qui est le véhicule de la chaleur dépensée ou qui reçoit le mouvement destiné à la produire. Dans l'exemple cité ci-dessus, ce corps était un gaz. On pourrait prendre un corps quelconque, mais ici nous nous restreindrons presque toujours aux fluides. Nous supposerons un fluide renfermé dans une enceinte à parois mobiles, qui permettent la variation de son volume entre certaines limites; la pesanteur et les forces d'inertie du fluide seront regardées comme négligeables en comparaison des pressions exercées sur son contour par les parois en contact avec lui, et par conséquent nous pourrons dire que : 1° la pression p du fluide est constante dans toute

la masse à un instant donné, car les équations (1) du n° 272 donnent, avec nos hypothèses,

$$\frac{dp}{dx}=0,\quad \frac{dp}{dy}=0,\quad \frac{dp}{dz}=0,$$

d'où résulte que p ne varie pas d'un point à un autre quand le temps ne varie pas; 2° la pression intérieure du fluide et la pression supportée par la paroi sont une seule et même chose, puisqu'il y a toujours contact entre les deux corps et que la pression du fluide ne change pas en allant de la paroi vers l'intérieur; 3° le travail exercé sur la paroi par le fluide pendant une augmentation dv de son volume v, sa pression étant p, a pour valeur $p\,dv$ (n° 298).

L'état physique d'un corps, au point de vue de la Thermodynamique, est défini par trois quantités : sa pression p, le volume v occupé par 1kg de ce corps (ou son volume sous l'unité de poids), sa température t. La Physique établit entre ces trois quantités une relation dépendant de la nature du corps dont il s'agit, de manière que deux d'entre elles seulement sont des variables indépendantes. Quand un corps passe successivement par divers états physiques, caractérisés par des valeurs variables de p, v, t, on dit qu'il accomplit une *évolution* ou parcourt un *cycle;* le cycle est complet quand il y a identité entre l'état physique initial du corps et son état physique final. On dit que le cycle est *réversible* (ou renversable) quand il y a possibilité d'admettre la même succession d'états physiques dans un ordre inverse. Cela suppose que la paroi se trouve toujours à la même température que le fluide, et toujours en contact avec lui, sous une pression égale à la pression intérieure; si, par exemple, la température était différente, elle irait nécessairement en décroissant pour le corps le plus chaud et en croissant pour l'autre, ce qui exclut la possibilité du renversement; de même, dans le cas d'une pression moindre à la paroi qu'à l'intérieur, le fluide ne pourrait que se dilater, et le renversement dans la succession de ses états physiques deviendrait encore inadmissible.

Cela posé, la Thermodynamique est basée sur deux principes ou propositions fondamentales, en partie démontrées par le raisonnement, mais qu'on regarde comme exactes

principalement parce que les déductions qu'on en tire sont d'accord avec les résultats fournis par l'expérience.

335. *Premier principe.* — La première des deux propositions fondamentales a été énoncée pour la première fois par Mayer en 1842. On peut la formuler comme il suit :

Lorsqu'un corps, en se dilatant, produit un travail positif sur les corps extérieurs en contact avec lui, une certaine quantité de chaleur disparaît; cette quantité est dans un rapport constant avec le travail produit.

Inversement, si un corps se contracte et reçoit un travail positif des corps extérieurs, il se produit une certaine quantité de chaleur, en rapport constant avec le travail dépensé.

Les deux rapports constants dont il s'agit sont égaux entre eux et indépendants du corps considéré.

Pour mieux faire comprendre le sens et la portée de cette première proposition, nous allons la traduire par une équation algébrique. Supposons un corps dont l'état physique varie infiniment peu; soient

dQ la quantité de chaleur qu'il reçoit pendant ce changement infiniment petit;

dU l'accroissement correspondant de sa chaleur interne, laquelle est uniquement déterminée par son état physique actuel;

p sa pression;

dv l'accroissement du volume v occupé par l'unité de poids de ce corps;

A un nombre constant pour tous les corps.

Alors le premier principe est exprimé par l'équation différentielle

$$dQ = dU + Ap\,dv, \tag{1}$$

ou bien, si l'on intègre dans l'étendue d'un changement fini d'état physique,

$$Q = U_1 - U_0 + A\int_{v_1}^{v_0} p\,dv, \tag{2}$$

Q désignant alors la quantité totale de chaleur reçue par le

corps, U_0 et U_1 les quantités de chaleur interne au commencement et à la fin, v_0 et v_1 les valeurs de la correspondante de v. L'une ou l'autre de ces deux équations signifie que la quantité totale de chaleur communiquée à un corps pendant une évolution quelconque se décompose en deux parties : 1° l'accroissement de sa chaleur interne, que la Physique peut constater d'après les états donnés, au commencement et à la fin du cycle; 2° la quantité convertie en travail sur les corps extérieurs. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de rien supposer de particulier sur le sens de l'évolution; chacune des trois différentielles dQ, dU, dv, prise en particulier, peut être indifféremment positive ou négative sans que l'équation cesse de s'appliquer. Ainsi le corps peut donner de la chaleur au lieu d'en recevoir; il peut recevoir un travail positif des corps extérieurs au lieu de l'exercer sur eux, et enfin sa chaleur interne peut diminuer au lieu d'augmenter; quels que soient, parmi ces changements possibles, ceux qui se produiront dans une évolution différentielle effective, les trois quantités dQ, dU, dv seront toujours liées par l'équation (1).

Le premier principe, qu'on appelle *loi de Mayer* ou *loi de Hirn*, a été démontré par des expériences nombreuses et variées, dues à d'habiles physiciens, parmi lesquels on doit citer Joule, Regnault et Hirn. On peut aussi le démontrer par le raisonnement dans le cas des cycles complets et réversibles; si l'on admet comme un axiome que, pour un corps dont l'état physique est redevenu le même, la quantité de chaleur Q reçue ou donnée par lui et le travail qu'il a fait sur les corps extérieurs s'annulent simultanément. Soit en effet un premier corps M qui, dans une évolution complète, produit un travail T sur les corps extérieurs, en recevant une quantité Q de chaleur; soit d'autre part un second corps M', qui produit de même un travail T' avec la quantité de chaleur Q'; nous disons qu'on a

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q'}{T'}.$$

Pour le prouver, considérons l'ensemble de i corps égaux au premier, faisant chacun une évolution complète et identique dans le même sens, et de i' corps égaux au second, faisant

chacun une évolution complète et identique, en sens contraire de celle que fait le second; la chaleur totale qu'on devra fournir à l'ensemble des $i+i'$ corps sera

$$iQ - i'Q',$$

à quoi correspond un travail produit

$$iT - i'T'.$$

Or on peut prendre les nombres entiers i et i' tels qu'on ait

$$iQ - i'Q' = 0,$$

avec telle approximation qu'on voudra; et alors il faudra qu'on ait aussi, en vertu de l'axiome énoncé tout à l'heure,

$$iT - i'T' = 0,$$

sans quoi l'on pourrait créer du travail gratuitement, sans dépenser de la chaleur, ce qui semble paradoxal et contraire à cette loi naturelle que rien ne se fait de rien. L'ensemble des deux dernières équations donne facilement, par l'élimination du rapport $\frac{i}{i'}$,

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q'}{T'},$$

d'où il résulte que le rapport $\frac{Q}{T}$ est constant pour tous les corps.

Le cas que nous venons d'examiner étant défini par la simple introduction d'une hypothèse particulière dans le cas le plus général, l'équation $\frac{Q}{T} = \text{const.}$ n'est aussi qu'un cas particulier de l'équation (2), et par conséquent la constante n'est pas autre chose que la valeur du coefficient A. Ce coefficient indique la quantité de chaleur nécessaire pour produire un travail extérieur égal à l'unité; on le nomme *équivalent calorifique du travail*. D'un autre côté, le nombre inverse $\frac{1}{A}$ exprime le travail extérieur qu'on peut produire avec l'unité

de chaleur; on le nomme *équivalent mécanique* de la chaleur.

Quand les quantités de chaleur sont exprimées en calories et les travaux en kilogrammètres, toutes les expériences connues concordent pour faire adopter les valeurs

$$A = \frac{1}{424}, \quad \frac{1}{A} = 424;$$

en d'autres termes 1^{kgm} correspond à une quantité de chaleur égale à $\frac{1}{424}$ de calorie, et 1^{cal} répond à un travail de 424^{kgm}.

336. *Conséquences immédiates du premier principe; relation entre l'équivalent calorifique du travail et les deux chaleurs spécifiques d'un corps.* — Nous remarquerons d'abord que la quantité de chaleur dQ, qu'il faut donner à un corps pendant l'évolution élémentaire définie par les accroissements dp et dv de sa pression p et de son volume v, n'est pas une différentielle exacte, parce que le second membre de l'équation (1) comprend la différentielle exacte dU et le terme $Ap\,dv$ qui n'en est pas une. On ne peut donc intégrer cette équation, pour en déduire Q dans une évolution finie, que si l'on indique la relation entre p et v dans l'évolution dont il s'agit.

La quantité dQ donnée par l'équation (1) a une autre expression, qu'il est utile d'indiquer. Nommons c et c_1 les deux chaleurs spécifiques du corps considéré, à pression constante et à volume constant. Si v varie de dv pendant que p ne change pas, il faut donner au corps une quantité de chaleur égale, d'après la définition même de c, à c multipliée par l'accroissement correspondant de la température t, soit par $\frac{dt}{dv}dv$, puisque t est simplement fonction de p et de v; et comme l'équation (1) donne pour valeur de la même quantité

$$\left(\frac{dU}{dv} + Ap\right) dv,$$

on en conclut

$$c\frac{dt}{dv} = \frac{dU}{dv} + Ap. \tag{3}$$

Un raisonnement tout pareil appliqué au cas où p varierait de dp, le volume v de l'unité de poids restant invariable, conduirait à

$$(4) \qquad c_1 \frac{dt}{dp} = \frac{dU}{dp}.$$

On a par conséquent, en ajoutant ces deux équations respectivement multipliées par dv et dp,

$$(5) \qquad dQ = c_1 \frac{dt}{dp} dp + c \frac{dt}{dv} dv.$$

L'élimination de U entre les équations (3) et (4) donne encore

$$c \frac{d^2 t}{dp\, dv} + \frac{dt}{dv} \frac{dc}{dp} - A = c_1 \frac{d^2 t}{dp\, dv} + \frac{dt}{dp} \frac{dc_1}{dv}$$

ou bien

$$(6) \qquad A = (c - c_1) \frac{d^2 t}{dp\, dv} + \frac{dt}{dv} \frac{dc}{dp} - \frac{dt}{dp} \frac{dc_1}{dv},$$

ce qui établit une relation remarquable entre l'équivalent calorifique du travail et les deux chaleurs spécifiques d'un corps quelconque.

Faisons l'application de l'équation (6) au cas des gaz permanents. Pour cette espèce de corps, on admet ordinairement que c et c_1 sont des nombres constants, que l'expérience fait connaître et qui varient seulement avec la nature du gaz considéré. Ensuite la combinaison des lois de Mariotte et de Gay-Lussac nous a donné (n° 261), comme valeur du poids $\frac{1}{v}$ de l'unité de volume,

$$\frac{1}{v} = \frac{p\delta}{7991(1 + \alpha t)},$$

en nommant δ la densité du gaz par rapport à l'air, et α le coefficient $\frac{1}{273}$ de la dilatation des gaz; de là résulte, en posant encore $a = \frac{1}{\alpha} = 273$ et $R = \frac{7991\alpha}{\delta} = \frac{29,27}{\delta}$,

$$(7) \qquad pv = R(a + t).$$

En conséquence, l'équation (6), dans le cas des gaz permanents, se réduit à

$$(8) \qquad A = \frac{c - c_1}{R} = \frac{(c - c_1)\delta}{29,27}.$$

337. *Deuxième principe.* — Le second principe avait d'abord été entrevu par Sadi Carnot dans un Ouvrage publié en 1824, puis complété et rectifié plus tard par Clapeyron. Avant de l'énoncer sous la forme ordinaire qu'on lui donne aujourd'hui, nous devons d'abord indiquer un mode de représentation géométrique des états physiques successifs d'un corps, et donner la définition d'un cycle particulier qu'on a nommé *cycle de Carnot*.

Si l'on trace dans un plan deux axes rectangulaires Ov, Op (*fig* .388), on peut porter en abscisse une longueur $\overline{OA}$ égale

Fig. 388.

au volume v occupé par 1^{kg} d'un certain corps, et en ordonnée une longueur $\overline{Aa}$ égale à la pression de ce même corps. L'état physique du corps étant supposé défini, la connaissance du point a en résultera; réciproquement, en donnant le point a, on donnera par cela même ses coordonnées p et v, d'où l'on déduirait au besoin la température t, et par conséquent on connaîtra complètement l'état physique. Ainsi l'état physique d'un corps peut être défini par un point marqué sur le plan pOv; par suite, une succession continue d'états physiques sera définie par une courbe sur laquelle se déplacera le point. Si la courbe est fermée, elle représentera une évolution complète.

Supposons maintenant un corps partant de l'état a (c'est-à-dire de l'état que représente le point a); on le comprime par des forces extérieures, sans lui soustraire ni lui donner

de la chaleur; alors sa température et sa pression augmentent à mesure que son volume diminue, et il arrive ainsi à l'état b, en passant par la série d'états intermédiaires que figure la courbe ab. Soient t_0 et t_1 les températures qui répondent respectivement à a et à b, et dont la seconde est plus élevée que la première. A partir de b, on fait diminuer la pression par un changement convenable des forces extérieures, ce qui produit l'augmentation de volume du corps; mais simultanément on le maintient en contact avec une source indéfinie de chaleur, à la température t_1, qui l'oblige à conserver cette même température et l'empêche de se refroidir par l'effet de la dilatation, en lui fournissant la quantité Q_1 de chaleur nécessaire pour cela; il passe ainsi par les états que définit la courbe bc. A partir de l'état c, on le fait encore dilater, mais sans addition ni soustraction de chaleur; pendant cette partie de l'opération, la température baisse, et elle a repris la valeur t_0 quand le corps est passé à l'état d sur la courbe cd. Alors on le ramène à l'état primitif a par une compression, en l'obligeant à conserver la température t_0, par son contact avec une source indéfinie possédant la même température qui lui prend une quantité de chaleur Q_0 et empêche son échauffement par le fait de la compression. Lorsque le volume v a repris sa valeur initiale, la température ayant aussi conservé la sienne depuis d, l'état physique initial se trouve reproduit, puisqu'il est défini en donnant deux des quantités p, v, t; le circuit $abcda$ se fermera donc à son point de départ a.

Le cycle complet et réversible, défini de cette manière, se nomme le *cycle de Carnot;* les courbes ab, cd, représentant chacune des états successifs entre lesquels il n'y a pour le corps ni perte ni gain de chaleur, sont dites *courbes adiabatiques* (de ἀ privatif, διαβατικός qui traverse, parce que la chaleur ne peut traverser les parois qui enveloppent le corps); les courbes bc, da sont dites *courbes isothermes,* parce qu'elles répondent à des températures constantes (de ἴσος égal, θερμός chaud). Avec les notations du n° 335, l'équation différentielle des lignes adiabatiques serait

$$dQ = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dU}{dp}dp + \left(\frac{dU}{dv} + Ap\right)dv = 0;$$

et, si l'on connaissait la relation $t = f(p, v)$ qui lie la température à p et v, il suffirait de poser

$$f(p, v) = \text{const.},$$

pour avoir l'équation d'une ligne isotherme quelconque.

Ces explications étant données, nous énonçons ainsi le second principe :

Quand un corps accomplit un cycle de Carnot, si les deux sources de chaleur lui donnent ou en reçoivent des quantités de chaleur Q_1 *et* Q_0, *il y a, entre ces quantités et le travail* T *fait par le corps sur les corps extérieurs, aussi bien qu'entre* Q_1 *et* Q_0, *des rapports uniquement fonctions des températures* t_1 *et* t_0 *des deux sources, et indépendants du corps soumis à l'expérience.*

La vérité de ce principe est reconnue surtout parce que les déductions qu'on en tire sont d'accord avec les faits observés. Voici cependant une conséquence, qui semble paradoxale et qui résulterait de sa négation. Supposons deux corps M, M' accomplissant le cycle de Carnot, entre deux températures t_1, t_0, les mêmes pour les deux corps, et rendues respectivement invariables par les mêmes sources indéfinies. Soient

Q_1 la quantité de chaleur que le corps M emprunte à la source supérieure, en parcourant le cycle dans le sens *abcda*, comme on l'a expliqué ci-dessus;
Q_0 la quantité de chaleur qu'il cède à la source inférieure;
T son travail sur les corps extérieurs;
Q'_1, Q'_0, T' les quantités analogues pour le corps M'.

Nous pouvons concevoir i corps égaux à M, faisant tous la même évolution dans le sens *abcda*, et i' corps égaux à M' faisant une évolution inverse dans le sens *adcba*; pour le système total de ces $i + i'$ corps, la quantité de chaleur reçue de la source supérieure sera

$$iQ_1 - i'Q'_1,$$

car ceux qui accomplissent l'évolution inverse prennent de la chaleur à la source inférieure, au lieu d'en donner, et en donnent à la source supérieure, au lieu d'en recevoir. De même,

la quantité de chaleur cédée par l'ensemble à la source inférieure sera

$$iQ_0 - i'Q'_0,$$

et le travail fait sur les corps extérieurs

$$iT - i'T'.$$

Or le gain de chaleur du système est égal à la différence

$$iQ_1 - i'Q'_1 - (iQ_0 - i'Q'_0),$$

entre ce qu'il a reçu d'un côté et donné de l'autre; et, puisque l'état physique, à la fin du cycle, est le même qu'au commencement, on a, en vertu du premier principe (n° 335),

$$iQ_1 - i'Q'_1 - (iQ_0 - i'Q'_0) = A(iT - i'T').$$

Prenons maintenant les nombres entiers i et i', de telle sorte qu'on ait

$$iT - i'T' = 0,$$

ce qui sera toujours possible, avec telle approximation qu'on voudra; la dernière équation devient alors

$$iQ_1 - i'Q'_1 = iQ_0 - i'Q'_0,$$

ce qui signifie que la quantité de chaleur donnée par la source supérieure est égale à la quantité reçue par la source inférieure. Mais nous disons, de plus, que chacune de ces deux quantités doit être nulle. En effet, si cela n'était pas, on pourrait toujours s'arranger pour rendre négatifs les deux membres de l'équation précédente; il suffirait, dans le cas où ils ne le seraient pas déjà, de changer les sens admis pour les évolutions des $i + i'$ corps. On arriverait alors à conclure qu'une certaine quantité de chaleur aurait pu passer naturellement, sans dépenser aucun travail, de la source la moins chaude à la source la plus chaude. Si l'on regarde ce fait comme inadmissible, l'égalité $iT - i'T' = 0$ entraînera simultanément

$$iQ_1 - i'Q'_1 = 0, \quad iQ_0 - i'Q'_0 = 0;$$

d'où résulte, par l'élimination de $\frac{t'}{t}$, entre ces trois égalités,

$$\frac{T}{T'} = \frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{Q_0}{Q'_0}.$$

Donc les rapports mutuels entre les trois quantités Q_1, Q_0, T sont les mêmes pour deux corps quelconques accomplissant des cycles de Carnot, entre des sources qui ont les mêmes températures t_1, t_0; donc ces rapports ne peuvent dépendre que de t_1 et t_0. C'est justement en cela que consiste le second principe.

338. *Quantité de chaleur nécessaire pour la dilatation d'un corps à température constante.* — Lorsque le cycle de Carnot devient infiniment petit, le quadrilatère représentatif *abcda* (*fig.* 388) tend à se transformer en parallélogramme; en effet, les tangentes des angles que font les éléments *ab*, *ad* avec l'axe des v s'expriment (n° 337) par

$$-\frac{\frac{dU}{dv} + Ap}{\frac{dU}{dp}} \quad \text{et} \quad -\frac{\frac{df}{dv}}{\frac{df}{dp}},$$

p et v étant les coordonnées du point a; pour les côtés opposés dc, bc, il faudrait remplacer ces coordonnées par d'autres infiniment peu différentes, qui donneraient le même résultat, à des infiniment petits près. Donc, à la limite, les angles que font les côtés opposés avec l'axe des v sont égaux, et ces côtés sont parallèles; donc *abcd* devient un parallélogramme. La surface *abcd* est par suite équivalente à celle du parallélogramme de même base et de même hauteur $aa'd'd$, qu'on obtient en prolongeant les ordonnées Aa, Dd, jusqu'à la rencontre de l'élément bc.

Nommons maintenant

t la température de la source inférieure, $t + dt$ celle de la source supérieure;

dQ la quantité de chaleur empruntée à la première de ces deux sources par un corps qui parcourrait le cycle dans le sens *adcba*;

dQ' la quantité de chaleur que ce corps prend à l'autre source, en suivant le cycle dans le sens contraire *abcda*;

dv l'accroissement du volume occupé par 1^{kg} du corps, pendant le parcours de la partie *ad* du cycle;

dp la différence de pression dans les deux états physiques représentés par les points a, a', c'est-à-dire la longueur $\overline{aa'}$.

Si l'on considère p comme une fonction des variables indépendantes t et v, comme v est le même pour a et a', on aura

$$dp = \overline{aa'} = \frac{dp}{dt}\, dt\,;$$

et, puisque $\overline{AD} = dv$, il en résulte

$$\text{aire } abcd = \text{aire } aa'd'd = \overline{aa'} \times \overline{AD} = \frac{dp}{dt}\, dt\, dv.$$

Or l'aire *abcd* est égale identiquement à

$$BbcC + cCDd - AabB - dDAa,$$

c'est-à-dire à $\int p\, dv$ ou au travail extérieur que ferait le corps pendant le parcours du cycle *abcda*; donc, en la multipliant par l'équivalent calorifique A du travail (n° 335), on doit retrouver la quantité de chaleur $dQ' - dQ$ reçue par le corps dans ce dernier cycle. Ainsi

$$dQ' - dQ = A \frac{dp}{dt}\, dt\, dv.$$

D'un autre côté, le second principe (n° 337) nous apprend que $\dfrac{dQ'}{dQ}$ est uniquement fonction de t et de dt; comme d'ailleurs ce rapport tend vers l'unité pour $dt = 0$, on peut, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, poser

$$\frac{dQ'}{dQ} = 1 + \frac{dt}{\varphi(t)},$$

$\varphi(t)$ désignant une fonction, encore inconnue, de la température. L'élimination de dQ' entre les deux équations précédentes donne alors

$$dQ = A\, \varphi(t) \frac{dp}{dt}\, dv, \tag{9}$$

formule importante qui, lorsque nous aurons déterminé $\varphi(t)$, permettra de calculer la quantité de chaleur dQ nécessaire pour la dilatation dv de l'unité de poids d'un corps, sans changement de sa température t. Il ne faut pas oublier que $\frac{dp}{dt}$ est une dérivée partielle prise en supposant t et v variables indépendantes.

339. *Détermination de la fonction* $\varphi(t)$. — Reprenons l'équation générale (5) du n° 336

$$dQ = c_1 \frac{dt}{dp} dp + c \frac{dt}{dv} dv;$$

dans le cas où le changement d'état physique se fait sous la condition de conserver la température constante, on a

$$\frac{dt}{dp} dp + \frac{dt}{dv} dv = 0,$$

et l'équation précédente devient

$$dQ = (c - c_1) \frac{dt}{dv} dv.$$

D'autre part, si dv est nul, les accroissements différentiels de t et p sont liés par la relation

$$dt = \frac{dt}{dp} dp;$$

donc la dérivée partielle $\frac{dp}{dt}$, qui figure dans l'équation (9), est l'inverse de la dérivée de t relativement à p, lorsque p et v sont les variables indépendantes. En tenant compte de cette observation et de la valeur qu'on vient de trouver pour dQ, l'équation (9) peut s'écrire

$$(c - c_1) \frac{dt}{dv} dv = \frac{A\,\varphi(t)}{\frac{dt}{dp}} dv,$$

et l'on a, par suite,

$$\varphi(t) = \frac{c - c_1}{A} \frac{dt}{dv} \frac{dt}{dp}.$$

Puisque la fonction $\varphi(t)$ est la même pour tous les corps, nous avons le droit de la déterminer dans l'hypothèse où il s'agirait d'un gaz permanent. Dans ce cas, on a vu (n° 336) que la relation entre p, v, t est

$$a + t = \frac{pv}{R};$$

il en résulte

$$\frac{dt}{dv} = \frac{p}{R}, \quad \frac{dt}{dp} = \frac{v}{R}, \quad \frac{dt}{dv}\frac{dt}{dp} = \frac{pv}{R^2} = \frac{a+t}{R}$$

et, par suite,

$$\varphi(t) = \frac{c - c_1}{AR}(a + t),$$

ou plus simplement, en vertu de la relation (8) du n° 336,

$$\varphi(t) = a + t.$$

La fonction $\varphi(t)$ se trouve ainsi connue pour un corps quelconque.

340. *Entropie.* — On a fait remarquer (n° 336) que la quantité de chaleur dQ reçue par un corps, pendant un changement différentiel d'état physique, n'est pas la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes p et v, par lesquelles on peut définir cet état. Mais nous allons démontrer qu'au contraire $\frac{dQ}{a+t}$ est une différentielle exacte. On a, en effet, d'après l'équation (5) du n° 336,

$$\frac{dQ}{a+t} = \frac{c}{a+t}\frac{dt}{dv}dv + \frac{c_1}{a+t}\frac{dt}{dp}dp;$$

pour que cette expression soit celle d'une différentielle exacte, après qu'on aura, bien entendu, remplacé t, c, c_1 par leurs valeurs en fonction de p et de v, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{c}{a+t}\frac{dt}{dv}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{c_1}{a+t}\frac{dt}{dp}\right),$$

ou bien, en développant les calculs indiqués,

$$\frac{1}{a+t}\left(\frac{dc}{dp}\frac{dt}{dv}-\frac{dc_1}{dv}\frac{dt}{dp}\right)-\frac{1}{(a+t)^2}(c-c_1)\frac{dt}{dv}\frac{dt}{dp}+\frac{c-c_1}{a+t}\frac{d^2t}{dp\,dv}=0$$

ou encore

$$(c-c_1)\frac{dt}{dv}\frac{dt}{dp}=(a+t)\left[(c-c_1)\frac{d^2t}{dp\,dv}+\frac{dc}{dp}\frac{dt}{dv}-\frac{dc_1}{dv}\frac{dt}{dp}\right].$$

Or le premier membre de cette dernière équation a pour valeur $A\varphi(t)$, comme on vient de le voir (n° **339**); le second est $A(a+t)$, comme le montre l'égalité (6) du n° **336**. Donc cette équation est identiquement satisfaite, puisqu'elle se réduit à

$$\varphi(t)=a+t;$$

donc enfin $\frac{dQ}{a+t}$ est bien une différentielle exacte.

M. Clausius a donné le nom d'*entropie* [1] à l'intégrale $\int\frac{dQ}{a+t}$; nous la désignerons par la lettre S.

341. *Rendement calorifique dans le cycle de Carnot.* — Soit, d'après ce qui précède,

$$dQ=(a+t)\,dS; \tag{10}$$

si nous supposons un corps accomplissant le cycle de Carnot représenté par le contour *abcda* (*fig.* 388), et si nous intégrons l'équation (10) le long de la ligne isotherme *bc*, sur laquelle t a la valeur constante t_1, nous aurons pour expression de la quantité de chaleur Q_1 prise par le corps à la source supérieure

$$Q_1=(a+t_1)(S_1-S_0), \tag{11}$$

S_0 et S_1 désignant les valeurs de S qui correspondent aux

(1) Du grec ἐντροπή, tour, évolution. Le nom est sans doute destiné à rappeler que l'intégrale s'annule quand elle est prise dans l'étendue d'un cycle dont la courbe figurative est fermée. Cette propriété résulte d'ailleurs immédiatement de ce que l'intégrale indéfinie peut s'exprimer uniquement en fonction des variables p et v, et qu'elle reprend la même valeur quand l'état physique est redevenu le même.

états b et c. Remarquons ensuite que dQ et par suite dS sont nulles pour les parcours ab et cd; donc S est constante dans chacun de ces parcours, et l'on a

$$S = S_0 \quad \text{pour l'état } a,$$
$$S = S_1 \quad \text{pour l'état } d.$$

Donc, en intégrant l'équation (10) le long de la ligne isotherme da, sur laquelle t reste égal à la constante t_0, nous aurons, pour déterminer la quantité de chaleur Q_0 cédée à la source inférieure, l'équation

$$(12) \qquad - Q_0 = (a + t_0)(S_0 - S_1).$$

La combinaison des deux équations (11) et (12) donne, par division membre à membre,

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{a + t_1}{a + t_0};$$

d'où l'on tire

$$(13) \qquad \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{t_1 - t_0}{a + t_1}.$$

La différence $Q_1 - Q_0$ exprime la quantité de chaleur qui, pendant le cycle complet, s'est convertie en travail fait par le corps sur les corps extérieurs; l'état physique étant redevenu, à la fin du cycle, le même qu'au commencement, la chaleur $Q_1 - Q_0$ reçue en somme par le corps n'a pas pu amener d'autre effet (n° 335). Sur la quantité Q_1 fournie par la source supérieure, la partie $Q_1 - Q_0$ a été utilisée, le reste s'est dispersé inutilement dans la source inférieure, de même que l'eau, après avoir agi sur un récepteur hydraulique, devient inutile (au point de vue du travail à communiquer au récepteur) dès qu'elle est arrivée dans le bief d'aval. Le rapport de la chaleur utilisée $Q_1 - Q_0$ à la chaleur dépensée Q_1 est ce qu'on nomme le *rendement calorifique;* dans le cycle de Carnot, on voit qu'il est égal à la différence de température des deux sources, divisée par la *température absolue* de la source supérieure (on nomme ainsi la température $a + t_1$, c'est-à-dire t_1 augmentée de 273°).

On a pu démontrer que, si un corps accomplit une évolution quelconque, différente du cycle de Carnot, entre les tempéra-

tures extrêmes t_1 et t_0, le rendement calorifique obtenu serait alors inférieur à $\frac{t_1 - t_0}{a + t_1}$. Nous nous bornons à énoncer ce théorème sans en donner la démonstration.

Dans les machines à vapeur à détente et condensation, on réalise approximativement le cycle de Carnot. L'eau prise dans le condenseur est refoulée dans la chaudière par la pompe alimentaire; c'est une première période effectuée suivant une ligne adiabatique. La vapeur de la chaudière entre à pleine pression dans le corps de pompe et fournit ainsi une deuxième période suivant une ligne isotherme. La détente constitue la troisième période, suivant une autre ligne adiabatique; enfin la quatrième période, suivant une autre ligne isotherme, existe pendant la libre communication du corps de pompe avec le condenseur. Le cycle de Carnot n'est pas complètement réalisé, parce que d'une part l'eau n'arrive pas dans la chaudière avec la température de celle-ci, et que d'autre part la vapeur à la fin de la détente n'a pas encore la pression et la température du condenseur.

Négligeons ces différences, ce qui aura pour résultat d'augmenter un peu le rendement calorifique. Supposons en outre la température t_0 du condenseur égale à 30°, ce qui répond à une tension d'environ $\frac{1}{24}$ d'atmosphère; c'est une limite au-dessous de laquelle il serait difficile de descendre, dans les conditions habituelles de la pratique. Suivant la valeur attribuée à la température t_1 de la vapeur saturée fournie par la chaudière, on trouvera pour le rendement calorifique les chiffres contenus dans le Tableau suivant :

TEMPÉRATURE t_1 en degrés centigrades.	TENSION de la vapeur en atmosphères.	RENDEMENT calorifique.	TEMPÉRATURE t_1 en degrés centigrades.	TENSION de la vapeur en atmosphères.	RENDEMENT calorifique.
111°,74	1,5	0,212	170°,81	8	0,317
120,60	2,0	0,230	180,31	10	0,332
144,00	4,0	0,273	188,41	12	0,343
159,22	6,0	0,299	195,53	14	0,353

Ce Tableau prouve que le rendement calorifique croît avec la température de la chaudière; mais, comme cette température croît elle-même assez lentement avec la pression, il faudrait arriver à des pressions énormes et tout à fait inusitées, pour dépasser sensiblement le rendement de $\frac{1}{3}$, qui répond à peu près à la pression de 10^{atm}.

Ainsi donc utiliser environ $\frac{1}{3}$ de la chaleur prise par l'eau dans le foyer, c'est ce qu'une machine à vapeur peut faire de mieux. D'un autre côté, il s'en faut de beaucoup que toute la chaleur du foyer soit employée à produire de la vapeur, car une portion notable se perd par le rayonnement et une autre portion se dissipe dans l'atmosphère, avec les gaz résultant de la combustion; enfin, sans parler de l'impossibilité de réaliser exactement le cycle de Carnot, il ne faut pas oublier que tout le travail mécanique transmis par la vapeur au piston ne se transforme pas en travail utile, parce qu'une partie se trouve absorbée par les frottements et autres résistances secondaires du mécanisme. Aussi, quand on compare le travail utile finalement obtenu au travail qui serait l'équivalent mécanique des calories contenues dans le charbon brûlé, ce n'est plus $\frac{1}{3}$ qu'on trouve comme rendement, c'est $\frac{1}{12}$ dans les meilleures machines connues, et quelquefois $\frac{1}{30}$ ou $\frac{1}{50}$ à peine (1). On

(1) Voici comment on peut s'en rendre compte. On a reconnu par des mesures expérimentales directes que les meilleures machines à vapeur consomment 1^{kg} de charbon par cheval et par heure, c'est-à-dire qu'elles donnent un travail de 3600×75^{kgm} par kilogramme de charbon brûlé. Or la combustion de ce kilogramme de charbon produit 7500^{cal}, équivalentes à 7500×424^{kgm}; le rendement serait donc, pour ces machines,

$$\frac{3600 \times 75}{7500 \times 424} = \frac{9}{106} = 0{,}085.$$

Mais souvent le poids de charbon brûlé s'élève à 2^{kg}, 3^{kg}, 4^{kg}, 5^{kg} par cheval et par heure; le rendement varie alors en raison inverse et devient respectivement

0,042, 0,028, 0,021, 0,017.

voit, par conséquent, qu'il reste encore beaucoup de progrès à faire, mais on aperçoit en même temps la limite qu'on ne saurait franchir; de quelque manière qu'on s'y prenne, on ne dépassera pas le rendement $\frac{t_1 - t_0}{a + t_0}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ avec la vapeur d'eau pour véhicule de la chaleur, à moins qu'on n'arrive un jour à reculer beaucoup la limite des pressions usitées aujourd'hui.

§ II. — Application de la Thermodynamique aux gaz permanents.

342. *Formules diverses exprimant l'accroissement de chaleur interne, la chaleur reçue, le travail extérieur d'un gaz.* — Reprenons les équations

$$dQ = dU + Ap\,dv, \tag{1}$$

$$dQ = c_1 \frac{dt}{dp} dp + c \frac{dt}{dv} dv, \tag{2}$$

$$pv = R(a + t), \tag{3}$$

$$c - c_1 = AR, \tag{4}$$

déjà établies aux nos 335 et 336, les deux dernières ne devant s'appliquer qu'aux gaz permanents. L'élimination de t entre la deuxième et la troisième donne d'abord

$$dQ = \frac{1}{R}(c_1 v\,dp + cp\,dv), \tag{5}$$

d'où l'on déduit, au moyen de la première et de la quatrième,

$$dU = dQ - Ap\,dv = \frac{1}{R}(c_1 v\,dp + cp\,dv) - \frac{c - c_1}{R} p\,dv$$
$$= \frac{c_1}{R}(v\,dp + p\,dv) = \frac{c_1}{R} d(pv),$$

ou bien, en vertu de l'équation (3),

$$dU = c_1\,dt.$$

Donc on aura, en intégrant dans l'hypothèse de c_1 constante,

entre deux états physiques auxquels répondent des chaleurs internes U_1, U_0 et des températures t_1, t_0,

$$U_1 - U_0 = c_1(t_1 - t_0). \tag{6}$$

Ainsi l'accroissement de la chaleur interne dépend uniquement de celui de la température, auquel il est proportionnel, et il est indépendant de la série des états intermédiaires par lesquels on a fait passer le gaz.

Au contraire, dQ ne peut s'intégrer, et la quantité de chaleur à fournir, pour un changement déterminé d'état physique, ne peut être connue que si l'on donne la loi de valeurs de p en fonction de v, pour les états intermédiaires. Nous allons faire à ce sujet diverses hypothèses particulières, et en établir les conséquences.

Première hypothèse : *Le volume du gaz est constant.* — Alors on a

$$dv = 0, \quad dQ = dU, \quad Q = U_1 - U_0 = c_1(t_1 - t_0).$$

Cela était évident *a priori;* v étant constant, le gaz ne fait pas de travail extérieur, et la quantité de chaleur à lui donner correspond exactement à l'accroissement de sa chaleur interne.

Deuxième hypothèse : *La pression du gaz ne varie pas.* — L'expression (2) de dQ devient, puisque dp est nul,

$$dQ = c\frac{dt}{dv}dv$$

ou, en substituant la valeur de $\frac{dt}{dv}$ fournie par l'équation (3),

$$dQ = \frac{cp}{R}dv.$$

Par suite, l'intégration donnera, si l'on considère c comme constant et qu'on nomme v_0 et v_1 les valeurs initiale et finale de v,

$$Q = \frac{cp}{R}(v_1 - v_0),$$

soit encore, eu égard à (3),

$$Q = c(t_1 - t_0);$$

ce résultat peut s'écrire

$$Q = c_1(t_1 - t_0) + (c - c_1)(t_1 - t_0),$$

ou bien, en vertu des équations (4) et (6),

$$(7) \qquad Q = U_1 - U_0 + AR(t_1 - t_0).$$

Ici la quantité de chaleur reçue comprend, outre l'accroissement de la chaleur interne du gaz, un terme $AR(t_1 - t_0)$, qui est l'équivalent calorifique du travail extérieur $p(v_1 - v_0)$, ou $R(t_1 - t_0)$, fait par lui dans son évolution.

Troisième hypothèse : *La température du gaz est constante.* — D'abord la formule (6) montre que la chaleur interne ne varie pas; la quantité de chaleur reçue est alors celle qui correspond au travail extérieur fait par le gaz, et l'on a, conformément à l'équation (1),

$$dQ = Ap\,dv = Apv\,\frac{dv}{v}.$$

Or, d'après l'équation (3), le produit pv conserve une valeur constante; on peut donc intégrer la dernière équation, ce qui donne

$$(8) \qquad Q = Apv\,L\frac{v_1}{v_0} = Apv\,L\frac{p_0}{p_1}.$$

Dans cette formule on peut mettre, au lieu de pv, soit $p_0 v_0$, soit $p_1 v_1$, soit encore $R(a + t)$.

Ce résultat montre que le travail extérieur produit a pour valeur $pv\,L\frac{v_1}{v_0}$ ou $pv\,L\frac{p_0}{p_1}$, ce qu'on avait déjà trouvé (n° 298, 2°) en supposant, comme nous le faisons ici, qu'on pouvait négliger le poids du gaz et que la loi de Mariotte était applicable.

Quatrième hypothèse : *Le gaz ne reçoit et ne donne aucune quantité de chaleur.* — Il n'y a pas lieu ici de déterminer Q, qui est toujours nulle, par hypothèse; mais on peut se demander quelle relation existe, pendant toute une évolution, entre la pression et le volume, et quel est le travail extérieur produit par le gaz.

Puisqu'on a toujours $Q = 0$, l'équation (5) donne

$$c_1 v\, dp + cp\, dv = 0,$$

ou bien, en divisant par $c_1 pv$ et posant $\gamma = \frac{c}{c_1}$,

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0.$$

L'intégration de cette dernière équation est immédiate; on en déduit

$$(9) \qquad pv^\gamma = \text{const.} = p_0 v_0^\gamma.$$

On voit, par conséquent, que la pression varie, non point en raison inverse du volume (comme dans le cas d'une température constante), mais en raison inverse de la puissance γ du volume; le nombre γ est d'ailleurs, pour un gaz permanent quelconque, sensiblement égal à 1,41.

Le travail extérieur T effectué par le gaz, pendant le passage de l'état initial (p_0, v_0) à l'état final (p_1, v_1), s'exprime par $\int_{v_0}^{v_1} p\, dv$; il faut donc calculer cette intégrale. Or, si l'on remplace p par sa valeur tirée de l'équation (9), elle devient

$$T = p_0 v_0^\gamma \int_{v_0}^{v_1} v^{-\gamma}\, dv = \frac{p_0 v_0^\gamma}{\gamma - 1}(v_0^{1-\gamma} - v_1^{1-\gamma}),$$

ce qu'on peut mettre sous les deux formes

$$(10) \quad T = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

On peut encore remarquer qu'on a (n° 336)

$$pv = R(a + t) = \frac{7991}{\delta}(1 + \alpha t).$$

δ étant la densité du gaz relativement à l'air, $\alpha = \frac{1}{273}$ le coefficient de dilatation des gaz, t la température. Si l'on rem-

place $p_0 v_0$ par sa valeur tirée de cette égalité, la formule (10) deviendra

$$(11) \quad \begin{cases} T = \dfrac{7991(1+\alpha t_0)}{\delta(\gamma-1)}\left[1-\left(\dfrac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1}\right] \\ \quad = \dfrac{7991(1+\alpha t_0)}{\delta(\gamma-1)}\left[1-\left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \end{cases}$$

Enfin, comme on a, par application de l'équation (1),

$$Q = 0 = U_1 - U_0 + A\int_{v_0}^{v_1} p\,dv,$$

on en déduit

$$T = \frac{U_0 - U_1}{A}$$

ou, en vertu de (6),

$$(12) \qquad T = \frac{c_1}{A}(t_0 - t_1).$$

343. *Expression de l'entropie.* — On se rappelle (n° 340) que la fonction S, à laquelle Clausius a donné le nom d'*entropie,* a pour différentielle $\dfrac{dQ}{a+t}\cdot$ Nous poserons donc, eu égard aux formules (3) et (5),

$$dS = \frac{c_1 v\,dp + cp\,dv}{pv} = c_1\left(\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dv}{v}\right);$$

d'où résulte, en supposant toujours l'invariabilité de c_1,

$$(13) \qquad S = c_1\,L(pv^\gamma).$$

344. *Équations des lignes isothermes et des lignes adiabatiques.* — Si la température d'un gaz ne change pas, on a, par l'équation (3),

$$pv = \text{const.};$$

c'est l'équation générale des lignes isothermes, et ces lignes sont une série d'hyperboles équilatères. Si le changement d'état du gaz se fait sans addition ni soustraction de chaleur,

on a $Q = o$, et il en résulte (n° 342, quatrième hypothèse

$$pv^\gamma = \text{const.},$$

équation générale des lignes adiabatiques.

Lorsque par un même point A (*fig.* 389) on fait passer une ligne isotherme AB et une ligne adiabatique AC, les tangentes en A à ces deux courbes ont pour coefficients respectifs d'inclinaison sur l'axe des v

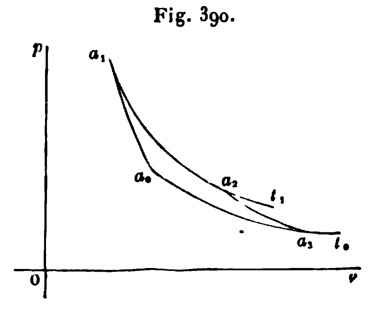
Fig. 389.

$$-\frac{p}{v} \quad \text{et} \quad -\gamma\frac{p}{v};$$

le nombre γ étant supérieur à l'unité, on en conclut que la ligne adiabatique est plus inclinée que la ligne isotherme, de sorte que ces lignes présentent la disposition indiquée sur la figure.

345. *Travail extérieur fait par un gaz permanent pendant l'accomplissement d'un cycle de Carnot; quantité de chaleur à lui donner.* — Supposons un gaz permanent qui accomplit un cycle de Carnot, représenté par $a_0 a_1 a_2 a_3$ (*fig.* 390); désignons par

Fig. 390.



p et v avec les indices 0, 1, 2, 3 la pression et le volume du kilogramme de gaz, dans les états successifs a_0, a_1, a_2, a_3;

t_0 et t_1 les températures des sources inférieure et supérieure de chaleur;

Q_0 et Q_1 les quantités de chaleur cédée par le gaz à la première source et prise à la seconde;

T_1, T_2, T_3, T_4 les travaux extérieurs que le gaz a effectués dans les évolutions successives a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, a_3a_0.

L'application des formules du n° 342 donne immédiatement

$$Q_1 = AR(a+t_1)\,L\frac{v_2}{v_1}, \quad Q_0 = AR(a+t_0)\,L\frac{v_3}{v_0},$$

$$T_1 = \frac{c_1}{A}(t_0 - t_1), \quad T_2 = R\,(a+t_1)\,L\frac{v_2}{v_1},$$

$$T_3 = \frac{c_1}{A}(t_1 - t_0), \quad T_4 = R\,(a+t_0)\,L\frac{v_0}{v_3}.$$

Les travaux T_1 et T_3 étant égaux et de signes contraires, on voit que le travail extérieur total T fait par le gaz se réduit à $T_2 + T_4$; donc

$$T = R(a+t_1)\,L\frac{v_2}{v_1} + R(a+t_0)\,L\frac{v_0}{v_3}.$$

Or on a, en vertu des équations des lignes isothermes et des lignes adiabatiques (n° 344),

$$p_0v_0 = p_3v_3, \quad p_2v_2 = p_1v_1, \quad p_3v_3^\gamma = p_2v_2^\gamma, \quad p_1v_1^\gamma = p_0v_0^\gamma;$$

le produit membre à membre de ces quatre égalités donne donc

$$(v_1v_3)^{\gamma-1} = (v_0v_2)^{\gamma-1} \quad \text{ou} \quad \frac{v_3}{v_0} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Par suite,

$$L\frac{v_0}{v_3} = -L\frac{v_2}{v_1},$$

et, en transportant dans T cette valeur de $L\frac{v_0}{v_3}$,

$$T = R(t_1 - t_0)\,L\frac{v_2}{v_1}.$$

La quantité Q de chaleur reçue par le gaz est $Q_1 - Q_0$, soit

$$Q = AR(a+t_1)\,L\frac{v_2}{v_1} + AR(a+t_0)\,L\frac{v_0}{v_3} = AT = AR(t_1 - t_0)\,L\frac{v_2}{v_1},$$

résultat conforme au premier principe (n° 335). On constate

aussi que le rendement calorifique $\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1}$ a bien pour valeur $\frac{t_1 - t_0}{a + t_1}$, comme on l'a démontré d'une manière générale au n° **341**.

346. *Vitesse d'écoulement d'un gaz permanent.* — La question a été déjà traitée au n° **296** dans l'hypothèse simple d'un gaz à température constante; nous allons la reprendre en nous plaçant à un point de vue plus général, mais en supposant toujours le mouvement permanent; de plus, nous négligerons le poids propre du gaz, comme il a été dit au n° **334**. Alors la force extérieure directement appliquée à chaque molécule, dans l'intérieur de la masse, est censée nulle, et l'équation (7) du n° **273** devient

$$V\,dV = -\frac{1}{\rho}\,dp,$$

ou bien, comme le poids ρg de l'unité de volume s'exprime par $\frac{1}{v}$ avec nos notations actuelles,

$$\frac{V\,dV}{g} = -v\,dp.$$

L'intégration de cette équation entre deux points pris sur la trajectoire d'une même molécule, pour lesquels la vitesse V, la pression p et le volume v auraient les valeurs respectives

$$V_0,\ p_0,\ v_0,\quad V_1,\ p_1,\ v_1,$$

donne

$$\frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} = -\int_{p_0}^{p_1} v\,dp = \int_{p_1}^{p_0} v\,dp,$$

et dans l'hypothèse où la vitesse V_0 serait négligeable, comme étant prise dans l'intérieur d'un réservoir de grandes dimensions comparativement à l'orifice de sortie,

$$\frac{V_1^2}{2g} = \int_{p_1}^{p_0} v\,dp.$$

L'intégrale définie qui figure au second membre de cette

relation peut se calculer dans trois des quatre hypothèses examinées au n° 342, à propos d'une autre question.

1° *Le volume v est supposé constant.* — Alors

$$\frac{V_1^2}{2g} = v(p_0 - p_1) = \frac{p_0 - p_1}{\rho g}.$$

Cette hypothèse exige que la température ait baissé, en allant de l'intérieur du réservoir au point de sortie. Il faut, en effet, pour que l'écoulement soit effectif et V_1 réelle, qu'on ait $p_0 > p_1$; et, comme on a d'autre part

$$a + t_0 = \frac{p_0 v}{R}, \quad a + t_1 = \frac{p_1 v}{R},$$

on en déduit la différence positive

$$t_0 - t_1 = \frac{v}{R}(p_0 - p_1).$$

A cet abaissement de température répond (n° 342) une diminution de chaleur interne

$$U_0 - U_1 = \frac{c_1 v}{R}(p_0 - p_1),$$

et c'est là aussi l'expression de la quantité de chaleur qu'il faudrait soustraire au gaz par kilogramme écoulé, car l'invariabilité de v entraîne la nullité du travail extérieur $\int_{v_0}^{v_1} p\,dv$.

2° *La température est constante.* — Dans ce cas pv est constant; donc

$$\int_{p_1}^{p_0} v\,dp = \int_{p_1}^{p_0} pv\frac{dp}{p} = p_0 v_0 \,\mathrm{L}\frac{p_0}{p_1},$$

et, par suite,

$$\frac{V_1^2}{2g} = p_0 v_0 \,\mathrm{L}\frac{p_0}{p_1}.$$

En remplaçant $p_0 v_0$ par $R(a + t_0)$ ou par $\frac{7991(1 + \alpha t_0)}{\delta}$,

comme au n° 342, on trouve

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{7991(1+\alpha t_0)}{\delta} L\frac{p_0}{p_1},$$

résultat déjà trouvé (n° 296). Ajoutons encore qu'ici le gaz fait un travail extérieur, exprimé (n° 342) par $p_0 v_0 L\frac{p_0}{p_1}$, et que, par suite, il faut lui donner une quantité de chaleur

$$Q = A p_0 v_0 L\frac{p_0}{p_1}$$

par kilogramme écoulé, afin de maintenir sa température constante.

3° *On suppose que le gaz ne reçoit pas de chaleur du dehors et qu'il n'en donne pas.* — Dans ce cas, on a la relation (n° 342)

$$p v^\gamma = p_0 v_0^\gamma;$$

en y prenant la valeur de v pour la porter dans $\int v\,dp$, il vient

$$\int_{p_1}^{p_0} v\,dp = p_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0 \int_{p_1}^{p_0} p^{-\frac{1}{\gamma}}\,dp$$

$$= \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0}{1-\frac{1}{\gamma}}\left(p_0^{1-\frac{1}{\gamma}} - p_1^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) = \frac{p_0 v_0 \gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \frac{V_1^2}{2g}.$$

Lorsque la différence $p_0 - p_1$ est petite, cette formule peut se simplifier. Si l'on pose, en effet,

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 - \varepsilon,$$

on aura, par la formule du binôme,

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\varepsilon + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}-1\right)\varepsilon^2 + \ldots;$$

d'où résulte

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_0 v_0 \gamma}{\gamma - 1}\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\varepsilon - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} - 1\right)\varepsilon^2 + \ldots\right]$$

$$= p_0 v_0 \varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\gamma} + \ldots\right) = (p_0 - p_1) v_0\left(1 + \frac{p_0 - p_1}{2\gamma p_0} + \ldots\right).$$

Si $\frac{p_0 - p_1}{2\gamma p_0}$ est négligeable devant l'unité, on peut réduire la formule à

$$\frac{V_1^2}{2g} = v_0(p_0 - p_1) = \frac{p_0 - p_1}{\rho_0 g},$$

résultat identique à celui du premier cas.

On peut encore remarquer que la différentiation de l'équation (3) du n° 342 donne

$$dt = \frac{1}{R}(p\,dv + v\,dp),$$

et que l'équation (5) devient, puisque Q est toujours nulle,

$$c_1 v\,dp + cp\,dv = 0;$$

donc

$$dt = \frac{v\,dp}{R}\left(1 - \frac{c_1}{c}\right),$$

et, en vertu de l'équation (4),

$$\frac{c\,dt}{A} = v\,dp.$$

On déduit de là

$$\frac{V_1^2}{2g} = \int_{p_1}^{p_0} v\,dp = \frac{c}{A}(t_0 - t_1);$$

c'est la formule de Weisbach.

Il faut reconnaître que la réalisation rigoureuse de ces diverses hypothèses est assez difficile à obtenir. La dernière est peut-être celle qui se rapproche le plus des conditions ordinaires de la pratique.

§ III. — Application de la Thermodynamique à la vapeur d'eau saturée, mélangée d'eau liquide.

347. *Des vapeurs saturées.* — Une masse liquide maintenue constamment à la température t° se trouve dans une enceinte fermée, à parois fixes, de volume plus grand (sans dépasser cependant une certaine limite), ayant cette même température; au bout de quelque temps, l'espace restant libre au-dessous du liquide est rempli de vapeur saturée à t°, et à une pression limite p, qui dépend de la température et qu'elle ne dépasse pas. Toute tentative pour augmenter la pression, en diminuant le volume, n'aboutit qu'à condenser une partie de la vapeur; et l'opération inverse vaporiserait une partie du liquide restant, qui se changerait en vapeur saturée à la pression p et à la température t°, pourvu cependant que le volume total de l'enceinte ne dépasse pas la valeur correspondant à la vaporisation complète du liquide.

Quand le liquide est de l'eau, Regnault a établi la formule empirique

$$\log p = B - b\beta^t, \tag{1}$$

dans laquelle p représente la pression exprimée en millimètres de mercure, t la température en degrés centigrades, B, b et β trois nombres constants définis par les égalités

$$B = 5,4233177, \quad \log b = 0,6821547, \quad \log\beta = \bar{1},9972311;$$

les logarithmes sont des logarithmes vulgaires. Si la pression devait s'exprimer en kilogrammes par mètre carré, le nombre correspondant serait multiplié (n° 261) par $\frac{10333}{760}$, et B serait en conséquence augmenté de $\log\frac{10333}{760} = 1,1334128$.

Soit λ le nombre de calories nécessaires : 1° pour élever, sous la pression p, 1^{kg} d'eau de 0° à t°; 2° pour transformer cette eau en vapeur saturée à t°. On a, d'après le même physicien,

$$\lambda = 606,5 + 0,305\,t. \tag{2}$$

Regnault a également donné, pour exprimer la chaleur spécifique c de l'eau, sous la pression p et à une température θ, comprise entre 0° et t°, la formule empirique

$$(3) \qquad c = 1 + 0,00004\theta + 0,0000009\theta^2;$$

la quantité de chaleur dépensée pour élever l'eau liquide de 0° à t°, sous la pression p, serait, en conséquence,

$$(4) \qquad C = \int_0^t c\,d\theta = t + 0,00002t^2 + 0,0000003t^3,$$

et la chaleur spécialement dépensée pour la vaporisation serait

$$(5) \qquad \lambda - C = 606,5 - 0,695t - 0,00002t^2 - 0,0000003t^3.$$

On peut calculer théoriquement la densité de la vapeur d'eau saturée à t°. Appliquons pour cela la formule (9) du n° **338** au passage de l'eau liquide à l'état de vapeur, la température et la pression restant égales à t et p; cette formule devient, en remplaçant $\varphi(t)$ par $(a + t)$ (n° **339**),

$$dQ = A(a+t)\frac{dp}{dt}\,dv,$$

et elle exprime la quantité de chaleur dQ, à employer pour obtenir la dilatation dv du kilogramme d'un corps quelconque conservant une température t constante.

Dans le cas actuel, p est une fonction de t, définie par l'équation (1); $\frac{dp}{dt}$ est donc aussi fonction de t, et peut se calculer numériquement pour chaque température. Donc on a la valeur de $\frac{dQ}{dv}$, qui reste constante pendant que la vaporisation s'effectue, puisque t ne change pas. Si donc on appelle u l'augmentation de volume, prise par 1^{kg} d'eau pendant ce changement d'état, on aura, pour valeur de la quantité totale de chaleur employée pour le produire,

$$Q = A(a+t)\frac{dp}{dt}\,u;$$

et, comme la même quantité est donnée par la formule (5), on posera

$$(6) \qquad \lambda - C = A(a+t)\frac{dp}{dt}u,$$

ce qui fera connaître u en fonction de t. Comme d'ailleurs le volume du kilogramme d'eau liquide est toujours à peu près 0,001, quelle que soit la température, il en résulte que cette eau, convertie en vapeur saturée à t°, occupe un volume $u + 0{,}001$, qu'on pourra calculer, et d'où l'on déduira le poids de l'unité de volume de vapeur saturée à t°.

M. Zeuner, professeur à l'École Polytechnique de Zurich, a proposé, pour obtenir u, la formule empirique

$$(7) \qquad Apu = 31{,}10 + 0{,}096\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3,$$

plus simple que celle qu'on déduirait de l'équation précédente, et donnant à peu près les mêmes résultats.

La quantité $\lambda - C$ se compose de deux parties : 1° une quantité de chaleur Apu convertie en travail, puisque le volume augmente de u sous la pression constante p; 2° l'accroissement simultané de la chaleur interne, c'est-à-dire ce qu'on nomme la *chaleur latente de vaporisation*. En désignant par ρ cette deuxième partie, on a

$$(8) \qquad \rho = \lambda - C - Apu = 575{,}4 - 0{,}791\,t.$$

348. *Des mélanges d'eau et de vapeur saturée.* — L'agent intermédiaire par lequel s'opère la transformation de la chaleur en travail, dans les machines à vapeur ordinaires, est, en réalité, toujours un mélange de vapeur saturée et d'eau liquide, qui est entraînée par la vapeur venant de la chaudière. Il est donc nécessaire, pour faire la théorie de ces machines, considérées comme machines thermiques, de résoudre diverses questions relatives aux mélanges dont il s'agit; c'est ce que nous allons faire maintenant.

(a) Dans une enceinte à parois mobiles se trouve 1^{kg} de substance, comprenant un poids m de vapeur saturée à t° et un poids $1 - m$ d'eau à la même température. Quel est l'ex-

cès U de la chaleur interne du mélange sur celle de 1^{kg} d'eau à 0° et sous la même pression p?

L'excès demandé U comprend deux parties :

1° Pour faire passer l'eau liquide de 0° à $t°$, sous la pression p, on emploie une quantité de chaleur $C = \int_0^t c\,d\theta$, et, comme le travail extérieur fait par le corps est ici sensiblement nul, vu que son volume ne change pas d'une manière appréciable, toute cette chaleur contribue à l'augmentation de la chaleur interne.

2° Il reste à vaporiser le poids m, ce qui exige un nouvel accroissement $m\rho = m(\lambda - C - Apu)$ de la chaleur interne (n° 347).

Donc, en somme,

$$U = C + m(\lambda - C - Apu),$$

ou, en substituant les expressions (3) et (8) de C et de $\lambda - C - Apu$,

$$(9)\quad U = 575,4m + (1 - 0,791m)t + 0,00002t^2 + 0,0000003t^3.$$

(b) Le mélange ci-dessus défini éprouve un accroissement de température dt, et, en même temps, m devient $m + dm$. Quelle quantité de chaleur dQ a-t-il fallu donner au mélange, pour produire ce changement?

Comme on le sait (n° 335), la quantité de chaleur nécessaire à un changement quelconque d'état physique comprend : 1° l'accroissement de la chaleur interne; 2° la chaleur convertie en travail. Dans le cas actuel, la première partie est la différentielle dU de la quantité U que nous venons de calculer (a); la seconde se réduit à $Apd(mu)$, si l'on regarde comme négligeable la variation de volume de l'eau liquide [1].

---

[1] Le volume v de 1^{kg} du mélange se compose du volume v' de 1^{kg} d'eau à la température t et sous la pression p, plus de l'excès de volume mu répondant au poids m d'eau vaporisée. On a donc

$$dv = dv' + d(mu),$$

ou simplement $dv = d(mu)$, parce que v' se rapproche beaucoup d'être constant, et que, d'ailleurs, v' est généralement négligeable devant mu.

Donc

$$\begin{aligned} dQ &= dU + Ap\,d(mu) \\ &= dC + d[m(\lambda - C) - Apmu] + Ap\,d(mu) \\ &= c\,dt + d[m(\lambda - C)] - Amu\frac{dp}{dt}\,dt, \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant $Au\frac{dp}{dt}$ par sa valeur tirée de l'équation (6),

$$(10)\qquad dQ = c\,dt + d[m(\lambda - C)] - \frac{m(\lambda - C)}{a+t}\,dt.$$

La même formule peut encore s'écrire

$$(11)\qquad dQ = c\,dt + (a+t)\,d\left[\frac{m(\lambda - C)}{a+t}\right].$$

(c) Si le mélange est renfermé dans une enceinte imperméable à la chaleur, de manière que dQ soit constamment nulle, quelle est la valeur m' de m, pour laquelle on aura $dm = 0$, c'est-à-dire pour laquelle une variation dt de la température n'entraînera ni condensation de vapeur, ni vaporisation d'eau?

L'introduction dans l'équation (10) des hypothèses particulières $dQ = 0$, $dm = 0$ donne pour déterminer m' la relation

$$c\,dt + m'd(\lambda - C) - \frac{m'(\lambda - C)\,dt}{a+t} = 0,$$

d'où l'on tire

$$m' = \frac{c(a+t)}{\lambda - C - (a+t)\dfrac{d(\lambda - C)}{dt}}.$$

En substituant pour c sa valeur (3), dans laquelle on aura fait $\theta = t$, et pour $\lambda - C$ sa valeur (5), on trouve

$$m' = \frac{(1 + 0,00004\,t + 0,0000009\,t^2)(273 + t)}{\left\{\begin{array}{l} 606,5 - 0,695\,t - 0,00002\,t^2 - 0,0000003\,t^3 \\ \quad + (273 + t)(0,695 + 0,00004\,t + 0,0000009\,t^2) \end{array}\right\}}$$

ou bien

$$(12)\qquad m' = \frac{(1 + 0,00004\,t + 0,0000009\,t^2)(273 + t)}{796,235 + 0,01092\,t + 0,0002657\,t^2 + 0,0000006\,t^3}.$$

Voici le Tableau de quelques résultats obtenus au moyen de cette formule :

Température t.	Proportion m' de vapeur.	Proportion $1-m'$ d'eau liquide.
0°....................	0,343	0,657
50....................	0,407	0,593
100....................	0,472	0,528
150....................	0,538	0,462
200....................	0,607	0,393

(d) Dans le cas où le poids de vapeur m contenu dans le mélange excéderait le poids particulier m' qu'on vient de déterminer, quelle est la quantité d'eau vaporisée pendant que la température augmente de dt, les parois étant toujours supposées imperméables à la chaleur?

Puisqu'on suppose $dQ = 0$, on a, par l'équation (10),

$$c\,dt + m\,d(\lambda - C) + (\lambda - C)\,dm - \frac{m(\lambda - C)}{a+t}\,dt = 0;$$

d'autre part, m' satisfait à l'équation

$$c\,dt + m'\,d(\lambda - C) - \frac{m'(\lambda - C)}{a+t}\,dt = 0.$$

La soustraction de ces deux équations membre à membre donne

$$(m - m')\,d(\lambda - C) + (\lambda - C)\,dm - \frac{(m-m')(\lambda - C)}{a+t}\,dt = 0;$$

d'où résulte

$$(13)\quad (\lambda - C)\frac{dm}{dt} = (m - m')\left[\frac{\lambda - C}{a+t} - \frac{d(\lambda - C)}{dt}\right] = \frac{c}{m'}(m - m').$$

Or la quantité $\lambda - C$ reste toujours positive, dans les limites des expériences faites; cela est mis en évidence par son expression algébrique (5), qui devient négative seulement au delà de $t = 700°$, température bien supérieure à la plus élevée de celles qu'on a réalisées dans la production de la vapeur d'eau saturée [1]. Donc pour $m > m'$ la dérivée $\frac{dm}{dt}$ est posi-

[1] Cela ne veut pas dire que $\lambda - C$ deviendrait effectivement négative pour $t > 700°$, car il est très probable que la formule (5) cesserait de représenter exactement les résultats d'expérience, bien avant d'arriver à $t = 700°$.

tive, et la proportion m de vapeur varie dans le même sens que la température t; pour l'accroissement dt de celle-ci, m s'accroît d'une quantité dm dont l'équation (13) donne la valeur.

(e) Maintenant, les hypothèses ci-dessus admises (d) étant conservées (c'est-à-dire $m > m'$ et $dQ = 0$), il est facile d'établir que les variations du volume v occupé par le mélange sont en sens contraire de celles qu'éprouvent m et t. Supposons en effet que t devienne $t + dt$ et que m devienne simultanément $m + dm$. La différence du second état avec le premier consiste, d'une part, en ce que les poids m de vapeur et $1 - m$ d'eau se sont échauffés de dt, et, d'autre part, en ce qu'un poids dm d'eau à t_0 a dû se changer en un poids égal de vapeur à $(t + dt)^\circ$. Dans le cas de dt et dm positifs, ces deux choses exigent une augmentation de chaleur interne, et, comme il n'en vient pas du dehors, puisque dQ est constamment nulle, il faut que cette chaleur ait été développée par la compression; donc dv est négatif quand dt et dm sont positifs. On verrait de même que dv est positif quand il y a diminution de t et de m.

Remarque. — Les calculs qu'on vient d'exposer (c, d, e) sont applicables pendant la détente dans le cylindre d'une machine à vapeur. La proportion d'eau entraînée par la vapeur venant de la chaudière n'est pas assez grande pour rendre $m < m'$ au commencement de la détente; d'ailleurs Q reste sensiblement nul. Il y a donc condensation d'eau pendant que la détente s'effectue; la vapeur, toujours en contact avec une certaine quantité d'eau liquide, reste à l'état de vapeur saturée. On a reconnu aussi que la condition $m > m'$ est satisfaite jusqu'à la fin de la détente, pourvu que celle-ci ne soit pas poussée trop loin.

349. *Calcul du travail produit par la vapeur mélangée d'eau, dans une machine à détente et condensation.* — Si l'on faisait, par la méthode que nous allons indiquer, le calcul du travail produit pendant une course du piston principal, on constaterait que tous ses termes sont proportionnels au poids P du fluide qui a été fourni par la chaudière, pendant la période d'admission. En conséquence, pour ne pas sur-

charger inutilement toutes nos équations de ce facteur P, nous ferons le calcul comme s'il était égal à 1, c'est-à-dire que nous allons déterminer le travail produit par chaque kilogramme de fluide dépensé.

Soient donc, pour 1^{kg} de vapeur mélangée d'eau, sortant de la chaudière et entrant dans le cylindre, pendant la période d'admission,

m_0 le poids de la vapeur, $1 - m_0$ celui de l'eau entraînée;
v_0 le volume de 1^{kg} d'eau;
$v_0 + u_0$ celui de 1^{kg} de vapeur;
t_0, p_0 la température et la pression correspondantes.

Nommons en outre m_1, v_1, u_1, t_1, p_1 les valeurs prises par ces quantités à la fin de la détente.

Le volume fluide introduit dans le cylindre pendant la période d'admission a pour valeur $v_0 + m_0 u_0$, et il produit (n° 298, 1°) un travail ayant pour valeur

$$p_0(v_0 + m_0 u_0);$$

mais nous en défalquerons tout de suite : 1° le travail, pendant la course entière, de la contre-pression p' du condenseur; 2° le travail nécessaire pour renvoyer dans la chaudière 1^{kg} d'eau prise dans le condenseur et occupant le volume v', soit en tout

$$p'(v_1 + m_1 u_1) + (p_0 - p')v';$$

en effet $v_1 + m_1 u_1$, volume total du fluide à la fin de la détente, est égal au volume engendré par la face opposée du piston principal, sous la pression p', dans une course complète, et, d'autre part, le piston de la pompe alimentaire doit engendrer le volume v', sous une pression résistante $p_0 - p'$. Le reste de la soustraction donne une première partie du travail demandé

$$p_0(v_0 - v') - p'(v_1 - v') + p_0 m_0 u_0 - p' m_1 u_1,$$

qu'on peut réduire très approximativement à

$$(14) \qquad p_0 m_0 u_0 - p' m_1 u_1 = T_0,$$

vu la petitesse des variations qu'éprouve le volume de 1^{kg}

d'eau dans les diverses circonstances de pression et de température, en comparaison des changements de volume de la vapeur.

L'expression (14) renferme, outre les quantités p_0, m_0, u_0, p', qu'on doit regarder comme des données de la question, les quantités m_1, u_1 *a priori* inconnues; d'ailleurs, nous aurons également besoin de les déterminer, ainsi que la température t_1, pour évaluer le travail produit pendant la période de détente. Il faut donc voir comment on pourra calculer ces quantités. A cet effet, nous supposerons d'abord qu'on donne le degré de détente, c'est-à-dire le rapport des volumes $v_0 + m_0 u_0$, $v_1 + m_1 u_1$ occupés par le mélange de vapeur et d'eau liquide au commencement et à la fin de la détente; si l'on nomme K ce rapport, et si l'on néglige v_0 et v_1 devant $m_0 u_0$ et $m_1 u_1$, on posera donc

$$(15) \qquad \mathrm{K} = \frac{m_0 u_0}{m_1 u_1},$$

première équation entre deux de nos trois inconnues t_1, m_1, u_1. Pour en avoir une seconde, on intégrera l'équation (11) divisée par $a + t$, dans l'étendue entière de la détente, en observant que pendant toute cette période le mélange fluide ne reçoit pas de chaleur, et que, par suite, $d\mathrm{Q}$ est nul; on trouve alors

$$(16) \qquad \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a+t} + \frac{m_0(\lambda_0 - \mathrm{C}_0)}{a + t_0} - \frac{m_1(\lambda_1 - \mathrm{C}_1)}{a + t_1} = 0,$$

λ_0, C_0, λ_1, C_1 désignant ce que deviennent λ et C pour les valeurs t_0 et t_1 de t. Le premier membre de l'équation (16) est calculable numériquement quand on donne m_1 et t_1, puisque c, λ et C sont des fonctions connues de t (n° 347); c'est donc une relation entre m_1 et t_1. Mais u_1 est aussi une fonction connue de t_1 en raison de l'équation (7) où l'on aurait mis pour p_1 sa valeur tirée de (1); on aurait ainsi

$$(17) \qquad \mathrm{A} p_1 u_1 = 31,10 + 0,096\,t_1 - 0,0002\,t_1^2 - 0,0000003\,t_1^3,$$

ce qui complète le nombre d'équations nécessaires pour déterminer t_1, m_1, u_1. On obtient la solution par une suite de tâtonnements, dans lesquels on se donne t_1 pour point de dé-

part; l'équation (16) permet alors d'avoir m_1, l'équation (17) fait connaître u_1, et l'on tâtonne en faisant varier t_1 jusqu'à ce que le produit $m_1 u_1$ vérifie l'équation (15).

Connaissant ainsi les valeurs de m, t, u au commencement et à la fin de la détente, nous pouvons calculer (n° 348, *a*) la diminution $U_0 - U_1$ de la chaleur interne du fluide, qui sera

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} U_0 - U_1 = C_0 - C_1 + m_0(\lambda_0 - C_0 - Ap_0 u_0) \\ - m_1(\lambda_1 - C_1 - Ap_1 u_1), \end{aligned} \right.$$

à laquelle correspond un travail extérieur produit

$$(19) \qquad T_1 = \frac{U_0 - U_1}{A},$$

car le premier principe (n° 335) donne, Q étant nulle pendant cette période,

$$o = U_1 - U_0 + AT_1.$$

Le travail total effectué par 1^kg de fluide dans son évolution complète serait la somme

$$T_0 + T_1,$$

dont les deux termes résultent des équations (14) et (19). On voit que, pour le calculer numériquement, il faudrait avoir, outre les données t_0 et K qui dépendent du chauffage de la chaudière et des dispositions de la machine, la proportion m_0 de vapeur sèche que contient le fluide venant de la chaudière. Or cette proportion varie suivant des circonstances secondaires, dont l'influence est difficile à évaluer; mais heureusement des essais numériques assez nombreux, faits par MM. Zeuner et Combes, ont démontré que l'influence de m_0 sur le résultat final est presque nulle; on trouve sensiblement le même travail, pour une valeur quelconque de m_0 entre 1 et 0,70, limite inférieure au-dessous de laquelle m_0 ne descend vraisemblablement jamais dans la pratique.

350. *Vitesse d'écoulement de la vapeur saturée, mélangée d'eau liquide.* — Reprenons l'équation établie plus haut

(n° 346), à propos des gaz permanents,

$$\frac{V_1^2}{2g} = \int_{p_1}^{p_0} v\,dp,$$

les notations conservant ici le même sens; cette équation peut s'écrire, en intégrant par parties,

$$\frac{V_1^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 + \int_{v_0}^{v_1} p\,dv.$$

Le dernier terme du second membre exprime le travail extérieur fait par chaque kilogramme de gaz écoulé; si l'on suppose que l'écoulement ait lieu sans addition ni soustraction de chaleur, ce travail est lié au changement $U_1 - U_0$ de la chaleur interne (n° 335) par la relation

$$U_1 - U_0 + A\int_{v_0}^{v_1} p\,dv = 0;$$

d'où résulte

$$\frac{V_1^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 + \frac{1}{A}(U_0 - U_1).$$

Les notations v_0, v_1 désignent le volume occupé par 1^kg de fluide dans l'intérieur du réservoir et au point de sortie; en négligeant le volume de l'eau liquide devant celui de la vapeur, et désignant par u_0, u_1, m_0, m_1 les mêmes quantités qu'au n° 349, on peut encore remplacer v_0 et v_1 par $m_0 u_0$ et $m_1 u_1$; de plus, on peut remplacer $U_0 - U_1$ par l'expression (18), dans l'hypothèse où les circonstances données sont telles qu'on doive considérer comme certain l'état de saturation de la vapeur qui s'écoule. La dernière équation devient alors

$$A\frac{V_1^2}{2g} = Ap_0 m_0 u_0 - Ap_1 m_1 u_1 + C_0 - C_1$$
$$+ m_0(\lambda_0 - C_0 - Ap_0 u_0) - m_1(\lambda_1 - C_1 - Ap_1 u_1)$$

ou, toute réduction faite,

$$(20) \qquad A\frac{V_1^2}{2g} = C_0 - C_1 + m_0(\lambda_0 - C_0) - m_1(\lambda_1 - C_1).$$

Nous avons admis que le fluide sortant contient toujours de l'eau liquide ou que du moins la vapeur reste à l'état de saturation; dès lors, la connaissance de p_1 entraîne celle de la température t_1 correspondante (nº 347), et l'équation (16) du nº 349 donne alors la valeur de $m_1(\lambda_1 - C_1)$. Si nous la portons dans l'équation (20), en remplaçant de plus $C_0 - C_1$ par $\int_{t_1}^{t_0} c\,dt$, il viendra

$$A\frac{V_1^2}{2g} = \int_{t_1}^{t_0} c\,dt + m_0(\lambda_0 - C_0) - (a+t_1)\int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a+t} - m_0(\lambda_0 - C_0)\frac{a+t_1}{a+t_0}$$

ou bien

$$(21) \qquad A\frac{V_1^2}{2g} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c(t-t_1)\,dt}{a+t} + \frac{m_0(\lambda_0 - C_0)(t_0 - t_1)}{a+t_0}.$$

La température t_0 est, ainsi que m_0, une donnée immédiate; t_1 résulte, comme nous l'avons dit, de la connaissance de p_1. Par suite, le second membre de l'équation (21) est une fonction donnée, numériquement calculable, de trois nombres connus t_0, m_0, t_1; le calcul étant fait, on en déduira V_1. D'ailleurs l'équation (16) ayant fait connaître $m_1(\lambda_1 - C_1)$, et $\lambda_1 - C_1$ étant lui-même connu par la formule (5) du nº 347, on en déduirait au besoin m_1, c'est-à-dire la proportion de vapeur dans le mélange, au point de sortie.

Le calcul de V_1 peut se simplifier par la suppression de l'intégrale qui figure au second membre de l'équation, dans le cas d'une petite différence entre les températures t_0 et t_1. Le facteur $\frac{c}{a+t}$ varie alors très peu et pourrait se remplacer par l'une de ses valeurs extrêmes $\frac{c_0}{a+t_0}$; on en déduit l'égalité approximative

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c(t-t_1)dt}{a+t} = \frac{c_0}{a+t_0}\int_{t_1}^{t_0} (t-t_1)\,dt$$